

УДК 681.511

© 2008 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук,  
**Д.А. Теличенко**, канд. техн. наук  
**Л.В. Чепак**, канд. техн. наук  
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

## АДАПТИВНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ<sup>1</sup>

В условиях априорной неопределенности рассматривается синтез следящей системы для динамического объекта с запаздыванием по управлению в периодических режимах. В основном контуре управления используется генератор периодических сигналов.

### Введение

Когда в системе управления задающее и возмущающее воздействия являются периодическими вида  $r(t) = r(t + T)$  и  $f(t) = f(t + T)$ ,  $T = const$ , то при построении так называемых *периодических систем управления* [1 – 5] в качестве регулятора применяют генератор периодических сигналов (ГПС). Использование подобных устройств в системах управления, в том числе и адаптивных, позволяет практически полностью парировать отрицательное влияние внешних периодических возмущений, существенно повышая ее точность. В системах управления без ГПС, как правило, такого эффекта достичь не удастся, более того, величина скоростной ошибки при отработке заданий  $r(t + T)$  и существенных по амплитуде периодических возмущений может оказаться недопустимо большой.

Кроме этого, проблема синтеза адаптивных периодических систем для наиболее распространенного в прикладных задачах – класса объектов с запаздыванием по управлению, хотя и имеет ряд частных решений [6 – 8], по-прежнему остается актуальной. В данной работе показано с помощью одной из возможных схем управления объектами с последействием [9 – 12], в частности схемы, использующей дополнительное устройство в основном контуре управления – упредитель-компенсатор [12], что адаптивная периодическая система для объектов с запаздыванием по управлению может быть построена в рамках применения критерия гиперустойчивости [9]. Причем синтезированная система, оказываясь диссипативной, при наличии существенной помехи  $f(t + T)$  дает зону диссипативности значительно меньшую, чем в случае адаптивных систем управления без ГПС.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере (проект №7362).

## Постановка задачи

Уравнение объекта управления имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + b \cdot u(t-h) + f(t), \quad y(t) = L^T x(t), \quad n(t) = g^T y(t), \quad (1)$$

$$u(z) = f(z), \quad z \in [-h, 0],$$

где  $x(t) \in R^n$  – переменные состояния;  $u(t) \in R$  – управление;  $y(t) \in R^m$  – выход объекта;  $n(t) \in R$  – обобщенный выход объекта;  $A, L, g$  – соответственно неизвестные матрица состояния порядка  $n \times n$ , матрица выхода  $n \times m$  и вектор порядка  $m \times 1$ ;  $b^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \in R^n$ ;  $h = \text{const} \geq 0$  – известное постоянное запаздывание;  $f(z) \in C_h$  – функция;  $C_h$  – пространство непрерывных ограниченных функций;  $f^T(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ f_n(t)] \in R^n$  – периодическое постоянно действующее возмущение:

$$|f_n(t)| \leq f_0^2, \quad f_0 = \text{const}, \quad f^T(t) = b^T f_n(t), \quad f_n(t) = f_n(t+T). \quad (2)$$

Передающую функцию объекта управления (1) можно записать в виде

$$W_{Oy}(s) = \frac{g^T L^T (sE_n - A)^+ b}{\det(sE_n - A)} \cdot e^{-hs} = \frac{a(s)}{b(s)} \cdot e^{-hs}, \quad (3)$$

где  $a(s)$  – гурвицев полином,  $\deg(a(s)) = n - 1$ ;  $b(s)$  – полином с произвольным расположением корней,  $\deg(b(s)) = n$ .

Функционирование объекта (1) протекает в условиях априорной параметрической неопределенности

$$A = A(x), \quad L = L(x), \quad f(t) = f_x(t), \quad x \in \Xi.$$

Упредитель-компенсатор описывается уравнением

$$\frac{dy_K(t)}{dt} = -a_0 \cdot y_K(t) + u(t) - u(t-h), \quad (4)$$

где  $y_K(t) \in R$ ,  $a_0 = \text{const} > 0$ .

Передающая функция контура (4) может быть эквивалентно записана

$$W_K(s) = \frac{1}{s + a_0} \frac{a(s)}{a(s)} \cdot (1 - e^{-hs}) = \frac{g^T L^T (sE_n - A_M)^+ b}{\det(sE_n - A_M)} \cdot (1 - e^{-hs}),$$

где  $\det(sE_n - A_M)$  – гурвицев полином степени  $n$ ;  $g^T L^T (sE_n - A_M)^+ b$  – полином степени  $(n - 1)$ . Таким образом, уравнение упредителя (4) в пространстве состояний можно записать:

$$\frac{dx_K(t)}{dt} = A_M x_K(t) + b \cdot (u(t) - u(t-h)), \quad y_K(t) = L^T x_K(t), \quad n_K = g^T y_K(t), \quad (5)$$

где  $x_K(t) \in R^n$  – переменные состояния;  $y_K(t) \in R^m$  – выход упредителя;  $n_K(t) \in R$  – обобщенный выход.

