



УДК 004.65:004.051

© 2007 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук  
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

## ***L*-ДИССИПАТИВНОСТЬ ГИПЕРУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТРУКТУРНОМ ВОЗМУЩЕНИИ. II<sup>1</sup>**

На основе возмущения структуры основного контура управления соответствующих упрощенных гиперустойчивых систем последовательно малоинерционных звеньев первого порядка исследуются достаточные условия построения систем управления скалярными объектами с относительными порядками передаточных функций больше единицы.

### **Введение**

Рассматривается система управления минимально-фазовым неустойчивым объектом, у которой передаточная функция имеет относительный порядок  $r > 1$ . В основной контур управления этой системы с целью придания ей желаемых динамических свойств, кроме регулятора, введено дополнительное устройство – динамический корректор, состоящий из последовательно соединенных  $k = (r - 1)$  упругих звеньев.

Пусть элементы замкнутой системы управления описываются уравнениями:

объекта управления (*OY*)

$$z(s) = \frac{a(s)}{b(s)} u(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} u(s), \quad (1)$$

где  $z(t)$  и  $u(t)$ ,  $z(s)$  и  $u(s)$  – скалярные управляемый и управляющий сигналы с изображениями по Лапласу;  $a(s)$  и  $b(s)$  – многочлены: первый гурвицев, а второй с произвольным расположением корней;  $a_j$  и  $b_i$  – соответствующие константы  $j = 1, \dots, m$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Относительный порядок передаточной функции (1) определен соотношением  $r = \deg b(s) - \deg a(s) = n - m$ ;

регулятора (*P*)

$$u(t) = c_0 e(t), \quad e(t) = r(t) - z(t), \quad (2)$$

где  $e(t)$  и  $r(t)$  – скалярные сигналы ошибки и ограниченного задающего

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках плана НИР по заданию Федерального агентства по образованию в 2007 г. «Модели и алгоритмы непрерывных и гибридных систем управления априорно неопределенными нелинейно-нестационарными объектами».

воздействия;  $C_0 = const > 0$  коэффициент усиления;  
динамического корректора (ДК)

$$u(s) = \frac{d(s)}{g(s)} u(s) = \frac{d_0 s^k + d_1 s^{k-1} + \dots + d_{k-1} s + d_k}{(T_* s + 1)^k} u(s), \quad (3)$$

где  $u(s)$  – изображение выхода корректора;  $d(s)$  – гурвицев многочлен;  $d_j$  – произвольно выбираемые положительные константы;  $j = 1, \dots, k$ ;  $T_* > 0$  – числовой параметр.

В силу последовательного соединения элементов ДК и ОУ их общую передаточную функцию можно представить следующим образом:

$$\frac{d(s)}{g(s)} \cdot \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{1}{g(s)} \cdot \frac{d(s)}{b(s)}, \quad (4)$$

где многочлен  $d(s) = a(s)d(s)$  гурвицев,  $\deg d(s) = (k + m) = (n - 1)$ , что позволяет ввести в рассмотрение следующие математические модели:

видоизмененного объекта управления (ВОУ)

$$z(s) = \frac{d(s)}{b(s)} \tilde{u}(s), \quad d(s) = d_0 s^{n-1} + d_1 s^{n-2} + \dots + d_{n-2} s + d_{n-1}, \quad (5)$$

где  $\tilde{u}(s)$  – изображение преобразованного управления;

видоизмененного динамического корректора (ВДК)

$$\tilde{u}(s) = \frac{1}{g(s)} u(s) = \frac{1}{(T_* s + 1)^k} u(s). \quad (6)$$

На рис. 1а и 1б представлены структурные схемы соответственно исходной (1) – (3) и видоизмененной (2), (5), (6) систем.

