



УДК 616.71

© 2001 г. **А.В. Бушманов**, канд. техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОТНОСТИ КОСТНОЙ ТКАНИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются свойства процесса реконструкции плотности костной ткани с использованием модели Гарригана и Гамильтона.

Введение

Задача анализа поведения костной ткани под воздействием различных механических нагрузок в последнее десятилетие привлекает пристальное внимание многих авторов [1 – 6]. При этом обычно рассматриваются как теоретические проблемы (в частности задачи построения математических моделей, учитывающих разнообразные физические свойства изучаемых процессов), так и прикладные вопросы, чаще всего связанные с решением соответствующих нелинейных систем уравнений. С целью анализа динамических и статических свойств, характеризующих изменение плотности костной ткани при постоянных нагрузках, в статье рассматриваются вопросы построения соответствующих моделей плотности костной ткани и проведения на их основе вычислительных экспериментов.

Математические модели

В работе [3] с помощью метода функций Ляпунова показано, что при выделении в структуре костной ткани твердой составляющей пористой среды процесс изменения ее плотности, рассматриваемый относительно соответствующих начальных условий при постоянной внешней нагрузке, в каждой точке сходится к конечным значениям. Фактически это означает, что характер поведения плотности костной ткани соответствует динамике некоторой нелинейной системы, устойчивой в целом.

В работе [1] Гарриганом и Гамильтоном предложено для описания процесса изменения плотности костной ткани использовать нелинейную

динамическую модель, объединяющую совокупность уравнений, а именно:

– уравнение скорости *реконструкции* (remodeling)

$$\frac{d\phi}{dt} = R(U_t - A), \quad (1)$$

где $\phi = \rho/\rho_{max}$ – нормализованная плотность кости; R – коэффициент реконструкции; A – точка отсчета для давления; U_t – *стимул* (stimulus) реконструкции;

– уравнение стимула реконструкции

$$U_t = \frac{U}{\phi^m}, \quad m > 1, \quad (2)$$

где m – параметр локального стимула; U – локальная плотность энергии напряжения, значение которой функционально связано с нагрузкой, геометрией и модулем упругости костной ткани;

– уравнение модуля упругости кости, согласно [3 – 6] имеющее вид

$$E = K\phi^n, \quad n > 1, \quad (3)$$

где K и n – параметры модуля упругости.

Кроме того, при действии на изотропную костную ткань (с геометрией в форме длинной балки) осевой силы и изгибающего момента согласно [1] математическую модель (1) – (3) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi^{n-m}}{2} \left[\left(\frac{\bar{F}I_1 - \bar{M}I_0}{I_1^2 - I_0I_2} \right) y + \left(\frac{\bar{M}I_1 - \bar{F}I_2}{I_1^2 - I_0I_2} \right) \right]^2 - a, \quad (4)$$

где следующие безразмерные функции и величины

$$\bar{F} = F/Kh, \quad \bar{M} = M/Kh^2, \quad \bar{t} = RKt, \quad a = A/K, \quad I_i = \int_{-1}^1 \phi^n y^i dy \quad (5)$$

введены для обозначения соответственно – нагрузки, времени, точки отсчета для давления и моментов. Важно отметить [1], что в условиях равномерного распределения нагрузок модель (4) дает два независимых частных уравнения. Так, при действии только осевого усилия – это уравнение вида

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi^{n-m}}{2 \left(\int_{-1}^1 \phi^n dy \right)^2} \bar{F}^2 - a, \quad \phi_0 = \left(\frac{\bar{F}^2}{8a} \right)^{1/(n+m)}, \quad (6)$$

а при действии только изгибающего момента уравнение

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi^{n-m} y^2}{2 \left(\int_{-1}^1 \phi^n y^2 dy \right)^2} \bar{M}^2 - a, \quad (7)$$

$$\phi_0(y) = \left(\frac{M^2 y^2}{2aI_2^2} \right)^{1/(m-n)} I_2 \left[\frac{2(m-n)}{3m-n} \right]^{(m-n)/(m+n)} \left(\frac{M^2}{2a} \right)^{n/(m+n)} \quad (8)$$

