УДК 681.518.5

© 2002 г. **А.М. Абдулаев**
(Хабаровский государственный технический университет)

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Описан быстродействующий метод расчета коэффициентов полиномов, рекомендуемый применительно к большим порядкам. Метод может быть использован при вычислении функций чувствительности высоких порядков. Описание алгоритмов формализовано с помощью теорем и следствий. Приведен сравнительный анализ с известными методами.

Введение

Преобразование математических выражений, имеющих определенную логическую структуру, довольно широко рассматривается в известных справочниках математических формул и другой литературе. Такие соотношения используются в различных областях науки и могут быть представлены с помощью рядов, таблиц коэффициентов, тождественных соотношений.

Для выполнения алгебраических операций, связанных с анализом и диагностикой линейных динамических систем автоматического управления (САУ) на основе структурных особенностей, требуется применение логико-математического аппарата для обработки дробей и их преобразования. Особо значимая часть этого аппарата – работа с цепными дробями и методы их приведения к полиномам. К сожалению, в литературе не удалось найти решений подобных задач, поэтому ниже рассматриваются методы приведения произвольной цепи множителей 1-го порядка к полиному.

Постановка задачи

В статье будет рассмотрен следующий вид преобразования:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i p + b_i\right) = \sum_{j=0}^{n} C_j p^j,\ \ a_i \neq 0 . \tag{1}$$

Задача заключается в поиске коэффициентов C_j, $j \in [0, n]$ при известных $a_i, b_i, i \in [1,n]$, значения которых удовлетворяют выражению:

$$C_j = \sum_{m=1}^{M} \left(\prod_{\alpha \in A_m} a_\alpha \cdot \prod_{\beta \in B_m} b_\beta \right). \qquad (2)$$

Выражение (2) следует из применения стандартных правил выполнения алгебраических операций.

Теорема. Для выражений (1), (2), где A_m, B_m – множества значений индекса i, причем

$A_m = \{ i_1, i_2, ..., i_j \}, \; i_k \in D_k$,

где D_k – множество значений i_k индекса i, причем

$D_k = \{k, k+1, \ldots, k + (n-j)\}$,

выполняются следующие условия:

$i_{k+1} - i_k \geq 1, \; \forall \; n > 1$,

$A_m \cap B_m = \{1, 2, \ldots, n\}$,

$A_m \bigcup B_m = \text{O}$.

Доказательство теоремы не приводится из-за ограниченного объема статьи.

Следствие 1. В отношении выражений (1) и (2), если $j = n$ или $j = 0$, то количество слагаемых $M = 1$, причем, если $j = n$, то $B_m = \text{O}$, и, наоборот, если $j = 0$, то $A_m = \text{O}$.

Следствие 2. Если в выражении (2) расставить множители a_α, b_β по порядку возрастания индексов, то их индексы образуют полную последовательность целых чисел от 1 до n.

Пояснения к теореме. Как следует из теоремы, для выражения (2) число слагаемых M определяется количеством допустимых комбинаций индексов $\alpha \in \{D_1, D_2, \ldots, D_j\}$, т.е. $M = M(j)$, а при $j = n$ или $j = 0$ – $M = 1$, что объясняется взаимной дополняемостью и исключаемостью множеств A_m, B_m. Варианты значений для множества A_m можно находить, используя перебор индексного счетчика ступенчатого типа. Суть его раскроем на примере.

В отношении выражений (1) и (2) пусть $n = 5$, $j = 4$, тогда в соответствии с условием 1 (см. теорему) первое значение A_m счетчика будет равно $\{1, 2, 3, 4\}$. Для получения следующего значения (A_{m+1}) необходимо инкрементировать самый последний элемент счетчика, удовлетворяющий условию $i_k \leq k + (n-j)$. Итерация продолжается до тех пор, пока $i_k \leq k + (n-j)$ при $k = 1$. Таким образом, в результате получим:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ A_2 = \{1, 2, 3, 5\},\ A_3 = \{1, 2, 4, 5\},$$
$$A_4 = \{1, 3, 4, 5\},\ A_5 = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Применяя следствия из теоремы, в отношении полинома 4-го порядка получим равенство:

$$\begin{aligned}
&(a_1 p + b_1)(a_2 p + b_2)(a_3 p + b_3)(a_4 p + b_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 p^4 + \\
&+ (a_1 a_2 a_3 b_4 + a_1 a_2 a_4 b_3 + a_1 a_3 a_4 b_2 + a_2 a_3 a_4 b_1) p^3 + \\
&+ (a_1 a_2 b_3 b_4 + a_1 a_3 b_2 b_4 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4 + \\
&+ a_2 a_4 b_1 b_3 + a_3 a_4 b_1 b_2) p^2 + \\
&+ (a_1 b_2 b_3 b_4 + a_2 b_1 b_3 b_4 + a_3 b_1 b_2 b_4 + a_4 b_1 b_2 b_3) p + b_1 b_2 b_3 b_4 .
\end{aligned}$$

Анализ применимости теоремы для формирования алгоритмов расчета и их программной реализации

Программная реализация методов получения коэффициентов полинома произвольного порядка с помощью индексного счетчика не выглядит особо сложной задачей по следующим причинам:

– во-первых, для данной задачи в программный код нет необходимости вводить множество дополнительных сложноорганизованных массивов и структур данных (память требуется в основном для расчетных данных);

– во-вторых, основная задача здесь состоит в реализации процедуры инкремента индексного счетчика или описания его методов и свойств как объекта;

– задача имеет достаточно ясное представление.

