



УДК 004.65:004.051

© 2006 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

***L*-ДИССИПАТИВНОСТЬ ГИПЕРУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТРУКТУРНОМ ВОЗМУЩЕНИИ. I¹**

При изменении структуры основного контура управления асимптотически гиперустойчивой системы рассматривается задача определения условий ее *L*-диссипативности. Структурное возмущение в виде дополнительного динамического блока реализуется последовательным соединением *k* быстродействующих апериодических звеньев 1-го порядка с постоянной времени *T**.

Введение

При проектировании адаптивных систем управления SISO-объектами (single input – single output), где вход и выход – скалярные переменные, обычно решают задачу получения информации о переменных состояния объекта. Когда объект управления линейный и строго минимально-фазовый, она может быть решена относительно просто с помощью фильтра переменных состояния [1]. Если же объект нестрого минимально-фазовый, т.е. относительный порядок его передаточной функции *r* определен условием $r > 1$, то для решения задач управления необходимо предпринимать ряд специальных мер. При этом используются схемы управления: с большими коэффициентами усиления [2, 3]; с наблюдателями [4 – 7]; с разделением движений [8]; с расширенной ошибкой [9]; с алгоритмами высокого порядка [10 – 13] и т.д.

Синтез алгоритмов управления SISO-объектами, функционирующими в условиях априорной неопределенности, чаще всего осуществляется с помощью прямого метода Ляпунова или метода скоростного градиента [12], а также на основе критерия гиперустойчивости [1]. Каждый из указанных способов имеет свою специфику, но общим моментом одной из стадий предварительного проектирования алгоритмов управления обычно является предположение о том, что в разрабатываемой системе управления

¹ Работа выполнена в рамках плана НИР по заданию Федерального агентства по образованию в 2006 г. «Модели и алгоритмы непрерывных и гибридных систем управления априорно неопределенными нелинейно-нестационарными объектами».

возмущений нет. Подобная процедура позволяет алгоритмы, синтезированные при отсутствии возмущений, модифицировать с учетом влияния на систему помех. В такой ситуации сначала решается задача об асимптотической устойчивости системы, а затем соответствующая задача о ее диссипативности. В данной работе, следуя [12, 14], систему будем считать *диссипативной по Левинсону*, или *L-диссипативной*, если все ее траектории входят с течением времени в некоторое ограниченное множество и остаются в нем при $t \rightarrow \infty$.

Постановка задачи

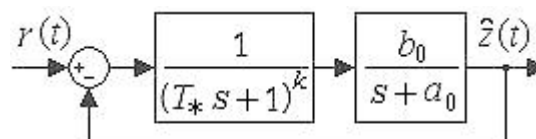
Предположим, что, например, аналогично [1] синтезирована некоторая асимптотически гиперустойчивая система управления, представленная в первой и во второй формах записи уравнениями

$$\frac{dz(t)}{dt} = -a_0 z(t) + b_0 u(t), \quad u(t) = r(t) - z(t), \quad (1)$$

$$z(s) = \frac{b_0}{s + a_0} (r(s) - z(s)), \quad (2)$$

где $z(t)$, $u(t)$, $r(t)$ – ограниченные скалярные переменные; $z(s)$ и $r(s)$ – соответствующие изображения переменных по Лапласу; b_0 и a_0 – положительные константы.

Изменим структуру системы управления (2), представляя ее в соответствии со схемой на рис. 1, т.е. реализуем структурное возмущение с помощью динамического блока, имеющего передаточную функцию



$$W_*(s) = \frac{1}{(T_*s + 1)^k}, \quad (3)$$

Рис. 1.

где T_* – постоянная времени; $k > 0$ – целое число. Запишем в изображениях

уравнение структурно возмущенной системы следующим образом:

$$\hat{z}(s) = \frac{b_0}{(T_*s + 1)^k (s + a_0)} (r(s) - \hat{z}(s)), \quad (4)$$

где $\hat{z}(s)$ – изображение выхода $\hat{z}(t)$.

