



Результаты имитационного моделирования показывают достаточно высокую эффективность цифровых алгоритмов настройки ГАСНЭМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
2. Еремин Е.Л., Самохвалова С.Г. Прямое адаптивное управление с настройкой компенсаторов. I. // Информатика и системы управления. Благовещенск. 2002. № 1(3). С. 103-111.
3. Landau I.D. Adaptive Control Systems: the Model Reference Approach. N.Y.: Dekker, 1979.
4. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.
5. Цыкунов А.М. Адаптивное управление объектами с последствием. М.: Наука, 1984.

УДК 681.51

© 2002 г. В.М. Скворцов

(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

ДИСКРЕТНЫЙ H_2 -ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР

Рассматривается задача H_2 -оптимальной оценки состояния линейного дискретного объекта. H_2 -оптимальный фильтр получен как решение вспомогательной задачи оптимального управления. На основе вычислительных экспериментов проводится сравнительный анализ H_2 -оптимального фильтра и фильтра Калмана.

Введение

Задача идентификации состояния линейного объекта хорошо известна в теории управления. Наиболее значимым результатом в этой области является фильтр Калмана [1, 2, 3], который дает линейную по измерениям оценку состояния объекта с минимальной среднеквадратичной ошибкой, если помеха, действующая на объект, – белый шум с известной ковариационной матрицей. Однако характеристики помехи часто бывают неизвестны. В этом случае фильтр Калмана строят по приближенной ковариационной

случае фильтр Калмана строят по приближенной ковариационной матрице, полученной с помощью специального эксперимента; ошибка оценки при этом может существенно увеличиться.

Возможен другой подход к задаче идентификации – построить фильтр (например, H_2 -оптимальный), не используя информацию о помехе. Задачи H_∞ и H_2 -оптимального управления непрерывными объектами были рассмотрены в [4, 5]. В настоящей статье построен H_2 -оптимальный фильтр для оценки состояния линейного дискретного объекта по зашумленным измерениям, приведены результаты имитационного моделирования фильтра Калмана и H_2 -оптимального фильтра в случаях точной и неточной информации о характеристиках помехи.

Предварительные сведения и постановка задачи

Задачи H_2 -оптимальной фильтрации и управления связаны с минимизацией H_2 -нормы передаточной матрицы системы. Пространство RL_2 матриц $F(q)$, элементы которых строго правильные дробно-рациональные функции комплексного переменного q , – это все матрицы, для которых выполняется условие

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{trace} \left[F^T(e^{-i\omega}) F(e^{i\omega}) \right] d\omega < \infty.$$

Величина $\|F\|_2$ является H_2 -нормой матрицы $F(q)$ в пространстве RL_2 .

Следующее утверждение дает способ вычисления H_2 -нормы передаточной матрицы линейной системы, заданной разностными уравнениями в пространстве состояний. Пусть система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t, \\ z_t &= C_1 x_t, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_t \in R^n$ – состояние системы; $w_t \in R^m$ – действующее на систему возмущение; $z_t \in R^r$ – выход; A , B_1 , C_1 – вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Будем называть квадратную матрицу устойчивой, если все ее собственные значения лежат строго внутри единичного круга комплексной плоскости. Систему (1) считаем устойчивой, если устойчива ее матрица A .

Утверждение 1. Если матрица A устойчива, то H_2 -норма передаточной матрицы $F(q) = C_1(Iq - A)^{-1}B_1$ системы (1) может быть найдена по формулам:

$$\|F\|_2^2 = \text{trace}(B_1^T P_C B_1) = \text{trace}(C_1 P_B C_1^T),$$

где $P_C = \sum_{t=1}^{\infty} A^{t-1T} C_1^T C_1 A^{t-1}$, и $P_B = \sum_{t=1}^{\infty} A^{t-1} B_1 B_1^T A^{t-1T}$, являются, соответст-

венно, решениями уравнений Ляпунова

$$A^T X A - X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2)$$

$$A X A^T - X + B_1 B_1^T = 0. \quad (3)$$

Доказательства этого и следующих утверждений приведены в приложении к статье. Аналогичные утверждения для непрерывных систем содержатся в [3, 5].

Как видно из доказательства утверждения 1, квадрат H_2 -нормы передаточной матрицы линейной системы с одним входом соответствует суммарной энергии отклика на единичный импульс.