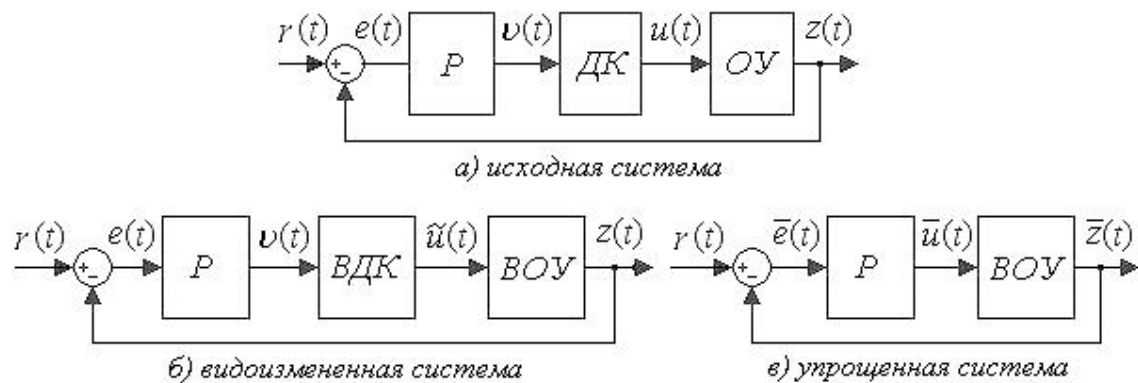


Рис. 1.

### Постановка задачи

Требуется, подобно [1], для произвольных многочлена  $b(s)$  и числа  $k = (r - 1) > 1$  определить условия выбора значений скалярной величины  $C_0$  и параметров динамического компенсатора (2) таким образом, чтобы обеспечивалась  $L$ -диссипативность систем (1) – (3) и (2), (5), (6), т.е. для них, согласно [2, 3], имело бы место предельное неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - z(t)| \leq e_0, \quad (7)$$

где  $e_0 > 0$  – некоторая константа.

Решение данной задачи, учитывая эквивалентность замкнутых систем (см. рис. 1а, 1б), которые в силу выражений (1) – (3) и (2), (5), (6) описываются передаточной функцией

$$z(s) = \frac{c_0 d(s)}{g(s)b(s) + c_0 d(s)} r(s), \quad (8)$$

будем искать, используя математическую модель системы (2), (5), (6).

Будем считать, что уравнение ВДК вида (6) описывает структурное возмущение. При этом, исключая ВДК из основного контура управления системы (2), (5), (6) и рассматривая, согласно рис. 1в, описание некоторой упрощенной системы

$$\bar{z}(s) = \frac{d(s)}{b(s)} \bar{u}(s), \quad \bar{u}(s) = c_0 (\bar{r}(s) - \bar{z}(s)), \quad (9)$$

где  $\bar{z}(s)$ ,  $\bar{u}(s)$ ,  $\bar{r}(s)$  – соответствующие изображения выхода, управления и задающего воздействия, покажем, что, обеспечивая ее гиперустойчивость, можно добиться и  $L$ -диссипативности систем (1) – (3) и (2), (5), (6).

### Гиперустойчивость упрощенной системы (9)

Поскольку у передаточной функции системы (9) в замкнутой форме вид

$$W_{YC}(s) = \frac{c_0 d(s)}{b(s) + c_0 d(s)} = \frac{c_0 d(s)}{b_0(s)}, \quad (10)$$

то, согласно [4 – 6], имеет место следующий теоретический результат.

*Утверждение 1.* Если многочлен  $d(s)$  степени  $(n - 1)$  с положительными коэффициентами гурвицев, то для произвольного многочлена  $b(s)$  с положительным старшим коэффициентом всегда найдется такое достаточно большое число  $c_0 = const \gg 0$ , что гурвицевым станет многочлен  $b_0(s)$ , а также будет выполнено частотное неравенство

$$\operatorname{Re} W_{YC}(j\omega) = \operatorname{Re} \frac{c_0 d(j\omega)}{b_0 d(j\omega)} > 0, \quad \forall \omega > 0 \quad (11)$$

и достигнута гиперустойчивость системы (9).

