УДК 681.51

© 2004 г. **Е.Л. Еремин,** д-р техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЯВНО-НЕЯВНОЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ ДЛЯ СТРОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА

Рассматривается синтез алгоритмов параметрической самонастройки адаптивного регулятора в схемах управления скалярным объектом без измерения его переменных состояния и с эталонной моделью имеющей первый порядок.

Введение

Исследование задачи управления динамическим SISO-объектом (single input – single output)[1], функционирующим в условиях априорной неопределенности, является весьма распространенной [1]. При разработке систем автоматического управления для таких объектов часто используются явные эталонные модели и схемы расширения ошибок слежения. Известно [2], что общим недостатком последних является их существенная структурная сложность.

В данной работе исследуется проблема синтеза адаптивных алгоритмов системы управления строго-минимально фазовым объектом со структурой, обладающей минимальной сложностью. Далее будем полагать, аналогично [3], что передаточная функция объекта

$$W(s) = \alpha(s)/\beta(s) \qquad (1)$$

является строго минимально-фазовой только тогда, когда $\deg\alpha(s) = (n-1)$ и $\alpha(s)$ – гурвицев (устойчивый) многочлен с положительными коэффициентами, а $\deg\beta(s) = n$, где deg – значение порядка соответствующего многочлена; s – комплексная переменная.

При построении системы управления используются: во-первых, яв-

[1] Объект с одним входом и одним выходом или скалярный объект.

но-неявная эталонная модель (ЯНЭМ) с простой структурой динамического звена – апериодическое 1-го порядка [4]; во-вторых, фильтр переменных состояния минимального – $(n-1)$-го порядка, в частности, состоящий из последовательного соединения упругих звеньев.

Эквивалентные формы матописания объекта

Пусть строго минимально-фазовый объект управления описывается уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = L^T x(t), \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния; $y(t) \in R$ и $u(t) \in R$ – скалярные выход и вход; A и B, L – матрица состояния и векторы соответственно управления и выхода следующей структуры:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad b > 0, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_{n-1} \\ l_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Поскольку передаточную функцию объекта (2) можно представить в виде

$$W_0(s) = L^T (sE - A)^{-1} B,$$

где E – единичная матрица размера $(n\text{x}\,n)$, то, следовательно, с учетом соотношения (1), можно записать известные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= L^T (sE - A)^{+} B, \\ \beta(s) &= \det(sE - A), \end{aligned} \tag{4}$$

где верхний индекс $(.)^+$ – обозначение соответствующей присоединенной матрицы.

Если значения элементов вектора L известны, то для объекта (2) всегда можно желаемым образом сформировать фильтр его переменных состояния, в частности, задать с передаточной функцией

$$W_ф(s) = \frac{\alpha(s)}{\alpha(s)} = 1. \tag{5}$$

Таким образом, в силу существования тождеств

$$W_0(s) = W_1(s), \tag{6}$$

$$W_1(s) = W_0(s) W_ф(s), \tag{7}$$

формы матописания объекта управления с помощью передаточных функций $W_0(s)$ и $W_1(s)$ можно считать эквивалентными.

При этом в векторно-матричной форме записи матописанию объекта с передаточной функцией (7) будет соответствовать система уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = L^T x(t),$$
$$\frac{dx_{ф}(t)}{dt} = Mx_{ф}(t) + Ny(t), \quad y_{ф}(t) = C^T x_{ф}(t) + Dy(t),\ x(t) \cong x_{ф}(t), \tag{8}$$

полностью эквивалентная уравнениям (2), поскольку матрица M, векторы N, C и скаляр D формируются в силу выполнения условия

$$L^T \left(sE - A\right)^+ B = C^T \left(sE - M\right)^+ N + D\det(sE - M) = \det(sE - M). \tag{9}$$

Здесь важно то, что элементы вектора состояния $x(t)$, которые недоступны измерению, заменены точными оценками $x_{ф}(t)$. Это позволяет, обоснованно применять эквивалентные матописания объекта (2). Например, при решении задач синтеза систем управления это следующие уравнения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = L^T x(t),\ x(t) = x_{ф}(t), \tag{10}$$

а при решении вопросов технической реализации системы управления, в частности при построении контура параметрической самонастройки адаптивного регулятора, – уравнения вида (8).

