9. *Bergstrand J.H.* The Gravity Equation in International Trade: Some Microeconomic Foundations and Empirical Evidence // The Review of Economics and Statistics. – 1985. – Vol. 67, N 3. – P.474-481.
10. *MINOS.* Пакет для решения оптимизационных задач / Университет Стэнфорда, США. – Режим доступа: http://www.sbsi-sol-optimize.com/asp/ sol_product_minos.htm.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Нурминским.

УДК 519.862.8

© 2008 г. **Д.В. Давыдов,** канд. физ.-мат. наук,
А.А. Тарасов
(Дальневосточный государственный университет, Владивосток)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЯХ С ПОКАЗАТЕЛЕМ[1]

В работе обсуждаются подходы к построению функций полезности с использованием показателя интервальных предпочтений, учитывающего степень субъективной неопределенности при принятии решений.

Введение

Одной из классических задач теории принятия решений является построение функции полезности на основании заданной системы предпочтений лица, принимающего решения. Известные результаты первой половины XX в. [1] – теоремы о существовании функции полезности в условиях полной или статистически достоверной информации – дополнились в 1970–1980-е гг. общей теорией построения функций полезности на основании различных структур предпочтений [2]. Среди них особое положение занимают предпочтения в условиях интервальной неопределенности [3].

Интервальная неопределенность позволяет охватить широкий класс моделей с неполной информацией. Здесь не требуется ни вероятностных распределений параметров, ни достаточного объема статистических данных для оценки этих распределений. Единственная доступная информация – верхние и нижние границы возможных значений неопределенных исходов.

Использование интервальных оценок при принятии решений подтверждается эмпирически [4 – 6]. В частности, проведенное анкетирование [6] позволяет подтвердить гипотезу об интервальном восприятии информации при принятии экономических решений.

Основное внимание в данной работе уделяется построению функции полез-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-012).

ности на системах интервальных предпочтений с использованием показателя интервального неравенства [7]. Формируется система интервальных предпочтений, рассматриваются свойства одномерных и многомерных предпочтений, доказывается существование функции полезности в конечномерном интервальном пространстве.

Показатель одномерного интервального упорядочения

Рассмотрим пространство **IR** замкнутых вещественных интервалов $\mathbf{x} = [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ с центрами x_0 и радиусами $\Delta x \geq 0$.

В литературе известны различные подходы к сравнению элементов пространства **IR**. Например, в работе [8] для интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ принимается неравенство $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ в сильном смысле, если $x \leq y (\forall x \in \mathbf{x}, \forall y \in \mathbf{y})$, и в слабом смысле, если $x \leq y (\exists x \in \mathbf{x}, \exists y \in \mathbf{y})$. В некоторых случаях [11] сравнение интервалов **x,y** сводят к сравнению их центров – вещественных чисел x_0, y_0.

Более общий подход к сравнению элементов пространства **IR** предложен в статье [7], где для произвольных $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ определяется показатель интервального неравенства $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ – вещественное число

$$R(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) = \frac{y_0 - x_0}{\Delta x + \Delta y}. \tag{1}$$

Выражение (1) обладает рядом простых свойств и хорошо аппроксимирует вероятность $P(x \leq y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y})$ выполнения интервального неравенства, если рассматривать x,y как случайные величины, равномерно распределенные на соответствующих интервалах **x,y**. В частности, условие

$$R(\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) > r \tag{2}$$

с параметром $r > 0$ позволяет оценивать снизу вероятность выполнения неравенства величиной $0.5(1 + r)$ [7].

Важной задачей принятия решений является упорядочение альтернатив и построение функции полезности, отвечающей данному упорядочению. С этой точки зрения пространство **IR** позволяет учесть неопределенность, связанную с интервальным типом восприятия, который подтверждается психофизиологическими экспериментами [5] и эмпирическими тестами [6]. При этом субъективная неопределенность («погрешность») восприятия тем выше, чем больше радиус соответствующего интервала восприятия.

Параметр r в неравенстве (2) дает возможность учесть степень субъективной неопределенности. Переписав неравенство (2) с учетом (1) в форме

$$y_0 - r\Delta y > x_0 + r\Delta x\ , \tag{3}$$

убеждаемся, что интервал **y** «больше» интервала **x** с показателем $\geq r$, если интервал $\mathbf{y}_r = [y_0 - r\Delta y, y_0 + r\Delta y]$ лежит на действительной оси целиком правее интервала $\mathbf{x}_r = [x_0 - r\Delta x, x_0 + r\Delta x]$.