Теперь сформулируем основную задачу данной работы.

Постановка задачи. Пусть объект описывается уравнениями

$$x_{t+1} = A x_t + B_1 w_t, \quad (4)$$

$$y_t = C_2 x_t + D_2 w_t,$$

где $y_t \in R^k$ – измерения. Будем считать начальные условия нулевыми: $x_0 = 0$. Задача H_2 -оптимальной фильтрации состоит в том, чтобы получить оценку x_t состояния объекта (4) как выход фильтра, описываемого уравнениями

$$\xi_{t+1} = F \xi_t + G y_t, \quad (5)$$

$$x_t = H \xi_t + E y_t.$$

с нулевыми начальными условиями $\xi_0 = 0$. Матрицы F , G , H , E должны быть такими, чтобы объединенная система (4), (5) была устойчива, ее передаточная матрица $T(q)$ от помехи w_t к ошибке оценки

$$z_t = x_t - \hat{x}_t \quad (6)$$

принадлежала к пространству RL_2 и обладала минимальной H_2 -нормой. Так как $T(q) \in RL_2$, все ее элементы должны быть строго правильными рациональными функциями, следовательно $ED_2 = 0$. Для удобства будем называть уравнения (4), (6) объектом, а уравнения (5) – фильтром. Таким образом, H_2 -оптимальный фильтр (5) должен дать оценку состояния объекта (4), (6) с минимальной “энергией” ошибки.

Для решения поставленной задачи используем результаты теории H_2 -оптимального управления. Задача H_2 -оптимального управления объектом P , который представлен уравнениями

$$x_{t+1} = A x_t + B_1 w_t + B_2 u_t$$

$$z_t = C_1 x_t + D_1 u_t \quad (7)$$

$$y_t = C_2 x_t + D_2 w_t,$$

состоит в поиске регулятора R , описываемого уравнениями

$$\xi_{t+1} = F \xi_t + G y_t, \quad u_t = H \xi_t + E y_t, \quad (8)$$

– такого, чтобы замкнутая система (7), (8) была устойчива, ее передаточ-

ная матрица $T(q)$ от w_t к z_t (рис. 1) принадлежала к пространству RL_2 и обладала минимальной H_2 -нормой. Будем называть уравнения (8) регулятором.

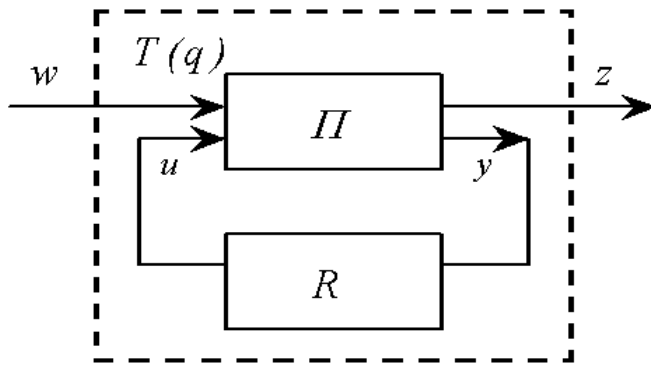


Рис.

Если в уравнениях (7) A устойчива, $B_2=0$, $C_1=-I$, $D_1=I$, то H_2 -оптимальное управление обеспечивает “малость” выхода $z_t = -x_t + u_t$. Управление u_t в данном случае фактически является H_2 -оптимальной оценкой состояния объекта (7), совпадающего с (4), (6), а соответствующий H_2 -оптимальный регулятор играет роль H_2 -оптимального фильтра.

Таким образом, будем искать H_2 -оптимальный фильтр (5), решая задачу H_2 -оптимального управления для объекта

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t \\ z_t &= -x_t + u_t \\ y_t &= C_2 x_t + D_2 w_t. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем будет показано, что решение этой задачи может быть получено на основе решений задач H_2 -оптимального управления для объектов с измеряемым состоянием и с измеряемой помехой, с использованием следующих вспомогательных результатов.