Постановка задачи

В начале рассмотрим задачу адаптивного управления объектом (2), (3) в предположении, что его функционирование протекает в условиях априорной неопределенности вида

$$A = A(\xi), \quad b = b(\xi) > 0, \quad \xi \in \Xi, \tag{11}$$

где ξ – любой набор значений неизвестных параметров из известного множества Ξ, границы которого зависят только от физических ограничений, накладываемых на действительные значения параметров объекта.

Требуется для объекта управления с матописанием (2) или (10) при заданной структуре адаптивного регулятора

$$u(t) = k(t)r(t) + \chi^T(t)x_{ф}(t), \tag{12}$$

где $r(t) \in R$ – задающее воздействие; $k(t) \in R$ и $\chi(t) \in R^n$ – скаляр и вектор настраиваемых параметров, синтезировать алгоритмы контура настройки регулятора таким образом, чтобы в условиях априорной неопределенности (11), при любых начальных значениях $x(0)$, $k(0)$ и $\chi(0)$, обеспечивалось совпадение траекторий движения объекта управления и ЯНЭМ, описываемой уравнением

$$\frac{dz_m(t)}{dt} = a_0 z_m(t) + b_0 r(t), \quad y_m(t) = z_m(t), \tag{13}$$

где $z_m(t) \in R$ – переменная состояния (выход); a_0 и b_0 – желаемые значения параметров эталона, а также гарантировалось бы выполнение следующих целевых условий:

$$\lim_{t\to\infty}(x_m(t)-x(t))=0,$$
$$\lim_{t\to\infty}k(t)=k_0=const,\quad \lim_{t\to\infty}\chi(t)=\chi_0=const, \tag{14}$$
где $x_m(t)\in R^n$ – расширенный вариант вектора состояния ЯНЭМ, построенный с учетом уравнений (2), (13) и аналогично [4].

Отметим, что если для уравнения (13) записать передаточную функцию ЯНЭМ, то ее можно представить следующим образом:
$$W_m(s)=\frac{b_0}{s-a_0}=\frac{b_0}{s-a_0}\cdot\frac{L^T(sE-A)^+B}{L^T(sE-A)^+B}=\frac{L^T(sE-A_m)^+B_m}{\det(sE-A_m)}, \tag{15}$$
где используются матрица A_m и вектор B_m, позволяющие переписать уравнение (13) в эквивалентном виде
$$\frac{dx_m(t)}{dt}=A_m x(t)+B_m r(t),\quad y_m(t)=L^T x_m(t), \tag{16}$$
т.е. с переменной состояния, входящей в первое из целевых условий (14).

Разработка адаптивной системы управления

Полагая выполненными условия структурного согласования
$$B_m=k_0B,\quad A_m-A=B\chi_0, \tag{17}$$
что с учетом соотношений (10), (12) и (16) является вполне очевидным, осуществим построение алгоритмов настройки адаптивного регулятора (12), опираясь на последовательность стандартных этапов синтеза [5].

Первый этап. Если отклонение значений векторов состояний ЯНЭМ и объекта обозначить как
$$e(t)=x_m(t)-x(t), \tag{18}$$
то для совокупности уравнений (10), (12), (16) – (17) можно получить следующую эквивалентную систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{de(t)}{dt}=A_m e(t)+B\mu(t),\quad v(t)=L^T e(t)=z_m(t)-y(t),\\ \mu(t)=-(k(t)-k_0)r(t)-(\chi(t)-\chi_0)^T x_ф(t).\end{cases} \tag{19}$$

Второй этап. Поскольку передаточная функция линейной стационарной части системы (19) описывается выражением
$$W_{ЛСЧ}(s)=L^T(sE-A_m)^{-1}B, \tag{20}$$
то с учетом соотношений (3), (15) ее можно привести к виду
$$W_{ЛСЧ}(s)=\frac{b}{s-a_0},$$
из которого выполнение частотного неравенства
$$\operatorname{Re}W_{ЛСЧ}(j\omega)=\operatorname{Re}\left(\frac{b}{j\omega-a_0}\right)>0,\ \forall\omega>0 \tag{21}$$

очевидно в силу существования условий $b > 0$ и $a_0 < 0$. Таким образом, вещественная характеристика линейной стационарной части системы (19) является строго положительно-определенной.