Зафиксируем значение показателя $r > 0$ и введем на декартовом произведении $\mathbf{IR} \times \mathbf{IR}$ бинарное отношение (строгого) предпочтения $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ с показателем r

по правилу

$$\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \Leftrightarrow y_0 - x_0 > r\,(\Delta x + \Delta y) \qquad (4)$$

для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$.

Заметим, что в отличие от показателя (1) неравенство (4) позволяет анализировать вырожденные (точечные) интервалы вида $\mathbf{x} = [x_0, x_0]$ с радиусами Δx=0 при конечных значениях показателя r. Кроме того, справедливо включение $\mathbf{R} \subset \mathbf{IR}$: числовая ось, рассматриваемая как множество вырожденных интервалов, содержится в пространстве **IR**.

Наряду с предпочтением (4), при неизменном $r > 0$ определим для интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ отношение безразличия $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$:

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{x} \Leftrightarrow -r\,(\Delta x + \Delta y) \le y_0 - x_0 \le r\,(\Delta x + \Delta y). \qquad (5)$$

Непосредственно из (5) следует, что интервалы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ безразличны тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы $\mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r \in \mathbf{IR}$ имеют непустое пересечение.

Перечислим для произвольных $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{IR}$ свойства отношения (4), полагая неизменным показатель $r > 0$ и обозначая символом $\not\succ$ нарушение предпочтения (4).

1. *Нерефлексивность:* $\mathbf{x} \not\succ \mathbf{x}$. Действительно, для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ неравенство $x_0 - r\Delta x > x_0 + r\Delta x$ противоречиво.

2. *Асимметричность: если* $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$*, то* $\mathbf{x} \not\succ \mathbf{y}$. В самом деле, если $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, то $y_0 - x_0 > r\,(\Delta x + \Delta y)$, равносильно $x_0 - y_0 < -r\,(\Delta x + \Delta y)$, что противоречит отношению $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

3. *Транзитивность: из* $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ *и* $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ *следует* $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$. По определению (4) справедливы неравенства $y_0 - x_0 > r\,(\Delta x + \Delta y)$, $z_0 - y_0 > r\,(\Delta z + \Delta y)$. Складывая их почленно, приходим к условию $y_0 - x_0 + z_0 - y_0 > r\,(\Delta x + \Delta y) + r\,(\Delta z + \Delta y)$, откуда, учитывая $\Delta y \ge 0, r > 0$, получаем $z_0 - x_0 > r\,(\Delta x + \Delta z) + 2\,r\Delta y \ge r\,(\Delta x + \Delta z)$; следовательно, $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$.

4. *Если* $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$*, то* $\mathbf{w} \succ \mathbf{x}$ *или* $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$. Пусть $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$. Тогда по определению (4)

$$y_0 - x_0 > r\,(\Delta x + \Delta y),\; w_0 - z_0 > r\,(\Delta z + \Delta w). \qquad (6)$$

Если $\mathbf{w} \succ \mathbf{x}$, то утверждение верно. Предположим, что условие $\mathbf{w} \succ \mathbf{x}$ не имеет места,

$$r\,(\Delta x + \Delta w) \ge w_0 - x_0, \qquad (7)$$

и покажем, что в этом случае справедливо $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$. Суммируя почленно неравенства (6), получим $w_0 - z_0 + y_0 - x_0 > r\,(\Delta z + \Delta w) + r\,(\Delta x + \Delta y)$. Отсюда, с учетом (7), имеем

$$y_0 - z_0 + (w_0 - x_0) > r\,(\Delta z + \Delta y) + r\,(\Delta x + \Delta w) \ge r\,(\Delta z + \Delta y) + (w_0 - x_0).$$

Наконец, избавляясь от разности $(w_0 - x_0)$, получаем неравенство

$$y_0 - z_0 > r\,(\Delta z + \Delta y),$$

равносильное предпочтению $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, что и требовалось доказать.

5. *Существуют* $\mathbf{x{,}y{,}z{,}w} \in \mathbf{IR}$ *такие, что* $\mathbf{z} \succ \mathbf{y}$*,* $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$*,* $\mathbf{w} \sim \mathbf{x}$*,* $\mathbf{z} \sim \mathbf{w}$.

Действительно, пусть **x**=[5,6], **y**=[7,8], **z**=[9,10], **w**=[0,15]. Тогда $\mathbf{z} \succ \mathbf{y}, \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{w}, \mathbf{z} \sim \mathbf{w}$ при любом фиксированном $r > 0.25$.

Легко показать также, что отношение безразличия (5) рефлексивно, симметрично, но не является транзитивным. В последнем нетрудно убедиться, рассмотрев интервалы **x**=[0,6], **y**=[2,8], **z**=[4,10] с показателем $r = 0.5$. Здесь справедливы отношения **x~y, y~z**, однако $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, что противоречит определению транзитивности.