Действительно, при большом значении числа  $c_0$ , следуя [5], из  $n$  корней многочлена

$$b_0(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n + c_0 (d_0 s^{n-1} + \dots + d_{n-2} s + d_{n-1}), \quad (12)$$

$(n - 1)$  корней уйдут к значениям корней многочлена  $d(s)$  вида (5), а  $n$ -й вещественный корень сместится на комплексной плоскости далеко влево

$$s_n = -c_0, \quad (13)$$

что приведет передаточную функцию (10) к некому «эталонному» виду

$$W_{YC}(s) \cong \frac{c_0}{s + c_0}, \quad (14)$$

из которого очевидно как выполнение неравенства (11), так и гиперустойчивость системы (9).

### ***L*-диссипативность видоизмененной системы (2), (5), (6)**

Явный вид знаменателя передаточной функции (8) описывается выражением

$$b_0(s) = \left( T_*^k s^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i T_*^{k-i} s^{k-i} + 1 \right) (s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n) + c_0 (d_0 s^{n-1} + \dots + d_{n-2} s + d_{n-1}), \quad (15)$$

где  $q_i$  – коэффициенты, определяемые соответствующим числом сочетаний

$$q_1 = q_{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!1!} = k, \quad q_2 = q_{k-2} = \frac{k!}{(k-2)!2!} = \frac{k(k-1)}{2}, \quad (16)$$

$$q_3 = q_{k-3} = \frac{k!}{(k-3)!3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

Если выбрать некоторые значения параметров  $c_0 \gg 0$  и  $T_* \leq c_0^{-1} \ll 1$ , а правую часть многочлена (15) представить в виде

$$b_0(s) = T_*^k s^{k+n} + T_*^{k-1} (q_1 + T_* b_1) s^{k+n-1} + \dots + T_*^2 (q_{k-2} + q_{k-3} T_* b_1 + q_{k-4} T_*^2 b_2 + \dots + q_1 T_*^{k-3} b_{k-3} + T_*^{k-2} b_{k-2}) s^{n+2} + T_* (q_{k-1} + q_{k-2} T_* b_1 + q_{k-3} T_*^2 b_2 + \dots + q_1 T_*^{k-2} b_{k-2} + T_*^{k-1} b_{k-1}) s^{n+1} + (1 + q_{k-1} T_* b_1 + q_{k-2} T_*^2 b_2 + \dots + q_1 T_*^{k-1} b_{k-1} + T_*^k b_k) s^n + c_0 (d_0 + c_0^{-1} b_1 + c_0^{-1} b_2 q_{k-1} T_* + c_0^{-1} b_3 q_{k-2} T_*^2 + \dots) s^{n-1} + c_0 (d_1 + c_0^{-1} b_2 + c_0^{-1} b_3 q_{k-1} T_* + c_0^{-1} b_4 q_{k-2} T_*^2 + \dots) s^{n-2} + \dots + c_0 (d_{n-2} + c_0^{-1} b_{n-1} + c_0^{-1} b_3 q_{k-1} T_*) s + c_0 (d_{n-1} + c_0^{-1} b_n), \quad (17)$$

то для коэффициентов (записанных в круглых скобках) можно провести (с высокой степенью приближения) практически «эквивалентные» замены

$$T_*^{k-1} (q_1 + T_* b_1) \cong T_*^{k-1} q_1, \dots, T_*^2 (q_{k-2} + q_{k-3} T_* b_1 + q_{k-4} T_*^2 b_2 + \dots + T_*^{k-2} b_{k-2}) \cong T_*^2 q_{k-2}, T_* (q_{k-1} + q_{k-2} T_* b_1 + q_{k-3} T_*^2 b_2 + \dots + T_*^{k-1} b_{k-1}) \cong T_* q_{k-1}, (1 + q_{k-1} T_* b_1 + q_{k-2} T_*^2 b_2 + \dots + q_1 T_*^{k-1} b_{k-1} + T_*^k b_k) \cong 1, c_0 (d_0 + c_0^{-1} b_1 + c_0^{-1} b_2 q_{k-1} T_* + c_0^{-1} b_3 q_{k-2} T_*^2 + \dots) \cong c_0 d_0, c_0 (d_1 + c_0^{-1} b_2 + c_0^{-1} b_3 q_{k-1} T_* + c_0^{-1} b_4 q_{k-2} T_*^2 + \dots) \cong c_0 d_1, \dots, c_0 (d_{n-1} + c_0^{-1} b_n) \cong c_0 d_{n-1}, \quad (18)$$

так как они не изменяют до того существовавшее расположение корней многочлена (17).