Если костную ткань, имеющую форму длинной балки, разбить на N интервалов одинаковой ширины $\delta y = 2/N$, то математические модели вида (6) или (7), (8) можно преобразовать соответствующим образом, – например, [7] – за счет дискретно-пространственного разбиения, а полученные уравнения записать относительно новых переменных, представляющих собой вариации вида

$$x_j = \phi_j - \phi_0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Например, для модели (6) ее новый дискретно-пространственный вид будет соответствовать системе из N уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{N^2 (x_j + \phi_0)^{n-m}}{8 \left(\sum_{j=1}^N (x_j + \phi_0)^n \right)^2} \bar{F}^2 - a, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Блок-диаграмма моделирования динамической системы (10) для случая $N=3$ показана на рис. 1.

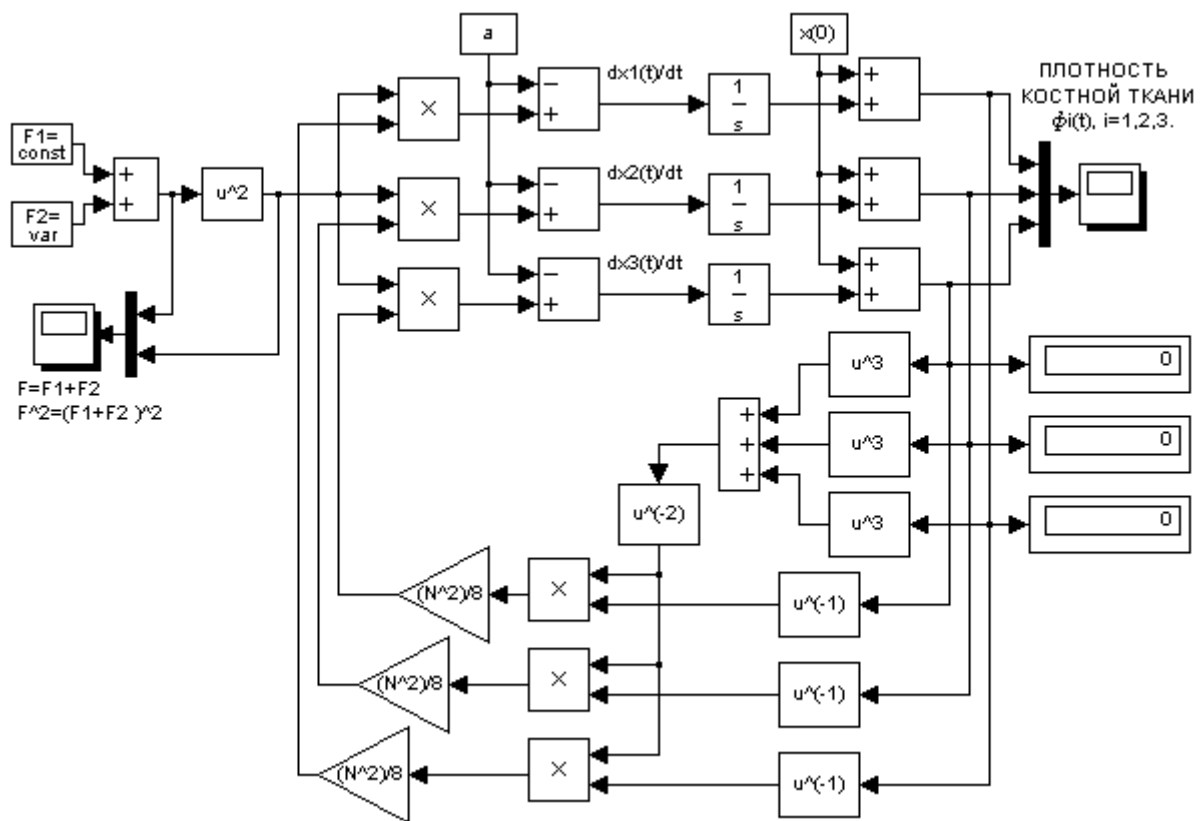


Рис. 1. Имитационная модель процесса изменения плотности костной ткани при действии осевой нагрузки

В свою очередь, для соотношений (7), (8) новая модель будет иметь

следующее математическое описание:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{N^2(x_j + \phi_{0j})^{n-m} y_j^2}{8 \left(\sum_{j=1}^N (x_j + \phi_{0j})^n y_j^2 \right)^2} \bar{M}^2 - a, \quad j=1,2,\dots,N. \quad (11)$$

Блок-диаграмма моделирования системы уравнений (11) для случая $N=3$ представлена на рис.2.