Несмотря на то, что перебор счетчика коэффициентов полинома может быть описан в удобной форме и его использование не требует большого расхода памяти, он имеет один серьезный недостаток – очень низкое быстродействие. Действительно, для расчета каждого коэффициента (см. выражение (2)) необходимо выполнить большое число повторяющихся арифметических операций для чисел с плавающей точкой. Если при этом требуется получать полиномы порядка до нескольких десятков, то в результате время расчета будет слишком большим, что неприемлемо для оперативной работы. Особенно отчетливо эта проблема будет проявляться при реализации методов диагностирования, где широко используются функции чувствительности больших порядков в числителе и знаменателе.

Существенным образом уменьшить время преобразования можно за счет устранения многократных операций перемножения одних и тех же множителей a_α, b_β. С целью сокращения числа операций была дана иная формализация теоремы и предложен метод приведения цепи множителей к полиному произвольного порядка с помощью индексной сетки (таблицы).

Метод индексной сетки

Данный метод основывается на получении всего множества значений A_m, B_m, требуемых для расчета коэффициента C_j полинома, исходя из той же информации в отношении C_{j-1}. Поясним это на примере получения множеств A_m, B_m для расчета коэффициентов полинома 5-го порядка.

На рис. 1а и рис. 1б изображены сетки формирования значений множеств A_m, B_m соответственно для C_1 и C_2. Как видно из рисунков, для получения C_j при $j=1$ заполняются только диагональные клетки. Значения A_m, B_m вписываются соответственно в верхнюю и нижнюю части клеток. На рис. 1а значения A_m формируются из пустого множества путем добавления в него индекса, равного координате клетки, а значения B_m – из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ путем исключения этого индекса.

$\Rightarrow 1$	2	3	4	5	$\supset i$
{ 1 }					$\in A_m$
{ 2, 3, 4, 5 }					$\in B_m$
	{ 2 }				$\in A_m$
	{ 1, 3, 4, 5 }				$\in B_m$
		{ 3 }			$\in A_m$
		{ 1, 2, 4, 5 }			$\in B_m$
			{ 4 }		$\in A_m$
			{ 1, 2, 3, 5 }		$\in B_m$
				{ 5 }	$\in A_m$
				{ 1, 2, 3, 4 }	$\in B_m$

а) $j=1$

1	$\Rightarrow 2$	3	4	5	$\supset i$
$\Rightarrow$	{ 1, 2 }	{ 1, 3 }	{ 1, 4 }	{ 1, 5 }	$\in A_m$
$\Rightarrow$	{ 3, 4, 5 }	{ 2, 4, 5 }	{ 2, 3, 5 }	{ 2, 3, 4 }	$\in B_m$
	$\Rightarrow$	{ 2, 3 }	{ 2, 4 }	{ 2, 5 }	$\in A_m$
	$\Rightarrow$	{ 1, 4, 5 }	{ 1, 3, 5 }	{ 1, 3, 4 }	$\in B_m$
		$\Rightarrow$	{ 3, 4 }	{ 3, 5 }	$\in A_m$
		$\Rightarrow$	{ 1, 2, 5 }	{ 1, 2, 4 }	$\in B_m$
			$\Rightarrow$	{ 4, 5 }	$\in A_m$
			$\Rightarrow$	{ 1, 2, 3 }	$\in B_m$

б) $j=2$

Рис. 1. Индексные сетки множеств A_m, B_m для $j=1$ и $j=2$.

Принцип добавления и исключения индексов используется при получении элементов множеств A_m, B_m последовательно в отношении каждого из коэффициентов C_j полинома, при этом, если $A_m \in A$, $B_m \in B$, то

$$A(j) = \Phi_1 \langle A(j-1) \rangle, \quad B(j) = \Phi_2 \langle B(j-1) \rangle .$$

2	$\Rightarrow 3$	4	5	$\supset i$
$\Rightarrow$	{ 1, 2, 3 }	{ 1, 2, 4 } { 1, 3, 4 }	{ 1, 2 ,5} { 1, 3 ,5} { 1, 4 ,5}	$\in A_m$
$\Rightarrow$	{ 4, 5 }	{ 3, 5 } { 2, 5 }	{ 3, 4 } { 2, 4 } { 2, 3 }	$\in B_m$
	$\Rightarrow$	{ 2, 3, 4}	{ 2, 3, 5 } { 2, 4, 5 }	$\in A_m$
	$\Rightarrow$	{ 1, 5 }	{ 1, 4 } { 1, 3 }	$\in B_m$
		$\Rightarrow$	{ 3, 4, 5 }	$\in A_m$
		$\Rightarrow$	{ 1, 2 }	$\in B_m$