Таким образом, используя соотношения (17), (18), выражение (15) перепишем в виде

$$b_0(s) = T_*^k s^{k+n} + T_*^{k-1} q_1 s^{k+n-1} + \dots + T_*^2 q_{k-2} s^{n+2} + T_* q_{k-1} s^{n+1} + s^n + c_0 d_0 s^{n-1} + c_0 d_1 s^{n-2} + \dots + c_0 d_{n-2} s + c_0 d_{n-1} \quad (19)$$

и сформулируем еще один теоретический результат.

*Утверждение 2.* Чтобы система (2), (5), (6) являлась  $L$ -диссипативной, достаточно выполнить требования утверждения 1 и при соответствующих числах  $c_0, d_0, d_1, k > 1$  и ограниченной функции  $r(t)$  выбрать значения параметра  $T_*$  из условия

$$0 < T_* \leq c_0^{-1}, \quad (20)$$

обеспечивая гурвицевость многочленов (15), (19) за счет существования неравенств

$$T_* \leq \frac{0.93}{d_0(k-1)} c_0^{-1}, \quad (21)$$

$$T_* \leq \frac{0.465 d_0}{d_1 k}. \quad (22)$$

Покажем, что справедливость условий (22), (23) достаточна для гурвицевости многочлена (19), который перепишем в эквивалентной форме

$$b_0(s) = \sum_{j=0}^{k+n} b_{0j} s^{k+1-j}, \quad (23)$$

с использованием следующих обозначений:

$$b_{00} = T_*^k, \quad b_{01} = T_*^{k-1} q_1, \dots, \quad b_{0(k-2)} = T_*^2 q_{k-2}, \quad b_{0(k-1)} = T_* q_{k-1}, \quad (24)$$

$$b_{0k} = 1, \quad b_{0(k+1)} = c_0 d_0, \quad b_{0(k+2)} = c_0 d_1, \dots, \quad b_{0(k+n)} = c_0 d_{n-1}.$$

Введем в рассмотрение, аналогично [7], так называемые *коэффициенты устойчивости*, которые для многочлена (23) запишутся в виде

$$l_m = \frac{b_{0(m-1)} b_{0(m+2)}}{b_{0m} b_{0(m+1)}}, \quad m = \overline{1, k+n-1}. \quad (25)$$

Известно [8], что для всех  $m$  достаточным условием гурвицевости многочленов вида (19) или (23) является существование оценок

$$l_m \leq 0.465, \quad m = \overline{1, k+n-1}. \quad (26)$$

Однако коэффициенты  $b_{0i}, i = 0, 1, \dots, k$ , многочлена (23) тождественно равны коэффициентам гурвицевого многочлена  $g(s)$  из (3), т.е. коэффициенты устойчивости  $l_m, m = 1, 2, \dots, (k-1)$  можно исключить из рассмотрения, так как они сформированы только из коэффициентов  $b_{0i}$ . Аналогичная ситуация имеет место и для многочлена (23) с коэффициентами устойчивости  $l_n, n = (k+2), \dots, (k+n-1)$ , которые можно также не оце-

нивать, поскольку в их состав входят коэффициенты  $b_{0j}$ ,  $j = k, \dots, (k + n)$ , совпадающие с коэффициентами гурвицевого многочлена  $d(s)$  вида (5).

Следовательно, гурвицевость многочлена (23) зависит лишь от числовых значений коэффициентов устойчивости  $I_k$  и  $I_{k+1}$ , имеющих вид

$$I_k = \frac{b_{0(k-2)}b_{0(k+1)}}{b_{0(k-1)}b_{0k}} = \frac{T_*^2 q_{k-2}}{T_* q_{k-1}} \cdot \frac{c_0 d_0}{1}, \quad I_{k+1} = \frac{b_{0(k-1)}b_{0(k+2)}}{b_{0k}b_{0(k+1)}} = \frac{T_* q_{k-1}}{1} \cdot \frac{c_0 d_1}{c_0 d_0},$$

которые с учетом (16) и (26) должны удовлетворять неравенствам

$$I_k = T_* c_0 d_0 \frac{k-1}{2} \leq 0.465, \quad I_{k+1} = T_* k \frac{d_1}{d_0} \leq 0.465 \quad (27)$$

или оценкам эквивалентного вида (22), (23), что и требовалось показать.