H_2 -оптимальное управление при измеряемом состоянии

Утверждение 2. Если объект (7) удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} C_2 = I, D_2 = 0 \text{ (т.е. измеряется состояние объекта } y_t = x_t); \\ \text{пара } (A, B_2) \text{ стабилизируема,} \end{aligned} \quad (10)$$

$$D_1^T D_1 = I, C_1^T D_1 = 0, \quad (11)$$

то регулятор

$$u_t = Kx_t, K = -(I + B_2^T P B_2)^{-1} B_2^T P A, \quad (12)$$

где $P = P^T \geq 0$ – решение уравнения Риккати

$$P = A^T P A - A^T P B_2 (I + B_2^T P B_2)^{-1} B_2^T P A + C_1^T C_1, \quad (13)$$

является H_2 -оптимальным для этого объекта, а H_2 -норма передаточной матрицы $T(q)$ замкнутой системы (7), (12) вычисляется по формуле

$$\|T\|_2 = \sqrt{\text{trace}(B_1^T P B_1)}.$$

Управление объектом с измеряемой помехой

Следующее утверждение позволяет разбить задачу управления объектом с измеряемой помехой (обозначим его P_w) на две подзадачи: вычисление состояния объекта P_w с помощью наблюдателя и затем вычисление управления по полученной информации с помощью регулятора, построенного для объекта с измеряемым состоянием.

Пусть устойчивый объект P_w описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_1 u_t, \end{aligned} \tag{14}$$

$$y_t = w_t.$$

Построим для него наблюдатель состояния O :

$$\begin{aligned} \zeta_{t+1} &= A\zeta_t + B_1 y_t + B_2 u_t, \\ \tilde{y}_t &= \zeta_t. \end{aligned} \tag{15}$$

Введем объект P_x с измеряемым состоянием, первые два уравнения которого совпадают с соответствующими уравнениями

$$\begin{aligned} (14) \\ \tilde{x}_{t+1} &= A\tilde{x}_t + B_1 \tilde{w}_t + B_2 \tilde{u}_t, \\ \tilde{z}_t &= C_1 \tilde{x}_t + D_1 \tilde{u}_t, \\ \tilde{y}_t &= \tilde{x}_t. \end{aligned} \tag{16}$$

Если R_x – произвольный регулятор вида (8) для P_x , а R_w – регулятор, полученный из наблюдателя O и регулятора R_x , связанных обратной связью (см. рис. 2.), то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть $T(q)$ – передаточная матрица от w_t к z_t замкнутой системы P_w, R_w , а $\tilde{T}(q)$ – передаточная матрица от \tilde{w}_t к \tilde{z}_t замкнутой системы P_x, R_x . Тогда $T(q) = \tilde{T}(q)$.

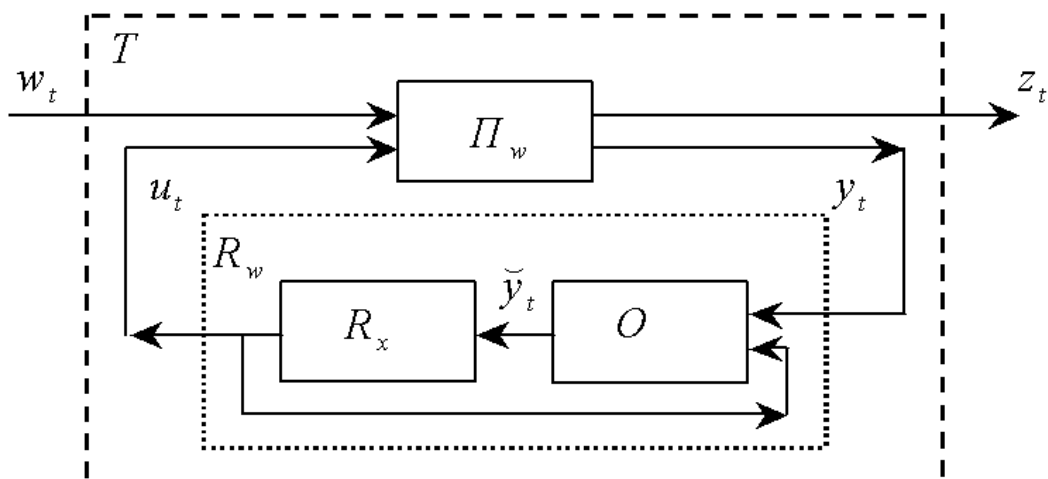


Рис. 2.