а) $j=3$

3	$\Rightarrow 4$	5	$\supset i$
$\Rightarrow$	{ 1, 2, 3, 4 }	{ 1, 2, 3 ,5} { 1, 2, 4 ,5} { 1, 3, 4 ,5}	$\in A_m$
$\Rightarrow$	{ 5 }	{ 4 } { 3 } { 2 }	$\in B_m$
	$\Rightarrow$	{ 2, 3, 4, 5 }	$\in A_m$
	$\Rightarrow$	{ 1 }	$\in B_m$

б) $j=4$

Рис. 2. Индексные сетки множеств A_m, B_m для $j=3$ и $j=4$.

Переходя от одного рисунка к другому, можно последовательно пронаблюдать изменение размерности множеств A_m, B_m и значений их элементов по правилам , которые определяются операторами Φ_1, Φ_2.

4	$\Rightarrow$ 5	$\supset i$
$\Rightarrow$	{ 1, 2, 3, 4, 5 }	$\in A_m$
$\Rightarrow$	{ }	$\in B_m$

Рис. 3. Индексные сетки множеств A_m, B_m для $j = 5$.

Оператор Φ_1. Чтобы в сетке значений $A(j)$ при $j>1$ получить значение ячейки с индексом i, необходимо объединить в ней элементы из ячеек той же строки с индексами, меньшими i сетки значений $A(j\text{-}1)$, и добавить к каждому из них индекс «i».

Оператор Φ_2. Чтобы в сетке значений $B(j)$ при $j>1$ получить значение ячейки с индексом i, необходимо объединить в ней элементы из ячеек той же строки с индексами, меньшими i сетки значений $B(j\text{-}1)$, и исключить из каждого из них индекс «i».

Программный алгоритм, выполненный с использованием данного метода расчета, работает на несколько порядков быстрее по сравнению с методом индексного счетчика по той причине, что в отличие от него для получения каждого значения произведений $\prod_{\alpha \in A_m} a_\alpha$ или $\prod_{\beta \in B_m} b_\beta$ при последовательном расчете всех коэффициентов C_j полинома требуется выполнить только одну операцию произведения. Это основное и очень существенное достоинство.

Недостатки данного способа расчета выражаются в следующем:

программная интерпретация алгоритма расчета с помощью индексной сетки нуждается в описании дополнительных структур данных, многомерных массивов или объектов, обустраивающих хранение и обработку данных, относящихся к C_{j-1}, для получения C_j;

для получения значения коэффициента C_j необходимо произвести схожие операции в расчете коэффициентов полинома для степеней меньших j, даже если потребность в их получении практически отсутствует;

описание и реализация алгоритма расчета выходят за рамки стандартных задач, поэтому требуют дополнительных затрат на формализацию.

При использовании емких типов данных с плавающей точкой – таких, как *double* или *long double* в языках С/С++, можно уменьшить время расчета еще на порядок. Для этого нужно использовать допустимые усовершенствования алгоритма расчета коэффициентов полинома, заключающиеся в следующем:

необходимо дополнительно определить переменную с плавающей точкой, равную 1 (например, *K*), и целочисленную переменную (например,

s) ;

– разделить переменную K на произведение $\prod_{i=1}^{n} b_i,\ b_i \neq 0$ и умножить ее на все значения множителей, в которых $b = 0$;

– исключить из расчета множители, в которых $b = 0$, при этом значение s будет равно их числу;

– далее считать, что произведено предварительное преобразование следующего вида:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_i p + b_i\right) = K \cdot p^s \prod_{c=1}^{n-s}\left(a_c p + 1\right).$$

Заключение

При разработке алгоритмов поиска кратных дефектов с использованием смешанных функций чувствительности высоких порядков число различных функций чувствительности одной САУ обычных размеров может достигать сотен или тысяч. Одной из самых емких по временным затратам операций является здесь вычисление коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функций чувствительности. При этом сам числитель или знаменатель есть сумма полиномов, что следует из формул, приведенных в [1]. Их число также способно достигать сотен или тысяч. Поэтому задача диагностирования может быть поставлена в «тупик» из-за объемности временных затрат при вычислениях.

Представленный алгоритм расчета коэффициентов позволяет избежать этой проблемы и дает возможность ежеминутно вычислять полное множество функций чувствительности, – например, 6-го порядка при степени полинома в знаменателе, равной 30 для САУ из 15 блоков и с 6 дефектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абдулаев А.М., Чье Ен Ун, Шалобанов С.В.* Использование чувствительности высоких порядков при диагностировании линейных непрерывных систем // Информатика и системы управления. Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та. 2001. №2. С. 74-78.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Чье Ен Уном.