Таким образом, если условия утверждения 1 выполнены, т.е. существует требуемое число  $c_0$ , при котором система (9) гиперустойчива, а также выбрано значение параметра  $T_*$ , удовлетворяющее условиям (20) – (22), то можно утверждать, что при ограниченном входном воздействии  $r(t)$  выходные реакции эквивалентных линейных систем (1) – (3) и (2), (5), (6) ограничены.

Другими словами, имеет место выполнение предельного соотношения (7), из существования которого следует  $L$ -диссипативность как видоизмененной (2), (5), (6), так и исходной (1) – (3) систем управления.

### Иллюстративный пример

Пусть в *исходной системе* управления (1) – (3), показанной на рис. 2, где  $z(t) = z_1$ , задающее воздействие определено уравнением

$$r = r(t) = [1.5 \exp(0.25[1 - \cos(pt)]) - 1] \sin(1.5pt),$$

а передаточная функция  $OY$  имеет относительный порядок  $r = 4$  и описывается выражением

$$W_{OY}(s) = \frac{1}{s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4},$$

где  $b_1 = -1$ ;  $b_2 = 2$ ;  $b_3 = 1$ ;  $b_4 = 0.5$ . Очевидно, что при  $k = 3$ , согласно соотношению (3), передаточную функцию  $DK$  можно записать следующим образом:

$$W_{DK}(s) = \frac{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}{(T_* s + 1)^3},$$

где коэффициенты гурвицевого числителя выбраны со значениями  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_3 = 1$ , а число  $T_* > 0$  неизвестно и подлежит определению.

Поскольку в рассматриваемом случае порядок числителя передаточной функции  $Oy$  нулевой, т.е. многочлены  $d(s)$ ,  $d(s)$  оказываются эквивалентными, то, принимая во внимание условия (20) – (22) с соответствующими значениями чисел  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $k$  и конкретной величиной  $c_0$ , будем вычислять значение параметра  $T_*$  по формулам

$$T_{*1} = \frac{0.93}{d_0(k-1)} c_0^{-1} = 0.465 c_0^{-1}, \quad T_{*2} = \frac{0.465 d_0}{d_1 k} = 0.0517,$$

выбирая из рассчитанных чисел наименьшее.

При этом упрощенная система управления (9) с передаточной функцией  $BOY$  вида

$$W_{OY}(s) = \frac{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}{s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4}$$

описывается выражением (10), которое при  $c_0 \gg 0$ , как следует из доказательства утверждения 1, имеет вид (14), соответствующий некоторой гиперустойчивой *эталонной* системе (см. рис. 2, где  $\bar{z}(t) = z_2$  и  $\bar{z}(t) \cong z_0$ ).