Третий этап. Рассмотрим присоединенную систему, т.е. дополним матописание вида (19) интегралом

$$\eta(0,t) = -\int_0^t \mu(\upsilon)\nu(\upsilon)d\upsilon, \tag{22}$$

который, учитывая явный вид функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$, перепишется следующим образом:

$$\eta(0,t) = \int_0^t \Big(\big(k(\upsilon) - k_0\big)\, r(\upsilon) + \big(\chi(\upsilon) - \chi_0\big)^T x_{ф}(\upsilon)\Big)\big(z_m(\upsilon) - y(\upsilon)\big)\, d\upsilon\,. \tag{23}$$

Можно показать, например, следуя [5], что алгоритмы адаптации, синтезированные в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dk(t)}{dt} = h\, r(t)\big((z_m(t) - y(t)\big),\ h = const > 0, \\ &\frac{d\chi(t)}{dt} = H\, x_{ф}(t)\big((z_m(t) - y(t)\big),\ H = H^T = const > 0, \end{aligned} \tag{24}$$

будут обеспечивать интегралу (23) существование следующей оценки:

$$\begin{aligned} &\eta(0,t) > -0.5\Big(\big(k(0) - k_0\big)^2 + \big(\chi(0) - \chi_0\big)^T H^{-1}\big(\chi(0) - \chi_0\big)\Big) = const, \\ &\forall t > 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Четвертый этап. Из предыдущих этапов синтеза в силу выполнения неравенств (21) и (25) следует, что система (19), (24) является асимптотически гиперустойчивой, и тогда первое из предельных соотношений в (14) имеет место. В свою очередь это приводит к тому, будет существовать предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} L^T (x_m(t) - x(t)) = \lim_{t \to \infty} (z_m(t) - y(t)) = 0, \tag{26}$$

из которого непосредственно следует выполнение второго и третьего целевых условий в (14).

Поскольку выполнение целевых условий (14) достижимо для системы (19), (20) при любых $\xi \in \Xi$, то согласно критерию гиперустойчивости [5] они достижимы и для эквивалентной системы (3), (8), (12), (13), (24). Кроме того, аналогично [6], обе системы могут считаться адаптивными в заданном классе Ξ.

Модификация адаптивной системы управления (3), (8), (12), (13), (24) при расширении уровня априорной неопределенности

Рассмотрим функционирование строго минимально-фазового объекта (2) в условиях априорной неопределенности вида

$$A = A(\xi),\quad b = b(\xi) > 0,\quad L = L(\xi),\ \ \xi \in \Xi\,. \tag{27}$$

Отличие уровня априорной неопределенности (27) от уровня (11) очевидно, но с точки зрения технической реализации системы управления (2), (3), (12), (13), (24) особенность уровня (27) состоит в том, что он не позволяет построить фильтр переменных состояния в виде (5) и выполнить требование (9), так как элементы вектора L теперь неизвестны. Решить эту проблему можно, например, за счет идентификации параметров вектора L, но есть и более простой путь.

Покажем, что с помощью изменения базиса пространства состояний фильтр переменных состояния объекта управления (2) можно всегда построить в виде

$$\overline{W}_{\phi}(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(s)} = 1, \quad \gamma(s) = G^T \left(sE - \overline{A}\right)^{+} \overline{B}, \tag{28}$$

где G – n-мерный *произвольно выбранный* числовой вектор с положительными коэффициентами, причем такой, что многочлен $\gamma(s)$ степени $(n-1)$ – гурвицев; $\overline{A}$, $\overline{B}$ – некоторые матрица и вектор, линейно связанные с A и B.