Транспонированные системы

Назовем объект

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1} &= A^T \bar{x}_t + C_1^T \bar{w}_t + C_2^T \bar{u}_t, \\ \bar{z}_t &= B_1^T \bar{x}_t + D_2^T \bar{u}_t, \\ \bar{y}_t &= B_2^T \bar{x}_t + D_1^T \bar{w}_t\end{aligned}\tag{17}$$

транспонированным по отношению к (7), а регулятор

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{t+1} &= F^T \bar{\xi}_t + H^T \bar{y}_t, \\ \bar{u}_t &= G^T \bar{\xi}_t + E^T \bar{y}_t\end{aligned}\tag{18}$$

транспонированным по отношению к (8).

Утверждение 4. Пусть $T(q)$ передаточная матрица от w_t к z_t замкнутой системы (7), (8), а $\bar{T}(q)$ – передаточная матрица от \bar{w}_t к \bar{z}_t замкнутой системы (17), (18). Тогда $\bar{T}(q) = T^T(q)$ и $\|T\|_2 = \|\bar{T}\|_2$.

Построение H_2 -оптимального фильтра

Как было показано выше, чтобы найти H_2 -оптимальный фильтр, необходимо решить задачу H_2 -оптимального управления объектом (9). Сведем эту задачу к H_2 -оптимальному управлению объектом с измеряемым состоянием. С этой целью вначале покажем, что регулятор для (9) можно найти, решив задачу H_2 -оптимального управления некоторым объектом с измеряемой помехой.

Рассмотрим объект, транспонированный по отношению к (9)

$$\begin{aligned}\bar{x}_{t+1} &= A^T \bar{x}_t - \bar{w}_t + C_2^T \bar{u}_t, \\ \bar{z}_t &= B_1^T \bar{x}_t + D_2^T \bar{u}_t, \\ \bar{y}_t &= \bar{w}_t,\end{aligned}\tag{19}$$

который является объектом с измеряемой помехой. Предположим, что известен H_2 -оптимальный регулятор для этого объекта

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{t+1} &= \bar{F}^T \bar{\xi}_t + \bar{H}^T \bar{y}_t, \\ \bar{u}_t &= \bar{G}^T \bar{\xi}_t + \bar{E}^T \bar{y}_t.\end{aligned}\tag{20}$$

Тогда, согласно утверждению 4, H_2 -оптимальный регулятор для (9) будет транспонированным по отношению к (20), так как H_2 -нормы соответствующих замкнутых систем совпадают.

В свою очередь, согласно утверждению 3, H_2 -оптимальный регулятор (20) для объекта с измеряемой помехой (19) – это регулятор R_w , изображенный на рис. 2, где R_x – H_2 -оптимальный регулятор для объекта с измеряемым состоянием

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{t+1} &= A^T \tilde{x}_t - \tilde{w}_t + C_2^T \tilde{u}_t, \\
\tilde{z}_t &= B_1^T \tilde{x}_t + D_2^T \tilde{u}_t, \\
\tilde{y}_t &= \tilde{x}_t,
\end{aligned} \tag{21}$$

а O – наблюдатель состояния объекта (19), описываемый уравнениями

$$\begin{aligned}
\bar{\varsigma}_{t+1} &= A^T \bar{\varsigma}_t - \bar{y}_t + C_2^T \bar{u}_t, \\
\bar{y}_t &= \bar{\varsigma}_t.
\end{aligned} \tag{22}$$

Транспонируя полученный регулятор (20), найдем H_2 -оптимальный регулятор для объекта (9), совпадающий с искомым H_2 -оптимальным фильтром.

Таким образом, задача H_2 -оптимальной фильтрации решена и доказана основная теорема данной работы. Сформулируем ее, считая $x_t = u_t$.

Теорема. Пусть в объекте

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t, \\
z_t &= x_t - x_t, \\
y_t &= C_2 x_t + D_2 w_t,
\end{aligned}$$

матрица A устойчива, $D_2 D_2^T = I$, $B_1 D_2^T = 0$. Тогда, если существует симметрическая неотрицательно определенная матрица S , решение уравнения Риккати

$$S = ASA^T - ASC_2^T (I + C_2 SC_2^T)^{-1} C_2 SA^T + B_1 B_1^T, \tag{23}$$

H_2 -оптимальный фильтр (5) определяется уравнениями

$$\begin{aligned}
\xi_{t+1} &= (A + LC_2) \xi_t + Ly_t, \\
x_t &= -\xi_t,
\end{aligned} \tag{24}$$

где $L = -ASC_2^T (I + C_2 SC_2^T)^{-1}$.