Если теперь ввести в рассмотрение ошибку динамики невозмущенной и структурно возмущенной систем

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t), \quad (5)$$

то, используя уравнения (2) и (4), (5), можно записать равенство

$$e(s) = \frac{b_0}{s + a_0} (r(s) - z(s)) - \frac{b_0}{(T_*s + 1)^k (s + a_0)} (r(s) - \hat{z}(s)). \quad (6)$$

Требуется определить условие выбора величины параметра T_* в зависимости от значений заданных параметров a_0 , b_0 и целого числа k таким

образом, чтобы обеспечивалась L -диссипативность системы (6), т.е. выполнялось предельное неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - \frac{1}{2}z(t)) \leq e_0^2, \quad (7)$$

где e_0 – некоторая константа.

Эквивалентное математическое описание системы (6)

Если знаменатель передаточной функции (3) записать явно

$$(T_*s + 1)^k = (T_*s)^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (T_*s)^{k-i} + 1, \quad (8)$$

где q_i – коэффициенты, значение каждого из которых определяется соответствующим числом сочетаний, в частности

$$q_1 = q_{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!1!} = k, \quad q_2 = q_{k-2} = \frac{k!}{(k-2)!2!} = \frac{k(k-1)}{2}, \quad (9)$$

$$q_3 = q_{k-3} = \frac{k!}{(k-3)!3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6},$$

то уравнение (2), используя соотношение (8), можно представить в виде

$$z(s) = \frac{b_0 + b_0 \left((T_*s)^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (T_*s)^{k-i} \right)}{(T_*s + 1)^k (s + a_0)} (r(s) - z(s)). \quad (10)$$

Следовательно, уравнение изображения ошибки (6), учитывая (10), можно описать в виде

$$e(s) = - \frac{b_0}{(T_*s + 1)^k (s + a_0)} e(s) + \frac{b_0 \left((T_*s)^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (T_*s)^{k-i} \right)}{(T_*s + 1)^k (s + a_0)} (r(s) - z(s))$$

или эквивалентно преобразовать к форме

$$e(s) = \frac{b_0 \left((T_*s)^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (T_*s)^{k-i} \right)}{(T_*s + 1)^k (s + a_0) + b_0} (z(s) - r(s)). \quad (11)$$

Условие L -диссипативности систем (6) и (11)

Сначала рассмотрим случай $k \geq 3$.

Утверждение 1. Пусть функции $r(t)$, $z(t)$ ограничены и $T_* > 0$, тогда выполнение неравенства

$$AT_*^2 + BT_* + 2C \geq 0, \quad (12)$$

где $A = a_0^2 k(k-1)C - a_0(k-2)4$; $B = a_0(3k-1)C - 3$; $C = 1.395((k-1)(a_0 + b_0))^{-1}$; $k \geq 3$, (13)

достаточно для гурвицевости полинома

$$D(s) = (T_*s + 1)^k (s + a_0) + b_0 \quad (14)$$

и L -диссипативности систем (6), (11).

Доказательство утверждения 1. Перепишем выражение (14) эквивалентным образом:

$$D(s) = \sum_{j=0}^{k+1} d_j s^{k+1-j}, \quad (15)$$

где соответствующие коэффициенты обозначены в виде

$$\begin{aligned} d_0 &= T_*^k, \quad d_1 = q_1 T_*^{k-1} + a_0 T_*^k, \quad d_2 = q_2 T_*^{k-2} + a_0 q_1 T_*^{k-1}, \\ d_3 &= q_3 T_*^{k-3} + a_0 q_2 T_*^{k-2}, \dots, \quad d_{k-2} = q_{k-2} T_*^2 + a_0 q_{k-3} T_*^3, \\ d_{k-1} &= q_{k-1} T_* + a_0 q_{k-2} T_*^2, \quad d_k = 1 + a_0 q_{k-1} T_*, \quad d_{k+1} = a_0 + b_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем в рассмотрение так называемые *коэффициенты устойчивости*, которые для полинома (15) запишем, аналогично [15], следующим образом:

$$I_m = \frac{d_{m-1} d_{m+2}}{d_m d_{m+1}}, \quad m = \overline{1, k-1}. \quad (17)$$