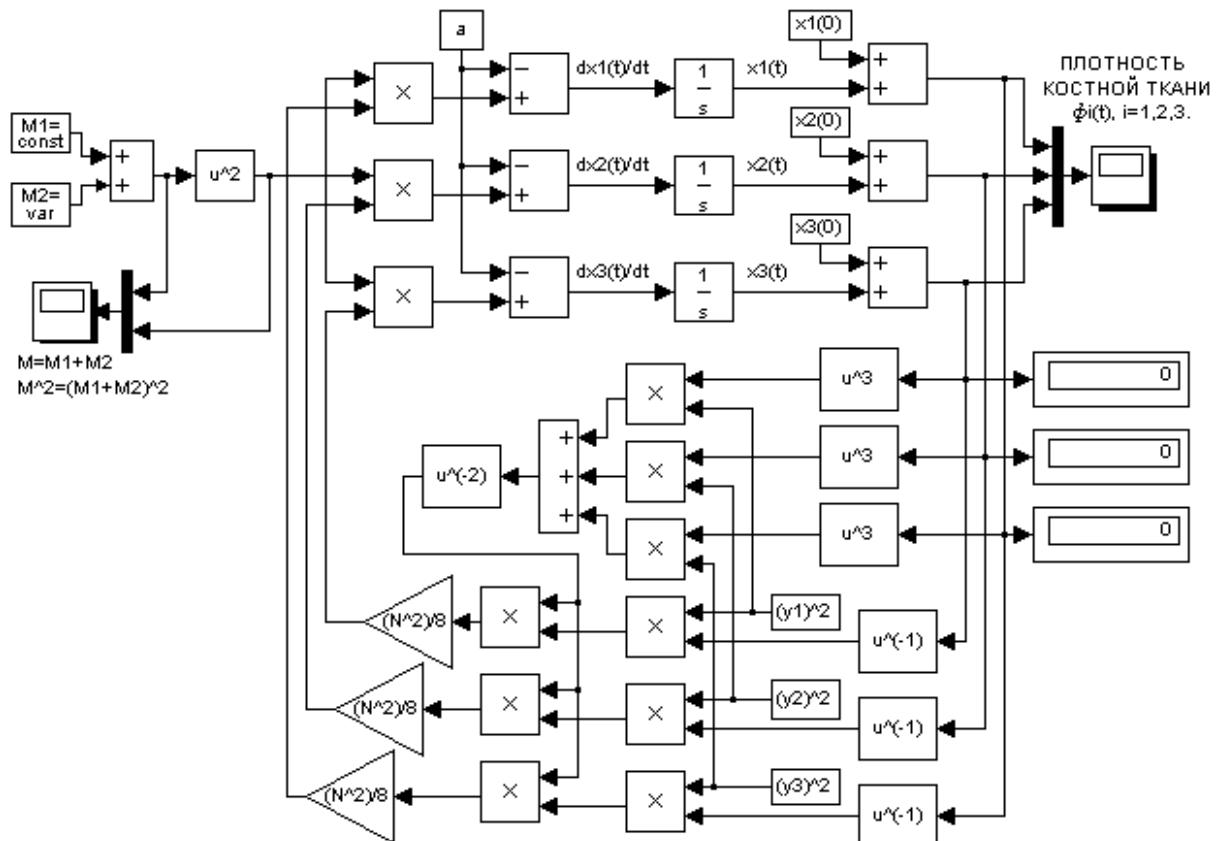


Рис. 2. Имитационная модель процесса изменения плотности костной ткани при действии изгибающего момента

Имитационное моделирование

При исследовании характеристик нелинейных динамических систем (10) и (11) использовалось инструментальное средство визуального моделирования SIMULINK математического пакета MATLAB [7].