Действительно, поскольку всегда найдется некоторая диагональная матрица

$$Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}, \ \det Q \neq 0, \ Q = Q^T > 0, \tag{29}$$

причем такая, что для любого вектора L, удовлетворяющего условиям априорной неопределенности (27), будет обеспечиваться выполнение условий

$$G = QL, \ G^T = L^T Q, \tag{30}$$

то, используя замену

$$x(t) = Q\overline{x}(t), \text{ или } \overline{x}(t) = Q^{-1}x(t), \tag{31}$$

матописание объекта управления (2) можно тождественно представить в виде

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = Q^{-1}AQ\overline{x}(t) + Q^{-1}Bu(t), \quad y(t) = L^T Q\overline{x}(t). \tag{32}$$

Если ввести обозначения

$$\overline{A} = Q^{-1}AQ, \quad \overline{B} = Q^{-1}B, \tag{33}$$

то уравнения (32) перепишутся следующим образом:

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = \overline{A}\,\overline{x}(t) + \overline{B}u(t), \quad y(t) = G^T \overline{x}(t), \tag{34}$$

а условия априорной неопределенности вида (27), учитывая, что значения элементов вектора G известны (задаются проектировщиком), получат вид, аналогичный соотношениям (11), т.е.

$$\overline{A} = \overline{A}(\xi), \quad \overline{b} = \overline{b}(\xi) > 0, \quad \xi \in \Xi. \tag{35}$$

Следовательно, при построении адаптивной системы управления объектом (34), (35), матописание которого эквивалентно исходной модели

(2), (27), но записано в пространстве состояний с другим базисом, можно использовать методику синтеза, изложенную выше, учитывая, что структура адаптивного регулятора задается уравнением

$$u(t) = k(t)r(t) + \overline{\chi}^T(t)\overline{x}_{\phi}(t),\ \overline{x}_{\phi}(t) = Q^{-1}x_{\phi}(t), \tag{36}$$

а целевые условия имеют вид

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty}(\overline{x}_m(t) - \overline{x}(t)) = 0, \\ \lim_{t\to\infty}k(t) = k_0 = const, \quad \lim_{t\to\infty}\overline{\chi}(t) = \overline{\chi}_0 = const. \end{gathered} \tag{37}$$

При этом алгоритмы контура адаптации могут быть синтезированы следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{dk(t)}{dt} = h\,r(t)\big((z_m(t) - y(t)\big),\ h = const > 0, \\ \frac{d\chi(t)}{dt} = \overline{H}\,\overline{x}_{\phi}(t)\big((z_m(t) - y(t)\big),\ \overline{H} = \overline{H}^T = const > 0, \end{gathered} \tag{38}$$

с фильтром переменных состояния объекта (при измененном базисе), описываемым уравнениями

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{x}_{\phi}(t)}{dt} = \overline{M}\,\overline{x}_{\phi}(t) + \overline{N}y(t), \quad y_{\phi}(t) = \overline{C}^T\overline{x}_{\phi}(t) + \overline{D}y(t), \\ \overline{x}(t) \cong \overline{x}_{\phi}(t), \end{gathered} \tag{39}$$

где матрица $\overline{M}$, векторы $\overline{N}, \overline{C}$ и скаляр $\overline{D}$ удовлетворяют соотношению

$$\gamma(s) = \overline{C}^T\left(sE - \overline{M}\right)^{+}\overline{N} + \overline{D}\det(sE - \overline{M}) = \det(sE - \overline{M}). \tag{40}$$

Таким образом, адаптивная система управления (3), (8), (12), (13), (24) в модифицированном (эквивалентном виде) виде будет описываться уравнениями (2), (3), (13), (36), (38), (39).

Иллюстрационный пример

Рассмотрим пример имитационного моделирования системы управления (2), (3), (13), (36), (38), (39) в условиях априорной неопределенности вида (27). Пусть в этой системе $n=5$, структурные схемы которой даны на рис. 1 – 3, вектор G выбран желаемым образом, а значения параметров матрицы A и векторов B и L заданы произвольным образом, – например, со следующими значениями:

$$G = \begin{pmatrix} 5 \\ 33 \\ 44 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