Замечание 1. Исключив ξ_t из уравнений (24), получим

$$x_{t+1} = Ax_t - L(y_t - C_2 x_t). \tag{25}$$

Замечание 2. Задача H_2 -оптимальной оценки состояния объекта, для которого не выполнены условия $D_2 D_2^T = I$, $B_1 D_2^T = 0$, в случае, если $D_2 D_2^T > 0$, может быть сведена к описанной выше процедуре построения H_2 -оптимального регулятора для некоторого вспомогательного объекта.

Моделирование

Сравним оценки H_2 -оптимального фильтра и фильтра Калмана с помощью вычислительного эксперимента.

Если известно, что помеха, действующая на объект (4), – белый шум w_t с ковариационной матрицей P_w , то стационарный фильтр Калмана описывается уравнением (25) [1, 2], где

$$L = -AS_k C_2^T (D_2 P_w D_2^T + C_2 S_k C_2^T)^{-1},$$

$$S_k = AS_k A^T - AS_k C_2^T (D_2 P_w D_2^T + C_2 S_k C_2^T)^{-1} C_2 S_k A^T + B_1 P_w B_1^T.$$

Будем сравнивать оценки по их предельным ковариационным матрицам $P_X = \lim_{t \rightarrow \infty} M(x_t - x_t)(x_t - x_t)^T$ (обозначим их P_K – для фильтра Калмана и P_H – для H_2 -оптимального фильтра). Нетрудно проверить, что матрицы P_K и P_H в случае, если помеха, действующая на объект (4), – белый шум v_t с ковариационной матрицей P_v , определяются из уравнения Ляпунова

$$P = (A + LC_2)P(A + LC_2)^T + (B_1 + LD_2)P_v(B_1 + LD_2)^T$$

при соответствующих L .

Для объекта (4), в котором

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.99 & 0.7 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = (1 \quad 1), D_2 = (0 \quad 1),$$

построим фильтр Калмана, предполагая, что

$$P_w = \begin{pmatrix} 0.36 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Если ковариационная матрица помехи действительно равна P_w , то

$$P_K = \begin{pmatrix} 0.0264 & 0.036 \\ 0.036 & 0.4161 \end{pmatrix}, \quad P_H = \begin{pmatrix} 0.0941 & 0.1087 \\ 0.1087 & 0.5098 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что оценка фильтра Калмана лучше, так как $P_K < P_H$. Результаты моделирования, подтверждающие это, представлены на рис.3, где изображены графики ошибок оценок первой компоненты состояния объекта (фильтр Калмана – Kx1, H_2 -оптимальный фильтр – H2x1).

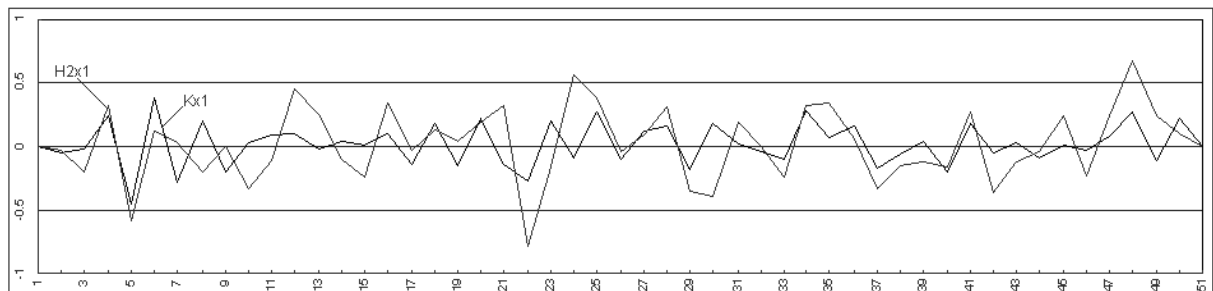


Рис. 3.

Если же информация о помехе неточна, ковариационная матрица помехи, реально действующей на объект, не совпадает с P_w и равна, например,

$$\begin{pmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{pmatrix}, \text{ то } P_K = \begin{pmatrix} 0.1367 & 0.1592 \\ 0.1592 & 0.3229 \end{pmatrix}, P_H = \begin{pmatrix} 0.0522 & 0.0425 \\ 0.0425 & 0.1519 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $P_K > P_H$ и, следовательно, H_2 -оптимальная оценка лучше.