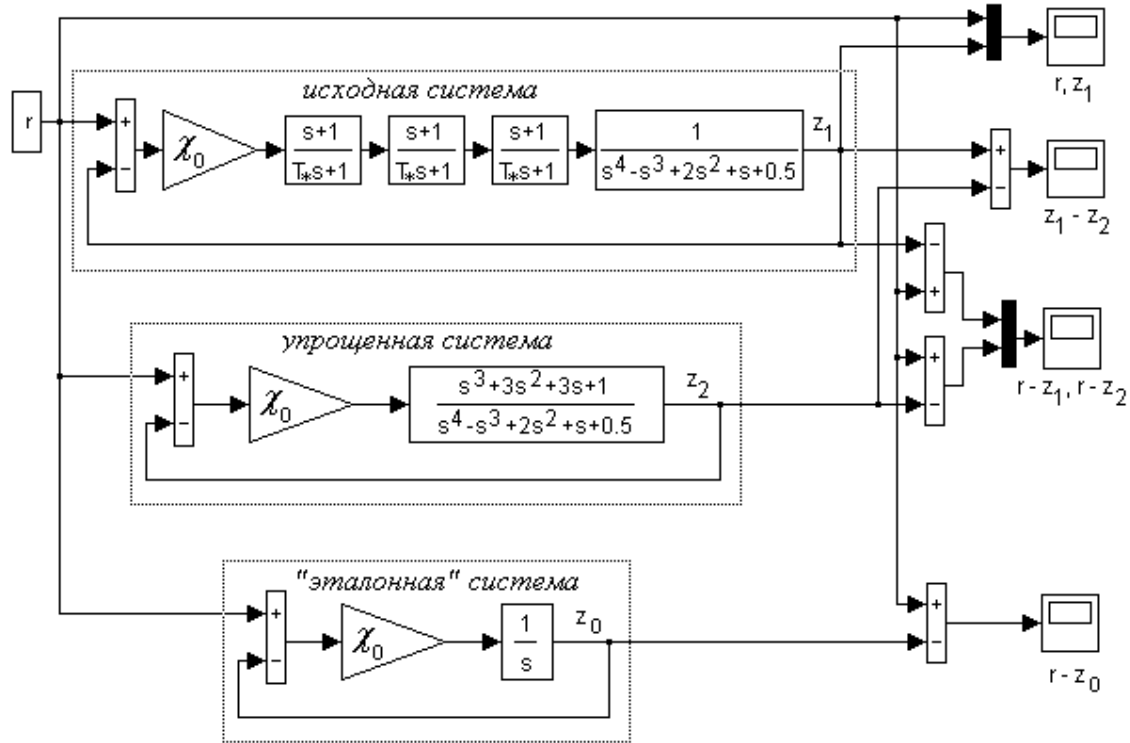


Рис. 2.

Из результатов имитационного моделирования следует, что упрощенная система (10), – например, при значении  $c_0 = 8$ , становится устойчивой, но при этом максимум ошибки  $e(t) = r(t) - z_2(t)$ , рассматриваемый относительно амплитуды  $r(t)$ , окажется еще более значительным, достигающим  $\approx 60\%$ .

Если выбрать значение  $c_0 = 300$ , то максимум  $e(t)$  будет  $\approx 1.5\%$ , а при  $c_0 = 1000$  его величина уменьшится до  $0.4\%$ , причем с ростом  $c_0$  тенденция улучшения точности обработки сигнала  $r(t)$  сохранится. Например, задавая  $c_0 = 10000$ , с практической точки зрения можно достаточно обоснованно полагать, что упрощенная система оказывается гиперустойчивой, а исходная система по отношению к ней является  $L$ -диссипативной. В этом случае

при  $c_0 = 10000$  и соответственно  $T_* = 0.0000465$  максимумы ошибок в исходной и упрощенной системах, как следует из их моделирования (рис. 3), не превышают 0.05%.

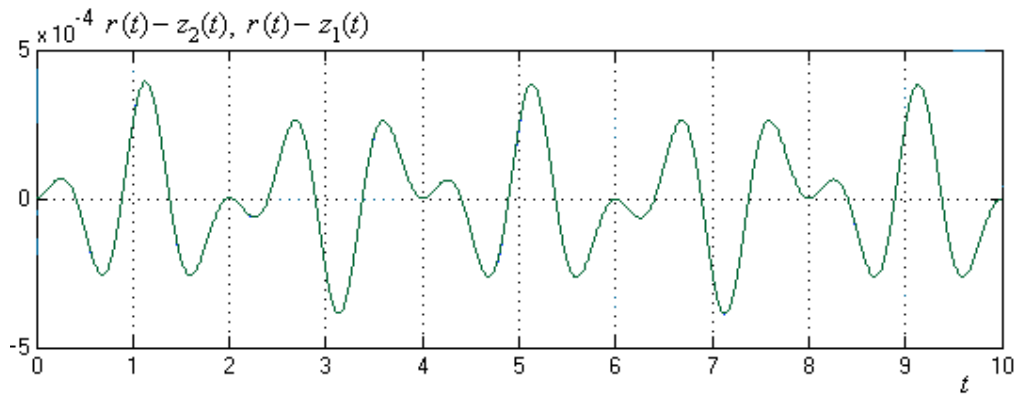


Рис. 3.