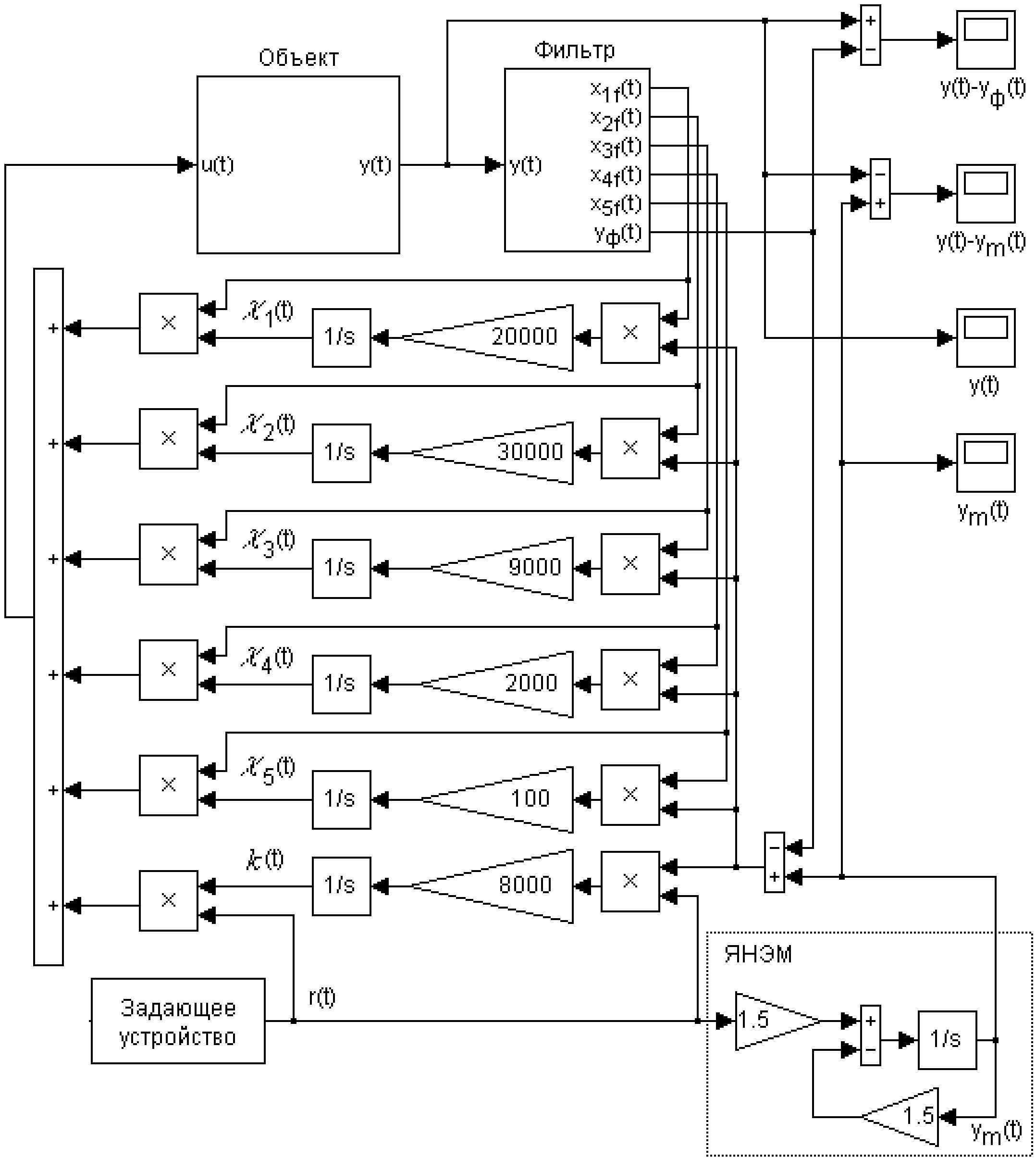

Рис. 1. Схема моделирования системы (2), (3), (13), (36), (38), (39).