Часть исходных данных, необходимых для проведения вычислительных экспериментов, была заимствована из работы [3]. Во всех случаях моделирования ряд исходных параметров имел постоянные значения, в частности:

$$N = 3; \quad a = 0.5; \quad \phi_0 = x(0) = 0.673; \quad n = 3; \quad m = 4, \quad (12)$$

при этом значения для некоторых параметров выбирались из диапазонов:

$$0.2 < \bar{F}_1 \leq 0.3; \quad |\bar{F}_2| \leq 0.2; \quad (13)$$

$$0.03 < \overline{M}_1 \leq 0.07; \quad |\overline{M}_2| \leq 0.03; \quad (14)$$

$$\phi_{0j} = x_j(0) < 1, \quad -1 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Временные процессы, отражающие характер изменения плотности костной ткани в нелинейной модели (10), вызванные осевой нагрузкой с законом изменения вида

$$\overline{F} = \overline{F}(t) = 0.3 + 0.1 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad \omega = 2\pi / T, \quad T = 5(c), \quad (16)$$

приведены на рис. 3.

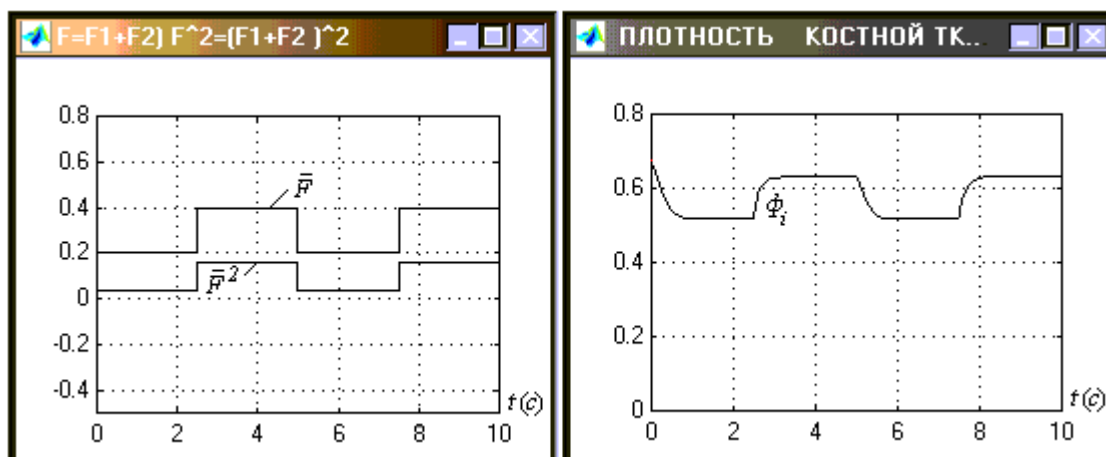


Рис. 3. Динамические процессы в системе (10), (12), (16)

Аналогичные процессы в той же системе, но при динамической нагрузке, заданной следующим образом:

$$\overline{F} = \overline{F}(t) = 0.3 + 0.1 \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi / T, \quad T = 5(c), \quad (17)$$

представлены на рис. 4.