Отметим, что свойство 4 известно в литературе как первое условие Льюса, а свойство 5 демонстрирует противоречие второму условию Льюса [9,10].

В целом, совокупность рассмотренных свойств позволяет классифицировать [2] введенные отношения (4), (5) как интервальное упорядочение, но не как полуупорядочение [9]. Для таких типов предпочтений существование функции полезности зависит от структуры отношения безразличия ввиду отсутствия его транзитивности.

Дальнейшее исследование интервальных упорядочений с показателем требует введения для любых **x,y**$\in$ **IR** отношения эквивалентности $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$, связанного с отношением безразличия (5) по следующему правилу:

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \sim \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \tag{8}$$

для всех **z**$\in$ **IR**.

Утверждение 1. Класс эквивалентности $\mathbf{X} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{IR} | \mathbf{y} \approx \mathbf{x}\}$ при $r > 0$ содержит единственный элемент для каждого интервала **x**$\in$ **IR**.

Доказательство. Для любого **z**$\in$ **IR** требование безразличия **x~z** по определению эквивалентно системе неравенств

$$x_0 - r\Delta x \le z_0 + r\Delta z, z_0 - r\Delta z \le x_0 + r\Delta x, \tag{9}$$

а безразличие **y~z** отвечает системе

$$y_0 - r\Delta y \le z_0 + r\Delta z, z_0 - r\Delta z \le y_0 + r\Delta y. \tag{10}$$

Найдем такие **y**, что при фиксированном **x** и любом **z**, удовлетворяющем (9), верно (10) и обратно. Прямая импликация **x~z** $\Rightarrow$**y~z** приводит к системе

$$y_0 - r\Delta y \le x_0 - r\Delta x, y_0 + r\Delta y \ge x_0 + r\Delta x. \tag{11}$$

Обратная импликация **y~z** $\Rightarrow$**x~z** задает систему неравенств

$$y_0 - r\Delta y \ge x_0 - r\Delta x, y_0 + r\Delta y \le x_0 + r\Delta x. \tag{12}$$

В силу эквивалентности **x~z** $\Leftrightarrow$**y~z** условия (11) и (12) должны выполняться одновременно, следовательно:

$$y_0 - r\Delta y = x_0 - r\Delta x, y_0 + r\Delta y = x_0 + r\Delta x, \tag{13}$$

откуда однозначно получаем $y_0 = x_0$, $\Delta x = \Delta y$.

Таким образом, класс эквивалентности, содержащий интервал $\mathbf{x} = [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, является одноэлементным.

Следствие 1. Множество классов эквивалентности совпадает с пространством **IR**.

Следствие 2. Множество классов эквивалентности является несчетным.

Данные следствия затрудняют применение известных теорем о существовании интервальнозначной функции полезности [2, 10], в которых (в разных формулировках) требуется конечность или счетность классов эквивалентности, определенных в виде (8). Однако введенные предпочтения (4) обладают свойствами 1 – 4, что позволяет интерпретировать их как строгие частичные упорядочения, существование полезности для которых можно доказать, используя определение плотности по упорядочению в множестве классов эквивалентности.

Утверждение 2. Существует плотное по упорядочению (4) счетное подмножество $\mathbf{Q}\subset\mathbf{IR}$ вырожденных интервалов с рациональными центрами и нулевыми радиусами.

Доказательство. Пусть произвольные фиксированные элементы $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{IR}$ интервального пространства $\mathbf{IR}$ удовлетворяют отношению предпочтения $\mathbf{y}\ \mathbf{f}\ \mathbf{x}$. По определению (4) $y_0 - x_0 > r(\Delta x + \Delta y)$, или, эквивалентно, $y_0 - r\Delta y > x_0 + r\Delta x$, где левая и правая части неравенства – действительные числа, поэтому найдется рациональное число q_0, отвечающее неравенствам

$$y_0 - r\Delta y > q_0 > x_0 + r\Delta x\,. \qquad (14)$$

Добавляя в левое неравенство (14) величину $r\Delta q$=0 и вычитая ее же из правого неравенства (14), получаем условия

$$y_0 - r\Delta y > q_0 + r\Delta q\,,\ q_0 - r\Delta q > x_0 + r\Delta x\,.$$

Первое из них эквивалентно предпочтению $\mathbf{y}\ \mathbf{f}\ \mathbf{q}$, второе – предпочтению $\mathbf{q}\ \mathbf{f}\ \mathbf{x}$, что и определяет плотность по упорядочению множества $\mathbf{Q}$ в пространстве $\mathbf{IR}$.