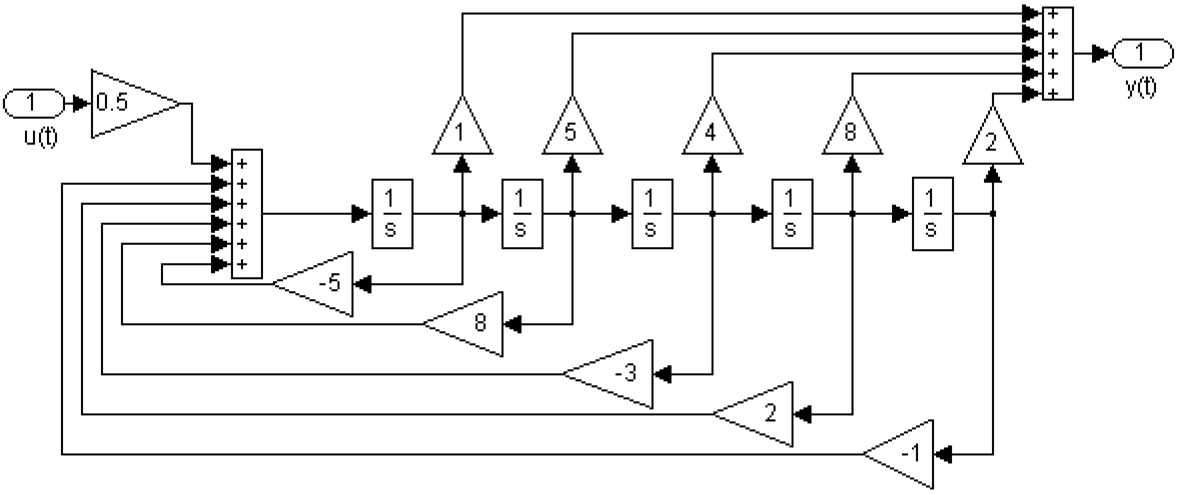

Рис. 2. Схема объекта управления (2) с параметрами (41).

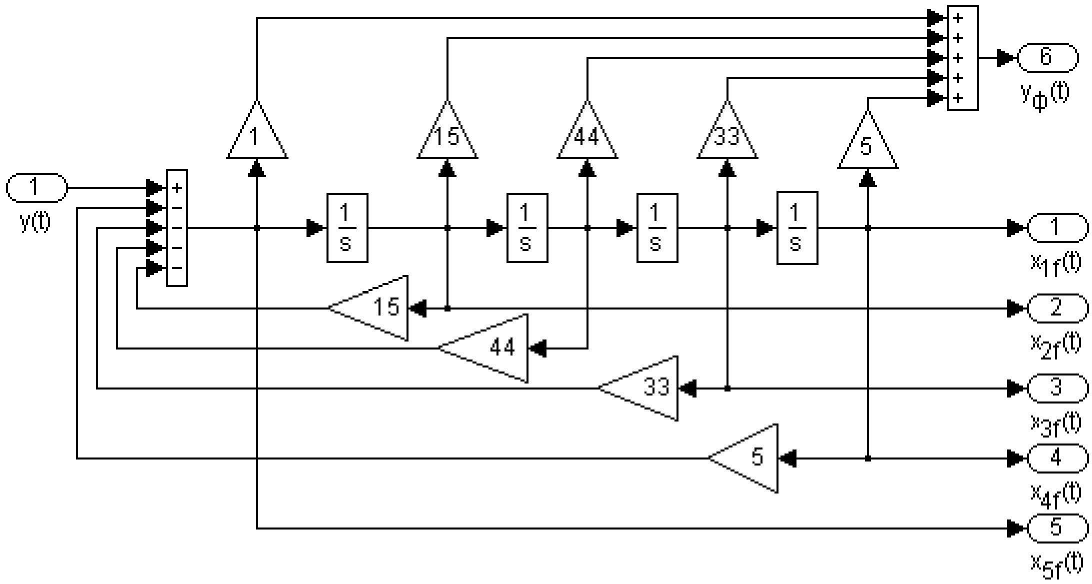

Рис. 3. Схема фильтра переменных состояния (39) в соответствии с (28), (40), (41).

Динамические процессы в режиме слежения, протекающие в адаптивной системе управления (2), (3), (13), (36), (38), (39), отражающие характер изменения выходов объекта управления и ЯНЭМ, а также динамические ошибки $y(t)-y_m(t)$, $y(t)-y_ф(t)$, представлены на рис. 4.