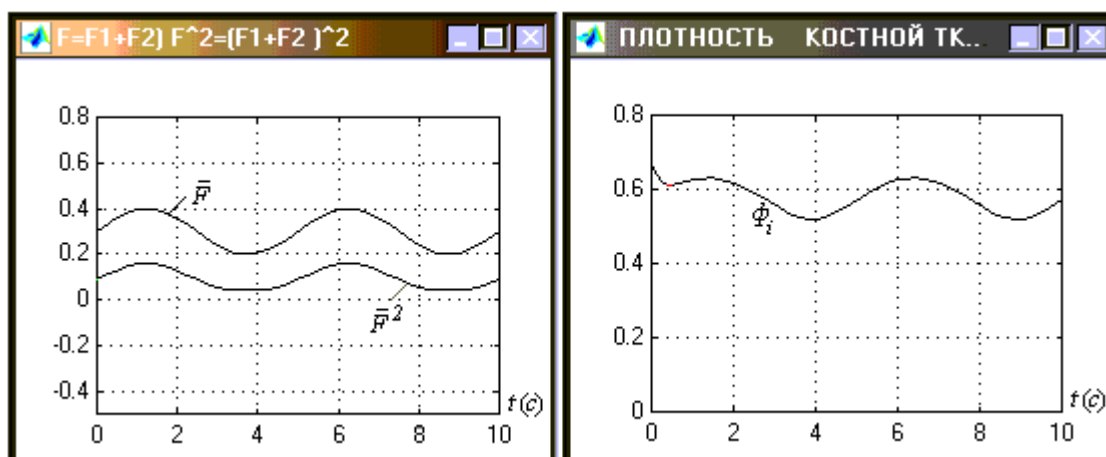


Рис. 4. Динамические процессы в системе (10), (12), (17)

На рис. 5 показаны процессы изменения плотности костной ткани в нелинейной динамической системе (11), вызванные действием изгибающего момента, закон изменения которого формировался в виде

$$\overline{M} = \overline{M}(t) = 0.7 + 0.03 \operatorname{sgn}(\sin \omega t), \quad \omega = 2\pi / T, \quad T = 5(c) \quad (18)$$

при следующих начальных условиях

$$x_1(0) = 0.65, \quad x_2(0) = 0.45, \quad x_3(0) = 0.25 \quad (19)$$

и произвольно заданных нормализованных расстояниях

$$y_1 = 0.3, \quad y_2 = 0.2, \quad y_3 = 0.6. \quad (20)$$

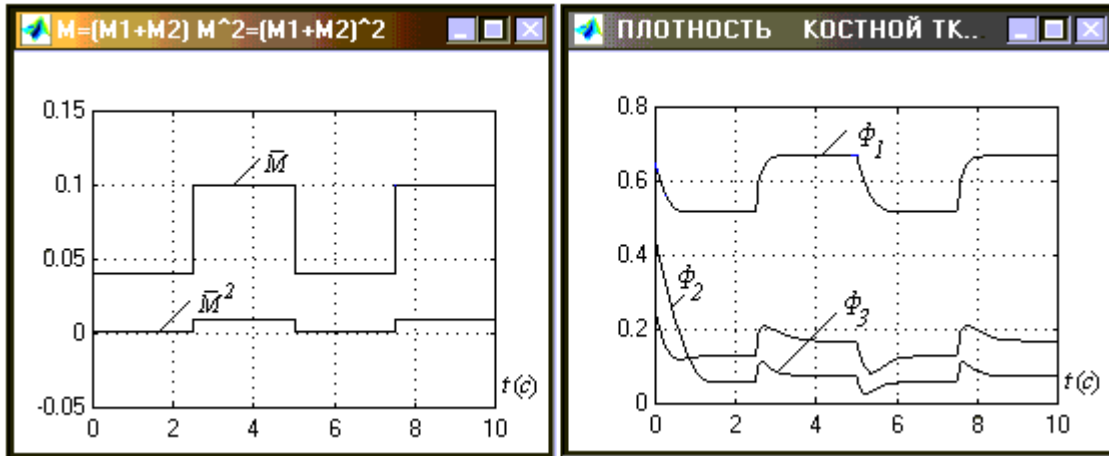


Рис. 5. Динамические процессы в системе (11), (12), (18) – (20)

Процессы, протекающие в системе (11), (12), (19), (20), но при динамической нагрузке, заданной следующим образом

$$\bar{M} = \bar{M}(t) = 0.7 + 0.03\sin\omega t, \quad \omega = 2\pi / T, \quad T = 5(c), \quad (21)$$

изображены на рис. 6.