Здесь уместно обратить внимание на свойства ошибки  $e(t) = r(t) - z_0(t)$ , возникающей в "эталонной" системе. Сравнивая графики на рис. 3, 4 важно отметить, что, при наличии некоторых динамических расхождений в поведении рассматриваемых систем, ошибки рассогласования  $< 0.05\%$ .

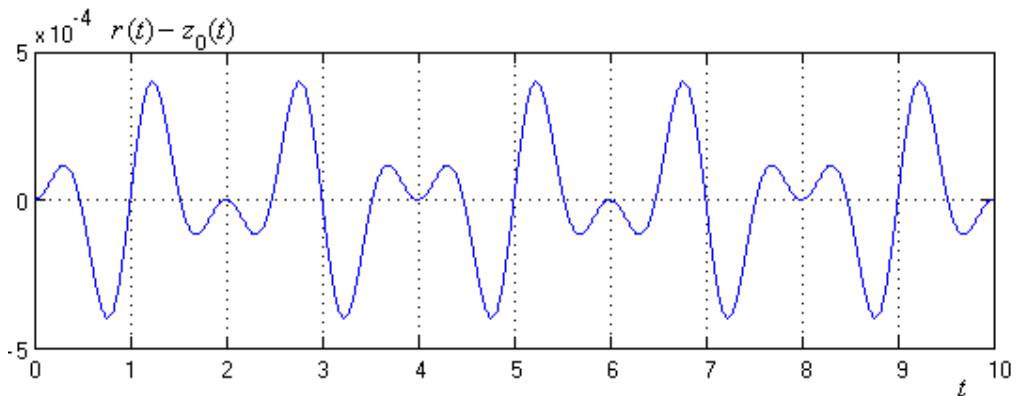


Рис. 4.

При этом рассогласование между сигналами  $z_1(t) - z_2(t)$  фактически отсутствует, что следует из числовых значений на рис. 5, а динамика выхода  $OУ$  исходной системы практически не отличается от поведения задающего воздействия (рис. 6).

Следует заметить, что нарушение требований (20) – (22) при выборе значения параметра  $T_*$  существенно влияет на работоспособность исходной системы управления (1) – (3). В частности, если задать число  $c_0 = 1000$ , то, выполняя указанные условия, величина вычисляемого параметра  $T_*$  не должна превышать значения  $T_{*1} = 0.000465$ . Пусть для примера это требование нарушено и  $T_{*2} = 2T_{*1} = 0.00093$ , тогда при  $T_* = T_{*1}$ , как следует из графиков имитационного моделирования (рис. 7), система (1) – (3) работает с достаточно хорошим качеством (максимум  $e(t) < 0.4\%$ ), а при  $T_* = T_{*2}$ , теряя свою устойчивость, она оказывается неработоспособной.



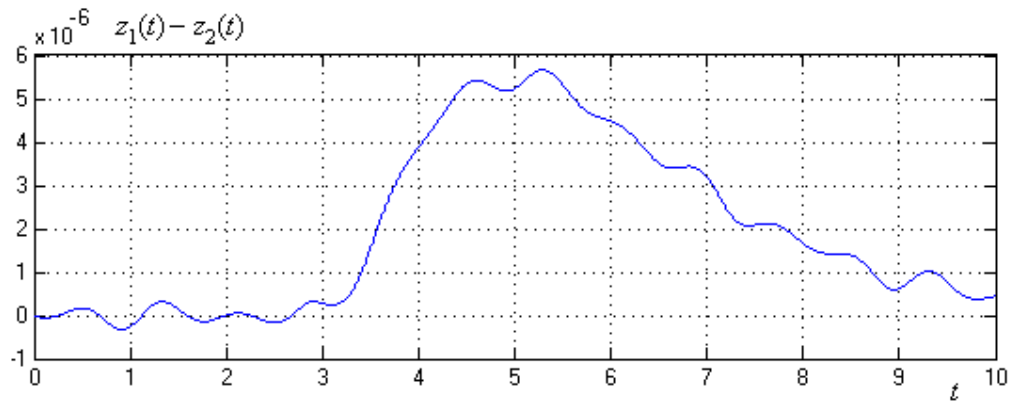


Рис. 5.