Известно [16], что гурвицевость полиномов (14), (15) имеет место тогда, когда для всех m существуют оценки

$$I_m \leq 0.465, \quad m = \overline{1, k-1}. \quad (18)$$

Поскольку все коэффициенты устойчивости (17) у гурвицевого полинома $(T_*s + 1)^k (s + a_0)$ и полинома (14) совпадают друг с другом, за исключением только коэффициентов I_{k-1} , то очевидно, что для гурвицевости полинома (14) достаточно выполнить условие

$$I_{k-1} = \frac{d_{k-2} d_{k+1}}{d_{k-1} d_k} \leq 0.465. \quad (20)$$

Следовательно, согласно явному виду коэффициентов d_{k-2} , d_{k-1} , d_k , d_{k+1} и q_{k-2} , q_{k-1} , q_k в соотношениях (9), (16) неравенство (20) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{T_*(k-1)(3+a_0(k-2)T_*)(a_0+b_0)}{(2+a_0(k-1)T_*)(1+a_0kT_*)} \leq 1.395 \quad (21)$$

и при $T_* > 0$ в результате записать, используя обозначения (13), условие гурвицевости полинома (14) в виде (12).

Кроме того, учитывая ограниченность по определению функций $r(t)$, $z(t)$ и гурвицевость полинома (14), а значит и гурвицевость знаменателя передаточной функции системы (11), можно утверждать, что в эквивалентных линейных системах (6) и (11): реакции на ограниченное входное воздействие $(z(t) - r(t))$ ограничены; условия L -диссипативности имеют ме-

сто, т.е. требования предельного неравенства (7) выполнены, что и требовалось показать.

Теперь рассмотрим два частных случая, когда в системах (6) и (11) $k = 1$ или $k = 2$.

Утверждение 2. Если функции $r(t)$, $z(t)$ ограничены, то для гурвицевости полинома (14) и L -диссипативности систем (6), (11) необходимо и достаточно, чтобы:

$$\text{при } k = 1, \text{ имело место условие} \\ T_* > 0; \quad (22)$$

$$\text{при } k = 2, \text{ выполнялись неравенства} \\ T_* > 0, 2a_0^2 T_*^2 + (4a_0 - b_0) T_* + 2 \geq 0. \quad (23)$$

Доказательство утверждения 2. Поскольку при $k = 1$ полином (14) имеет вид

$$D(s) = T_* s^2 + (1 + a_0 T_*) s + a_0 + b_0,$$

то необходимое и достаточное условие гурвицевости полинома – положительность всех коэффициентов и требование (22) при $a_0, b_0 > 0$, – очевидно.

При $k = 2$ полином (14) получает вид

$$D(s) = T_*^2 s^3 + (2T_* + a_0 T_*^2) s^2 + (1 + 2a_0 T_*) s + a_0 + b_0, \quad (24)$$

и для его гурвицевости необходимо и достаточно выполнить требования:

$$T_* > 0, (2T_* + a_0 T_*^2) > 0, (1 + 2a_0 T_*) > 0, (a_0 + b_0) > 0, \\ (2 + a_0 T_*)(1 + 2a_0 T_*) \geq T_*(a_0 + b_0), \quad (26)$$

что в эквивалентной форме записи и может быть задано условиями (23).

L -диссипативность систем (6), (11), имеющую место при выполнении соответственно условий (22) или (23), можно показать аналогично доказательству утверждения 1.

Вычислительный эксперимент

Для иллюстрации качества функционирования структурно возмущенной асимптотически гиперустойчивой системы (см. рис. 1) рассмотрим пример со следующими данными:

$$a_0 = 0.5; b_0 = 10; k = 5.$$

Решая неравенство (12) с использованием параметрических соотношений (13), (23), находим оценку

$$-2.0984 < T_* < T_{\text{mas}} = 0.0237,$$

учитывая условие $T_* > 0$, получаем, что утверждение 1 ($k \geq 3$) имеет место, когда значение параметра T_* выбрано из диапазона

$$0 < T_* < T_{\text{mas}} = 0.0237,$$

пусть T_* задано со значением $T_* = 0.02$.

Для оценки величины ошибки (5) или рассогласования поведения

выходов невозмущенной и структурно возмущенной систем при обработке задающего воздействия вида

$$r(t) = \sin(0.01t)$$

было проведено моделирование системы со структурной схемой, показанной на рис. 2.