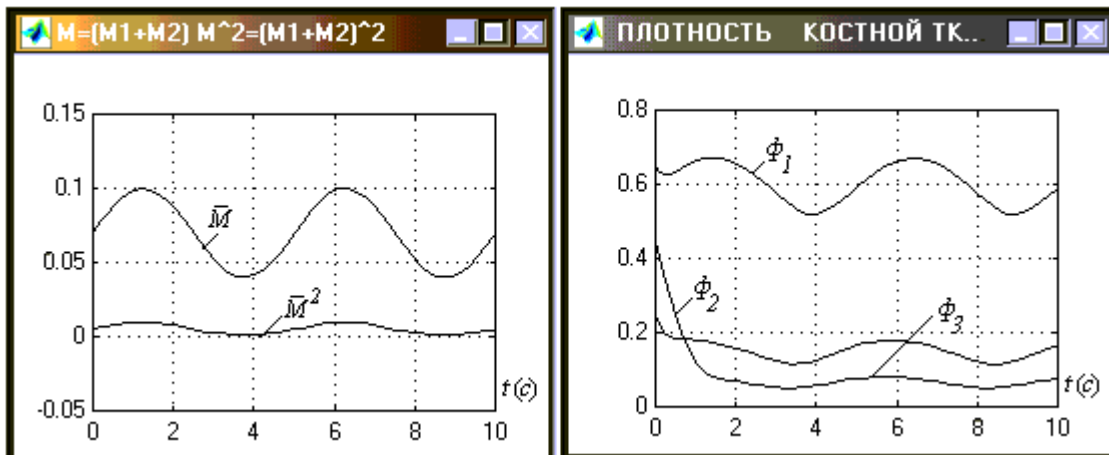


Рис. 6. Динамические процессы в системе (11), (12), (19) – (21)

С целью исследования статических свойств плотности костной ткани при постоянных по величине осевых нагрузках был проведен вычислительный эксперимент с использованием нелинейной модели (10), (12), в результате которого получены данные, представленные в табл. 1.

Таблица 1

\bar{F}	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
ϕ_j	0.3486	0.4249	0.4771	0.5179	0.552	0.5816	0.6078	0.6314	0.653	0.673

Графический образ статических характеристик $\phi_j(\bar{F})$, $j=1,2,3$ нелинейной системы (10), (12), построенный в соответствии с числовыми значе-

ниями табл. 1, изображен на рис. 7.

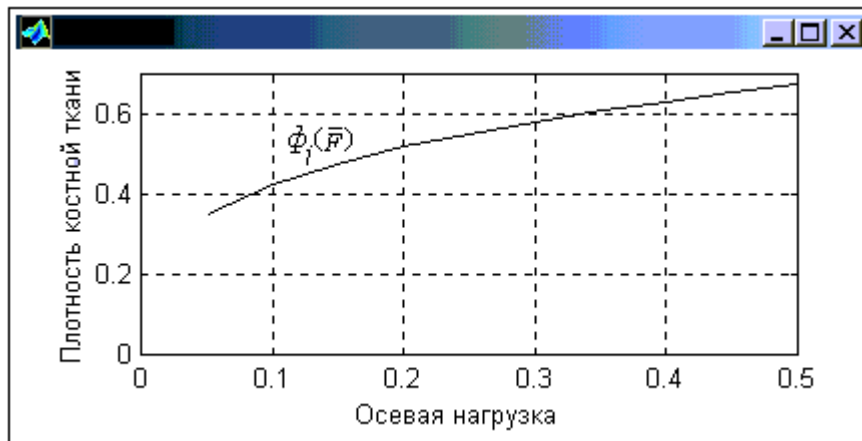


Рис. 7. Статическая характеристика системы (10), (12)

Для исследования статической характеристики плотности костной ткани при внешней нагрузке в виде изгибающего момента вычислительный эксперимент был проведен на основе математической модели (11), (12), (19), (20). В результате получен набор установившихся значений плотности костной ткани в статических режимах (см. табл. 2).