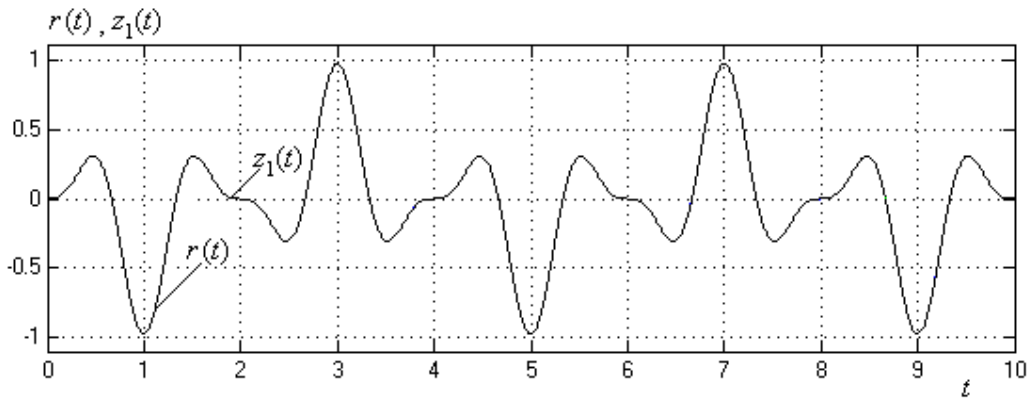


Рис. 6.

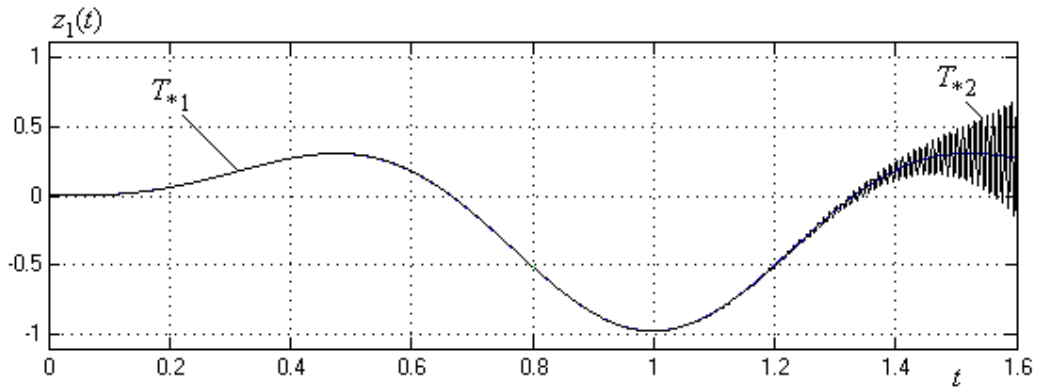


Рис. 7.

### Заключение

Предлагаемый способ построения систем управления для скалярных объектов, передаточные функции которых имеют относительный порядок больше единицы, рассмотрен только для случая неявных эталонных моделей типа (14), который связан с использованием быстродействующих компенсаторов (3) и регуляторов с большим коэффициентом усиления (2).

Дальнейшее развитие полученных результатов может быть направлено на применение явных и явно-неявных эталонных моделей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Еремин Е.Л.* L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. I // Информатика и системы управления. – 2006. – № 2(12). – С.94-101.
2. *Levinson N.* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // Ann. Math. – 1944. – Vol. 45, №4. – P.723-737.
3. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
4. *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта. // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №12. – С.96 – 103.
5. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967.
6. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970.
7. Многорежимные и нестационарные системы автоматического управления / под ред. *Б.Н. Петрова.* – М.: Наука, 1978.
8. *Соколов Н.И., Судзиловский Н.Б., Рутковский В.Ю.* Адаптивные системы автоматического управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1988.