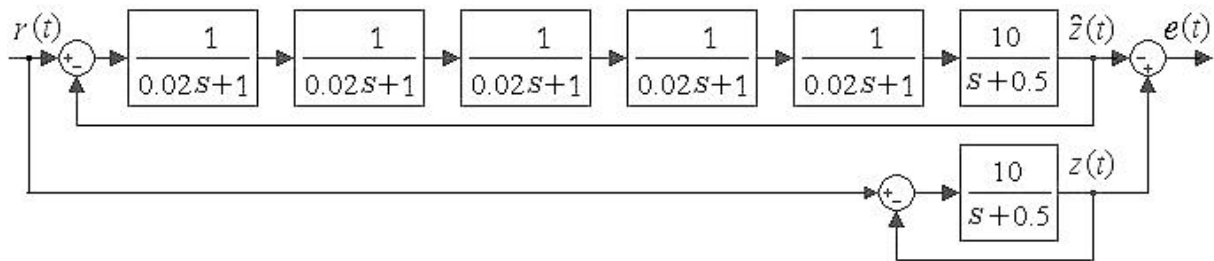


Рис. 2.

В установившемся режиме, как показывают результаты имитационного моделирования (рис. 3), величина ошибки, или зона диссипативности, не превышает 1%.

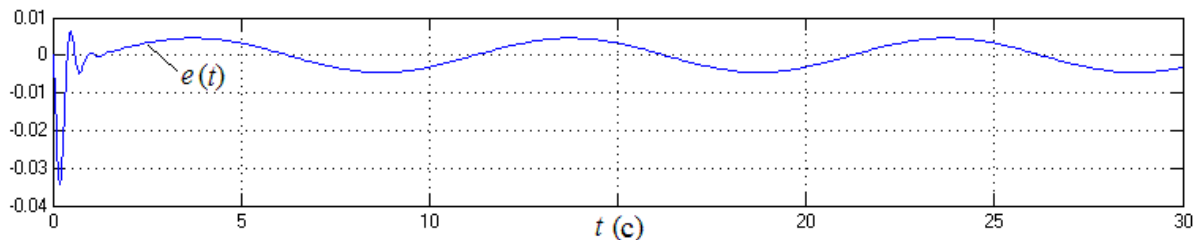


Рис. 3.

Результаты вычислительного эксперимента также показывают, что зону диссипативности можно сократить в частности за счет уменьшения значения параметра T_* . Действительно, в той же системе (см. рис. 2), но уже при $T_* = 0.01$ зона диссипативности оказывается $\cong 0.2\%$ (рис. 4).

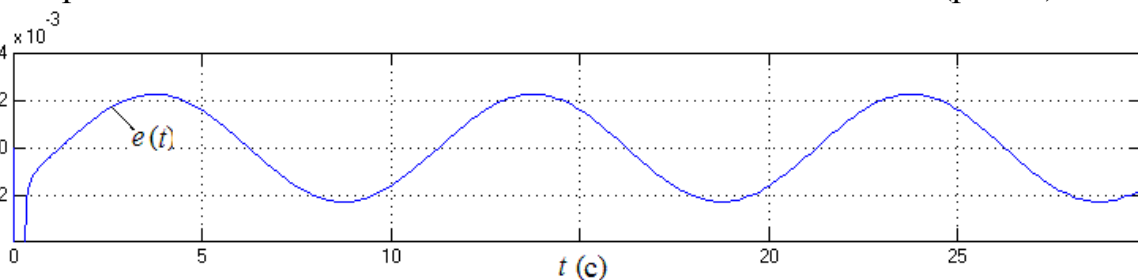


Рис. 4.

Отметим, что динамический блок, с помощью которого осуществляется возмущение системы, обычно состоит из быстродействующих аperiodических звеньев. Например, в системе с параметрами $b_0 = 10$, $a_0 = 0.5$ (где a_0 соответствует постоянной времени невозмущенной системы $T_0 = 2$) для выбора величины T_* при различных k максимальные значения границ будут следующими:

$$\begin{aligned} \text{при } k = 3, T_{\max} &= 0.0482, \text{ при } k = 4, T_{\max} = 0.0318, \\ \text{при } k = 5, T_{\max} &= 0.0237, \text{ при } k = 10, T_{\max} = 0.0105, \end{aligned}$$

а это означает, в частности, что при $k = 5$ значение T_* должно быть меньше значения T_0 , причем приблизительно на два порядка.

Подчеркнем, что значения всех вышеприведенных границ рассчитывались исходя из достаточных условий типа (12), иначе говоря, для системы найдется ряд значений T_* , противоречащих условию (12), но при которых система по-прежнему может оказаться L -диссипативной. Однако вычислительные эксперименты показывают, что при $T_* > T_{\max}$:

зона диссипативности обычно увеличивается;

всегда существуют такие значения T_* , при которых система теряет устойчивость.