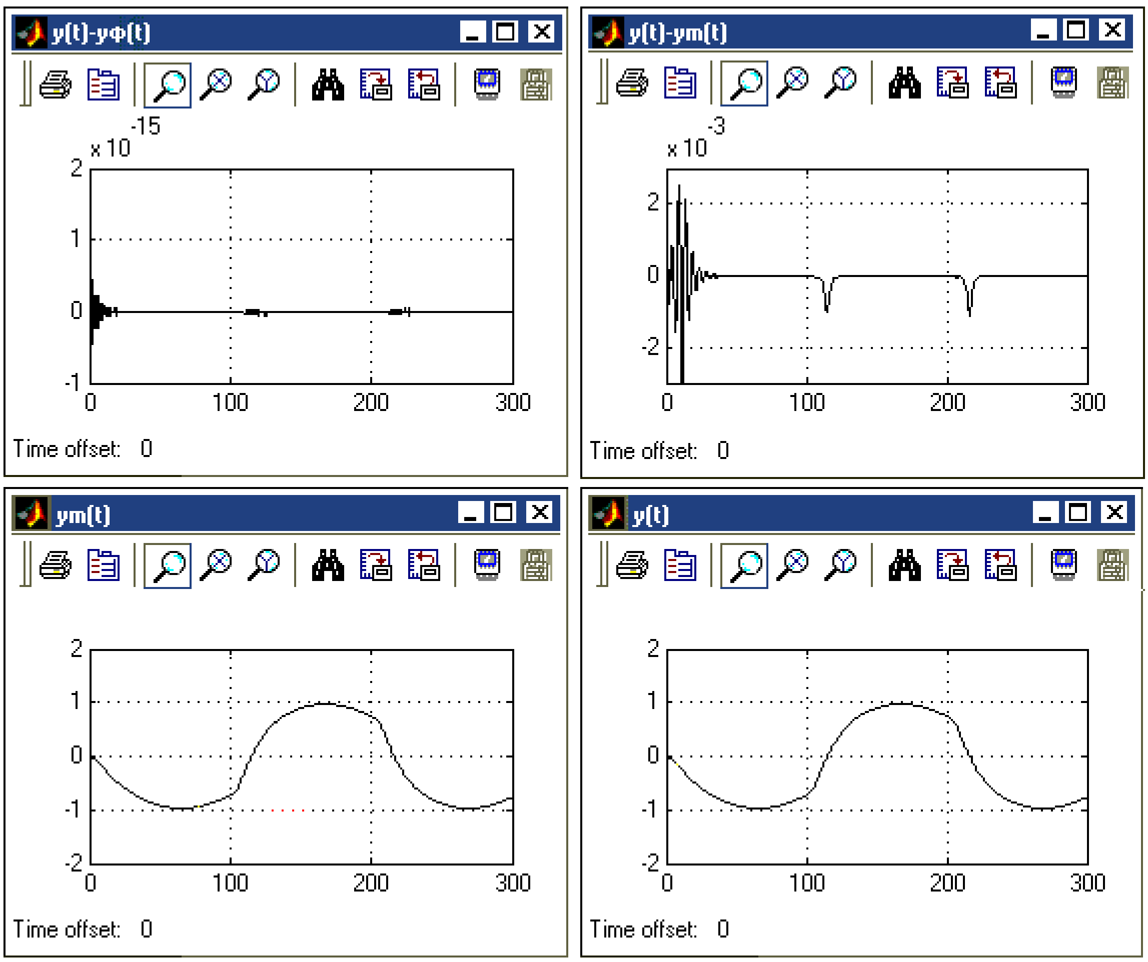

Рис. 4. Динамика процессов $y(t)$, $y_m(t)$, $y(t)-y_m(t)$, $y(t)-y_ф(t)$.

Результаты имитационного моделирования системы (2), (3), (13), (36), (38), (39) показывают достаточно высокую эффективность использования простейшего фильтра (минимальный порядок) переменных состояния строго минимально-фазового объекта.

Заключение

Предложенный способ построения фильтра переменных состояния объекта управления может использоваться как при решении задач адаптивного, так и робастного управления. Если объект просто минимально-фазовый, то в этом случае необходимо иметь в виду, что число "отфильтрованных" переменных состояния, равное порядку числителя объекта управления, будет следующим: $\deg\alpha(s) < n-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
2. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // Автоматика и телемеханика. 1994. №9. С.3-22.
3. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999.
4. *Еремин Е.Л.* Робастные алгоритмы нестационарных систем управления с явно-неявной эталонной моделью // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал – http://www.neva.ru/journal. 2001. № 3.
5. *Еремин Е.Л., Цыкунов А.М.* Синтез адаптивных систем управления на основе критерия гиперустойчивости. Бишкек: Илим, 1992.
6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.