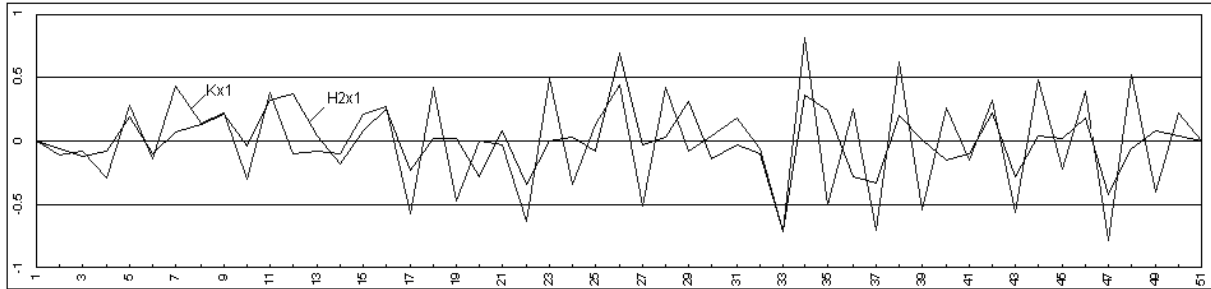


Рис. 4.

Заключение

В настоящей статье поставлена и решена задача H_2 -оптимальной оценки состояния линейного дискретного объекта. С помощью имитационного моделирования проведено сравнение H_2 -оптимального фильтра и фильтра Калмана в условиях неточной информации о характеристиках помехи. Как видно из приведенного примера, если ковариационная матрица помехи неизвестна, использование H_2 -оптимального фильтра может оказаться более эффективным способом решения задачи идентификации состояния линейного объекта, чем уточнение характеристик помехи и построение фильтра Калмана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1.

Рассмотрим передаточную функцию системы с одним входом и одним выходом $F_1(q) = \sum_{t=1}^{\infty} f_t q^t$, где $\{f_t\}$ – импульсная реакция системы, т.е. выход при входе, равном единичному импульсу $\{w_t\} = \delta_0(t) = \{1, 0, 0, \dots\}$. Считая, что $f_t = 0$ при $t \leq 0$, определим следующее преобразование последовательности $\{f_t\}$:

$$\{f_t\} \rightarrow F_1(e^{-i\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f_t e^{-i\omega t}. \quad (26)$$

$F_1(e^{-i\omega})$ – комплекснозначная функция действительного аргумента ω , периодическая с периодом 2π . Разложим ее в ряд Фурье

$$F_1(e^{-i\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \bar{f}_t e^{-i\omega t},$$

где коэффициенты разложения

$$\bar{f}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{-i\omega}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Из теории рядов Фурье [6] известно:

1) если ряд $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |g_t|$ сходится, то ряд $\sum_{t=-\infty}^{\infty} g_t e^{-ixt}$ сходится равномерно по x на всей числовой прямой;

2) если ряд $\sum_{t=-\infty}^{\infty} g_t e^{-ixt}$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к $g(x)$, то

$$g_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{ixt} dx.$$

Таким образом, если система устойчива (т.е. все полюса $F_1(q)$ лежат строго внутри единичного круга), то:

$$f_t = \bar{f}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{-i\omega}) e^{i\omega t} d\omega;$$

для преобразования (26) выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} f_t^2 = \sum_{t=0}^{\infty} f_t^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{-\omega t}) F_1(e^{\omega t}) d\omega,$$

в котором правая часть – это H_2 -норма передаточной функции $F_1(q)$.

Рассмотрим далее систему с векторным входом и выходом $z_t = F(q)w_t$, где w_t – вектор размерности m , а z_t – вектор размерности r . Выберем m входов $w_k(t) = (0 \dots \delta_0(t) \dots 0)^T$, где $\delta_0(t)$ находится в k -й строке $k = 1, \dots, m$. Пусть $z_k(t) = (f_{1k}(t) \dots f_{rk}(t))^T = C_1 A^{t-1} B_1 \bar{e}_k$ – реакция системы на k -й вход (здесь $\bar{e}_k = (0 \dots 1 \dots 0)^T$ – вектор с единицей в k -й строке). Тогда, применив покомпонентно преобразование (26) к $z_k(t)$, найдем образ $Z_k(\omega) = F(e^{-i\omega}) \bar{e}_k$. Далее по определению H_2 -нормы, с использованием равенства Парсеваля и свойств следа матрицы получим