Утверждение 3. Для интервального предпочтения с показателем (4) существует функция полезности $u(\mathbf{x})$: $\mathbf{IR}\to\mathbf{R}$, такая, что из $\mathbf{y}\ \mathbf{f}\ \mathbf{x}$ следует $u(\mathbf{y})>u(\mathbf{x})$ для всех интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{IR}$.

Доказательство следует из свойств отношений (4), (5), утверждений 1, 2 и теоремы 3.2 из [2].

Многомерные интервальные предпочтения с показателем

Перейдем к рассмотрению более общей ситуации, связанной с многокритериальным принятием решений в условиях интервальной неопределенности. Определим конечномерное интервальное пространство $\mathbf{IR}^n$ как декартово произведение (одномерных) интервальных пространств $\mathbf{IR}$. Элементами $\mathbf{IR}^n$ служат n-мерные интервальные векторы $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)$, каждая координата $\mathbf{x}_i = [x_{i0} - \Delta x_i, x_{i0} + \Delta x_i], i\in I = \{1,2,...,n\}$ которых определяет замкнутый интервал $\mathbf{x}_i$ с центром x_{i0} и радиусом $\Delta x_i \geq 0$.

Зафиксируем вектор $r = (r_1,...,r_n) > 0$ показателей важности соответствующих координат при принятии решений. Для $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{IR}^n$ по аналогии с (4) примем $\mathbf{y}\ \mathbf{f}\ \mathbf{x}$, если

$$y_{i0} - x_{i0} > r_i(\Delta x_i + \Delta y_i) \text{ для всех } i\,\hat{I}\,I, \qquad (15)$$

и $\mathbf{y}$~$\mathbf{x}$, если существуют координаты $j,k\,\hat{I}\,I$, для которых справедливо хотя бы одно из неравенств

$$y_{j0} - x_{j0} \le r(\Delta x_j + \Delta y_j), - r(\Delta x_k + \Delta y_k) \le y_{k0} - x_{k0}. \qquad (16)$$

Таким образом, многомерный интервал **y** предпочтительнее многомерного интервала **x** в том и только в том случае, когда выполняются условия предпочтения (4) с показателем r_i для каждой координаты $i \in I$ пространства $\mathbf{IR}^n$.

Нетрудно убедиться в справедливости свойств нерефлексивности, асимметричности и транзитивности отношения предпочтения (15), а также рефлексивности, симметричности и нетранзитивности отношения безразличия (16).

Отметим, что в отличие от одномерных предпочтений (4) многомерные предпочтения (15) не удовлетворяют первому условию Льюса, т.е. не являются интервальным упорядочением.

По аналогии с (8) определим отношение эквивалентности $\mathbf{y} \approx \mathbf{x}$ над отношением безразличия (16) в виде

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \sim \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \qquad (17)$$

для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{IR}^n$.

Утверждение 4. Класс эквивалентности $\mathbf{X} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{IR}^n \mid \mathbf{y} \approx \mathbf{x}\}$ является одноэлементным для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^n$.

Доказательство. Многомерные интервалы **x**,**y** совпадают (**x**=**y**), если для всех $i \in I$ выполнены равенства $x_{i0} - \Delta x_i = y_{i0} - \Delta y_i$. и $x_{i0} + \Delta x_i = y_{i0} + \Delta y_i$.

Без потери общности предположим, что для некоторой координаты $j \in I$ справедливо неравенство $x_{j0} - \Delta x_j < y_{j0} - \Delta y_j$. Выберем точечный интервал z, удовлетворяющий условиям $x_{j0} - \Delta x_j < z_j < y_{j0} - \Delta y_j$ и $z_k < \min\{x_{k0} - \Delta x_k, y_{k0} - \Delta y_k\}$ для всех $k \in I$, $k \neq j$. Тогда из (16) следует **x**~**z**, а из (15) вытекает $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$. Последнее противоречит импликации **x**~**z** $\Rightarrow$ **y**~**z**.

Пусть теперь для всех $i \in I$ выполняется равенство $x_{i0} - \Delta x_i = y_{i0} - \Delta y_i$. Предположим, что для некоторого $j \in I$ справедливо неравенство $x_{j0} + \Delta x_j < y_{j0} + \Delta y_j$. Тогда найдется вырожденный интервал z, удовлетворяющий условиям $x_{j0} + \Delta x_j < z_j < y_{j0} + \Delta y_j$ и $z_k > \max\{x_{k0} + \Delta x_k, y_{k0} + \Delta y_k\}$ для всех $k \in I$, $k \neq j$. Отсюда **y**~**z** и $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, что противоречит условию **y**~**z** $\Rightarrow$ **x**~**z**. Таким образом, $\mathbf{y} \approx \mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда **y**=**x**.