Действительно, моделирование структурно возмущенной системы показывает, что в случае $a_0 = 0.5$, $b_0 = 10$, $k = 5$ и при $T_* = 0.048$ ($T_* > T_{\max} = 0.0237$) она становится неустойчивой, что и подтверждает график выхода $\hat{z}_1(t)$ (рис. 5), где также показаны задающее воздействие $r(t) = \sin(0.01t)$, и выход $\hat{z}_2(t)$ той же структурно возмущенной системы, но при $T_* = 0.024$.

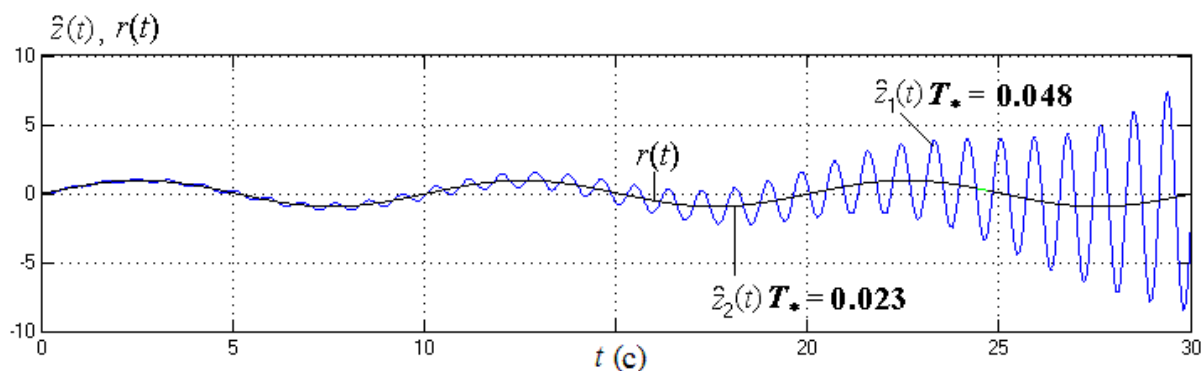


Рис. 5.

Заметим, что из-за малости зоны диссипативности графики $\hat{z}_2(t)$ и $r(t)$ практически неотличимы.

Заключение

Полученные достаточные условия L -диссипативности структурно возмущенных гиперустойчивых систем вида (12), (13) и (22), (23) являются относительно простыми и удобными в применении.

Условия L -диссипативности для схем представленных на рис. 1 и 2 рассматривались при структурном возмущении, вводимом на вход объекта управления, аналогичный результат имеет и при его возмущении по выходу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин Е.Л. Алгоритмы адаптивной системы управления с явно-неявной эталонной моделью для строго минимально-фазового объекта // Информатика и системы управления. – 2004. – №2(8). – С.157-166.

2. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967.
3. *Бобцов А.А.* Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 21. – С.108-117.
4. *Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путтов В.В.* Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
5. *Краснова С.А.* Каскадный синтез наблюдателя состояния для нелинейных систем при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 1. – С.31-54.
6. *Lee K.W., Khalil H.K.* Adaptive output feedback control of robot manipulators using high-gain observers. // Int. J. Control. – 1997. – Vol. 67. – P.869-886.
7. *Oh S., Khalil H.K.* Nonlinear output feedback tracking using high-gain observer and variable structure control. // Automatica. – 1997. – Vol. 33. – P.1845-1856.
8. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
9. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 9. – С.3-22.
10. *Morse A.S.* High-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems // Isidory A., Tarn T.J. (eds.) Systems, Models and Feedback: Theory and Applications. – Birkhauser, 1992. – P.339-364.
11. *Khalil H.K.* Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1996. – Vol. 41. – P.177-188.
12. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
13. *Цыкунов А.М.* Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 8. – С.143-153.
14. *Levinson N.* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // Ann. Math. – 1944. – Vol. 45. – №4. – P.723-737.
15. Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления / под ред. *Б.Н. Петрова.* – М.: Наука, 1978.
16. *Соколов Н.И., Судзиловский Н.Б., Рутковский В.Ю.* Адаптивные системы автоматического управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1988.