Таблица 2

\bar{M}	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
ϕ_1	0.08704	0.1061	0.1191	0.1293	0.1379	0.1452	0.15180	0.1577	0.1631	0.169
ϕ_2	0.03869	0.04716	0.05295	0.05748	0.06127	0.06454	0.06745	0.07007	0.07247	0.0747
ϕ_3	0.3481	0.4244	0.4765	0.5173	0.5514	0.5809	0.607	0.63070	0.6522	0.6722

Графики функций $\phi_j(\bar{M})$, $j=1,2,3$, соответствующие данным табл. 2, показаны на рис. 8.

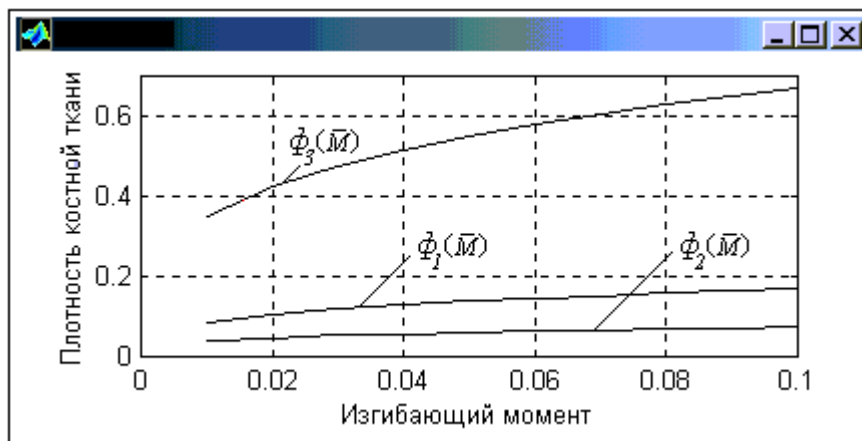


Рис. 8. Статические характеристики системы (11), (12), (19), (20)

Заключение

Основные выводы, вытекающие из анализа результатов имитационного моделирования нелинейных динамических систем, следующие:

– моделям реконструкции костной ткани вида (10), (12), независимо от дискретно-пространственного разбиения, соответствуют динамические процессы и статические характеристики, которые одинаковы для любого из рассматриваемых N -интервалов;

– для моделей реконструкции костной ткани вида (11), (12), (19), (20) в любом из исследуемых интервалов характерна существенная зависимость статических свойств и динамических процессов как от числа интервалов дискретно-пространственного разбиения и начальных условий, так и от значений иных параметров модели.

Эти и некоторые другие выводы, полученные на исследованных моделях, имеют достаточно ясную биомеханическую интерпретацию и могут быть сформулированы в виде количественных соотношений.

Автор выражает признательность Е.Л. Еремину за интерес к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrigan T.P. and Hamilton J.J.* An analytical and numerical study of the stability of bone remodeling theories: dependence on microstructural stimulus. *Journ. of Biomechanics.* 1992. 25. P. 477-488.
2. *Cowin S.C., Luo G.M., Sadegh F.M., Harrigan T.P.* On the sufficiency conditions for the stability of bone remodeling equilibrium. *Journ. of Biomechanics.* 1994. 27. P. 183-186.
3. *Capello A., Viceconti M., Nanni F., Catania G.* Global asymptotic stability of bone remodeling theories: a new approach based on non-linear dynamical systems analysis. *Journ. of Biomechanics.* 1998. 31. P. 289-294.
4. *Carter D.R., Hayes W.C.* The compressive behaviour of bone as a two-phase porous structure. *Journ. of bone and joint surgery.* 1977. 59-A. P. 954-962.
5. *Huiskes R., Weinans H., Grootenboer H.J., Dalstra M., Fudala B., Sloof T.J.* Adaptive bone remodeling theory applied to prosthetic-design analysis. *Journ. of Biomechanics.* 1987. 20. P. 1135-1150.
6. *Orr T.E., Beaupre G.S., Carter D.R., Shurman D.J.* Computer prediction of bone remodeling around porous-coated implants. *Journ. of Arthroplasty.* 1990. 5. P. 191-200.
7. *Гультяев А.К.* MATLAB 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows: практическое пособие. М.: Наука, 2000.