Следствие 3. Множество классов эквивалентности совпадает с пространством $\mathbf{IR}^n$.

Следствие 4. Множество классов эквивалентности является несчетным.

Утверждение 5. В пространстве $\mathbf{IR}^n$ существует плотное по упорядочению (15) счетное подмножество $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{IR}^n$ вырожденных многомерных интервалов с рациональными центрами и покомпонентно нулевыми радиусами.

Доказательство в целом аналогично доказательству утверждения 2, проведенному для каждой координаты $i \in I$.

Утверждение 6. Существует функция полезности $u(\mathbf{x})$: $\mathbf{IR}^n \to \mathbf{R}$, монотонная по многомерному интервальному предпочтению с показателем (15): для всех интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}^n$ из $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ следует $u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$.

Доказательство основано на свойствах упорядочений (15), (16), утверждениях 4, 5 и теореме 3.2 из [2].

Заключение

Построенные на основании утверждений 3, 6 функции полезности позволяют обобщить представление о принятии решений в условиях ограниченной информации с учетом различий в субъективном восприятии. Данные функции полезности допускают положительные монотонные преобразования и, следовательно, не обладают свойством единственности, что, впрочем, свойственно и классическим функциям полезности.

Простым примером, демонстрирующим применение утверждений 3, 6, является функция полезности, построенная по характерным точкам интервалов из пространств **IR**, $\mathbf{IR}^n$. В частности, для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ можно указать точку $x = x_0 - r\Delta x \in \mathbf{R}$ и ввести на множестве действительных чисел функцию полезности $v(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, монотонно возрастающую по x. Для любой пары интервалов $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{IR}$ из предпочтения $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, используя определение (4) и учитывая ограничения $r > 0, \Delta y \geq 0$, получим $x_0 - y_0 > r\left(\Delta x + \Delta y\right) \geq r\Delta x - r\Delta y$. Отсюда $x_0 - r\Delta x > y_0 - r\Delta y$ и, следовательно, $v(x_0 - r\Delta x) > v(y_0 - r\Delta y)$. Таким образом, для каждого $\mathbf{x} = [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x] \in \mathbf{IR}$ можно определить функцию полезности $u(\mathbf{x}) \equiv v(x_0 - r\Delta x)$, монотонную по предпочтению (4).

С другой стороны, сужение множества определения функции полезности $u(\mathbf{x})$: $\mathbf{IR}^n \to \mathbf{R}$ до множества вырожденных интервалов определяет ее «проекцию» $\widetilde{u}(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ на подпространство $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{IR}^n$: $u(\mathbf{x}) = \widetilde{u}(x)$ для всех точечных интервалов $\mathbf{x}=[x,x]$. При этом функция $\widetilde{u}(x)$, определенная на детерминированном пространстве $\mathbf{R}^n$, обладает свойством монотонного возрастания по $x \in \mathbf{R}^n$.

Полученные результаты могут найти применение в экономических приложениях. Доказанное существование детерминированной полезности в условиях интервального восприятия объемов потребления и других товарных характеристик делает возможной модификацию постановки задачи оптимального потребительского выбора. Решение модифицированной задачи позволит получить более точные представления о характере потребительского спроса в условиях интервальной неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
2. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.
3. *Bilgic T.* Interval-valued preference structures // European journal of operational research. – 1998. – № 105(1). – P.162-183.
4. *Тарасов А. А.* Интервальные оптимизационные задачи в теории потребительского выбора // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2006. – http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/124.pdf.
5. *Бардин К.В.* Проблема порогов чувствительности и психофизические методы. – М., 1976.

6. *Давыдов Д.В., Тарасов А.А.* Модели теории выбора // Препринт ИМКН №1. – Владивосток: Изд-во ДВГУ, 2005.
7. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Показатель интервального неравенства: свойства и применение // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 4. – С.13-22.
8. *Rohn J., Kreslova J.* Linear interval inequalities // Linear and multilinear algebra. – 1994. – Vol. 38. – P.41-43.
9. *Luce R.D.* Semiorders and theory of utility discrimination // Econometrica. – 1956. – V. 24. – P.78-191.
10. *Scott D., Suppes P.* Foundational aspects of theories of measurement // Journal of symbolic logic. – 1958. – V. 23. – P.113-128.
11. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. – М.: Изд-во МЭИ, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Т. Ащепков.