$$\begin{aligned} \|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{trace} \left[F^T(e^{i\omega}) F(e^{-i\omega}) \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{trace} \left[\sum_{k=1}^m \bar{e}_k^T F^T(e^{i\omega}) F(e^{-i\omega}) \bar{e}_k \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^m Z_k^* Z_k d\omega = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z_k^* Z_k d\omega = \sum_{k=1}^m \sum_{t=0}^{\infty} z_k^T(t) z_k(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} \text{trace} \left[\bar{e}_k^T B_1^T A^{l-1T} C_1^T C_1 A^{l-1} B_1 \bar{e}_k \right] = \text{trace} \left[\sum_{t=0}^{\infty} A^{t-1T} C_1^T C_1 A^{t-1} \sum_{k=0}^m B_1 \bar{e}_k \bar{e}_k^T B_1^T \right] = \\
&= \text{trace} \left[B_1^T \sum_{t=0}^{\infty} A^{t-1T} C_1^T C_1 A^{t-1} B_1 \right] = \text{trace} \left[C_1 \sum_{t=0}^{\infty} A^{t-1} B_1 B_1^T A^{t-1T} C_1^T \right].
\end{aligned}$$

Известно [1, 5], что $\sum_{t=0}^{\infty} A^{t-1T} C_1^T C_1 A^{t-1}$ и $\sum_{t=0}^{\infty} A^{t-1} B_1 B_1^T A^{t-1T}$ – решения уравнений (2) и (3), что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2.

Докажем утверждение, используя решение следующей линейно квадратичной стохастической задачи оптимального управления рассматриваемым объектом (обозначим его P_x). Задача заключается в поиске регулятора (8) такого, что замкнутая система устойчива, а функционал качества (в котором под u понимается вся последовательность $\{u_t\}$)

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} M(x_t^T C_1^T C_1 x_t + u_t^T u_t) \quad (27)$$

принимает минимальное значение, если известно, что возмущение, действующее на систему – белый шум $Mw_t = 0$, $Mw_t w_t^T = I$, $Mw_t w_k^T = 0$ при $t \neq k$. Ее решение хорошо известно [1, 7] и в данном случае совпадает с (12), (13). Покажем теперь, что функционал (27) равен квадрату H_2 -нормы передаточной матрицы замкнутой системы для любого регулятора (8), при котором она устойчива. Пусть A_- , B_- , C_- , D_- – матрицы этой системы (обозначим ее T_-), тогда $z_t = \sum_{\tau=1}^t A_-^{\tau-1} B_- w_{t-\tau}$. Учитывая

условия (10), (11) и используя свойства пределов, следа матрицы и белого шума, получим

$$\begin{aligned}
J_- &= \lim_{t \rightarrow \infty} M \text{trace}(z_t z_t^T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{trace} \left(C_- \sum_{\tau=1}^t \sum_{\nu=1}^t A_-^{\tau-1} B_- M w_{t-\tau} w_{t-\nu}^T B_-^T A_-^{\nu-1T} C_-^T \right) = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{trace} \left(C_- \sum_{\tau=1}^t A_-^{\tau-1} B_- B_-^T A_-^{\tau-1T} C_-^T \right) = \text{trace} \left(C_- \sum_{\tau=1}^{\infty} A_-^{\tau-1} B_- B_-^T A_-^{\tau-1T} C_-^T \right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение, согласно утверждению 1, равно квадрату H_2 -нормы передаточной матрицы замкнутой системы T_- . Таким образом, если помеха – белый шум и в качестве регулятора выбрать (12), то H_2 -норма, как и критерий (27), будет иметь минимальное значение. Так как H_2 -норма передаточной матрицы не зависит от свойств помехи, то регулятор (12) будет H_2 -оптимальным. Пункт 1 доказан.

Непосредственной подстановкой матрицы P , удовлетворяющей уравнению (13), можно убедиться, что она является также решением уравнения

Ляпунова замкнутой системы с регулятором (12). Следовательно, согласно утверждению 1 $\|T\|_2^2 = \text{tr}(B_1^T P B_1)$, утверждение полностью доказано.

Доказательство утверждения 3.

Запишем уравнения замкнутой системы (14), (15), (8), исключив из них переменные y_t , \tilde{y}_t и u_t в соответствии с рис. 2,

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 (F \xi_t + G \zeta_t), \\ \zeta_{t+1} &= A \zeta_t + B_1 w_t + B_2 (F \xi_t + G \zeta_t), \\ \xi_{t+1} &= F \xi_t + G \zeta_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_1 (F \xi_t + G \zeta_t).\end{aligned}$$

Рассмотрим величину $\varepsilon_t = x_t - \zeta_t$, которая, как следует из первых двух уравнений, удовлетворяет уравнению $\varepsilon_{t+1} = A \varepsilon_t$. Так как $x_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$, а матрица A устойчива, то можем считать $\varepsilon_t \equiv 0$, т.е. $x_t \equiv \zeta_t$. Первые два уравнения совпадают, и система принимает вид

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= (A + B_2 G)x_t + B_2 F \xi_t + B_1 w_t, \\ \xi_{t+1} &= F \xi_t + G x_t, \\ z_t &= (C_1 + D_1 G)x_t + D_1 F \xi_t.\end{aligned}\tag{28}$$

Далее, исключив из системы уравнений (16), (8) \tilde{y}_t и \tilde{u}_t , получим систему, совпадающую с (28). Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 4.

Замкнутая система (7), (8) является системой вида (1) с состоянием $x_t^* = \begin{pmatrix} x_t^T & \xi_t^T \end{pmatrix}^T$, матрицами

$$\begin{aligned}A_* &= \begin{pmatrix} A + B_2 E C_2 & B_2 H \\ G C_2 & F \end{pmatrix}, & B_* &= \begin{pmatrix} B_1 + B_2 E D_2 \\ G D_2 \end{pmatrix}, \\ C_* &= (C_1 + D_1 E C_2 \quad D_1 H), & D_* &= (D_1 E D_2)\end{aligned}$$

и передаточной матрицей $T(q) = C_* (Iq - A_*)^{-1} B_* + D_*$.

Аналогично, замкнутая система (17), (18) – это система (1) с матрицами

$$\begin{aligned}\bar{A}_* &= \begin{pmatrix} A^T + C_2^T E^T B_2^T & C_2^T G^T \\ H^T B_2^T & F^T \end{pmatrix}, & \bar{B}_* &= \begin{pmatrix} C_1^T + C_2^T E^T D_1^T \\ H^T D_{12}^T \end{pmatrix}, \\ \bar{C}_* &= (B_1^T + D_2^T E^T B_2^T \quad D_2^T G^T), & \bar{D}_* &= (D_2^T E^T D_1^T)\end{aligned}$$

и передаточной матрицей $\bar{T}(q) = \bar{C}_* (Iq - \bar{A}_*)^{-1} \bar{B}_* + \bar{D}_*$.

Нетрудно заметить, что $\bar{A}_* = A_*^T$, $\bar{B}_* = C_*^T$, $\bar{C}_* = B_*^T$, $\bar{D}_* = D_*^T$ – следовательно, $\bar{T}(q) = T^T(q)$ и $\|T\|_2 = \|\bar{T}\|_2$. Утверждение доказано.



ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М: Мир, 1969.
2. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. Söderström T., Stoica P. System identification. © 1989 Prentice Hall International (UK) Ltd, University Press, Cambridge.
4. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems // IEEE Trans. Auto. Contr. AC-34. 1989. P.831-847.
5. Барабанов А.Е., Первозванский А.А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям // АиТ. 1992. №9. С.3-32.
6. Colaneri P., Geromel J.C., Locatelli A. Control theory and design: RH_2 and RH_∞ viewpoint // Academic Press, 1997.
7. Власова Е.А. Ряды. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М: Мир, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Коганом.

УДК 681.51

© 2002 г. **Л.В. Чепак**

(Амурский государственный университет, Благовещенск)

АДАПТИВНОЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ В СИСТЕМАХ С ЯВНЫМ ЭТАЛОНОМ

Рассматривается задача синтеза адаптивной системы управления для объектов с запаздыванием по управлению с использованием явной эталонной модели и дополнительного контура, так называемого прогнозирующего устройства, обладающих простой структурой.

Введение

В последнее время в задачах построения систем управления для объектов с запаздыванием особое внимание уделяется тем подходам, которые основаны на использовании компенсации запаздывания в объекте [1-4]. В ча-