Предполагается, что объект управления (1) и упредитель (5) связаны условием структурного согласования

$$A = A_M + a_0 b g^T L^T, \quad (6)$$

где  $a_0$  – неизвестная скалярная величина.

Пусть в установившемся режиме желаемое поведение выхода объекта (1) описывается уравнениями неявной эталонной модели:

$$\frac{dx_*(t)}{dt} = A_* \cdot x_*(t) + b \cdot J_*(t) + f(t), y_*(t) = L^T x_*(t), n_*(t) = g^T y_*(t) = r(t), \quad (7)$$

где  $x_*(t) \in R^n$  – неявные переменные состояния, определяющие желаемое поведение объекта в виде измеряемого (явного) выходного сигнала  $n_*(t)$ ;  $J_*(t) = J_*(t - T)$  – требуемое управление, которое позволяет сформировать желаемые переменные состояния;  $f(t)$  – периодическое внешнее возмущение, удовлетворяющее (2);  $r(t) = r(t + T) = n_*(t) \in R$  – периодическое задающее воздействие;  $A_*$  – стационарная гурвицаева матрица, структура которой определена в виде

$$A_* = A_M + b b_0 g^T L^T, \quad (8)$$

где матрица  $A_M$  и скалярная величина  $b_0$  априори неизвестны.

Тогда матрицы состояния объекта управления (1) и неявной эталонной модели (7), учитывая (6) и (8), связаны соотношением

$$A = A_* - b a_0 g^T L^T + b b_0 g^T L^T = A_* + b c_0 g^T L^T,$$

где  $c_0 = b_0 - a_0$  – неизвестная постоянная величина.

Структуру регулятора можно зададим в виде

$$u(t) = c(t) \cdot n(t) + k(t) \cdot J(t), \quad (9)$$

где  $c(t)$ ,  $k(t)$  – настраиваемые параметры;  $J(t)$  – периодическая составляющая, формируемая ГПС вида

$$J(t) = J(t - T) + k_0 z(t), J(s) = 0, s \in [-T, 0], \quad (10)$$

где  $k_0 = const > 0$ ,  $z(t)$  – сигнал рассогласования

$$z(t) = r(t + T) - (n(t) + y_K(t)), r(iT) = 0, i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Требуется с помощью регулятора (9) при любых начальных условиях, при действии внешних периодических возмущений обеспечить в периодической системе (1), (4), (9) диссипативность

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t + T) - n(t)| \leq S, S = const > 0. \quad (12)$$

### Синтез периодической системы управления

Явный вид закона управления определяется в рамках применения критерия гиперустойчивости [6, 9].

*Первый этап.* Эквивалентная система относительно сигнала ошибки  $e(t) = x_*(t) - (x(t) + x_K(t))$  имеет вид

$$\frac{de(t)}{dt} = A_* \cdot e(t) + b \cdot m(t), z(t) = r(t + T) - (n(t) + y_K(t)), \quad (13)$$

$$m(t) = -[k(t) \cdot J(t) - J_*(t)] - [c(t) - c_0] n(t).$$

*Второй этап.* Необходимо обеспечить выполнение интегрального неравенства В.М. Попова

$$h(0, t) = - \int_0^t m(t) \cdot z(t) dt = \int_0^t [k(t) \cdot J(t) - J_*(t)] \cdot z(t) dt + \int_0^t (c(t) - c_0) \cdot n(t) \cdot z(t) dt \geq -g_0^2 = const, \forall t \geq 0. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение интегралы

$$h_1(0, t) = \int_0^t [k(t) \cdot J(t) - J_*(t)] \cdot z(t) dt, \quad h_2(0, t) = \int_0^t (c(t) - c_0) \cdot n(t) \cdot z(t) dt,$$

и обеспечим выполнение неравенств  $h_1(0, t) \geq -g_{10}^2 = const$  и  $h_2(0, t) \geq -g_{20}^2 = const$ . Очевидно, что тогда неравенство (14) будет выполнено.

Можно показать, что для  $h_1(0, t)$  выполняется неравенство вида

$$h_1(0, t) = \int_0^t [k(t) \cdot J(t) - J_*(t)] \cdot z(t) dt \geq -g_{10}^2 = const, \quad \forall t \geq 0. \quad (15)$$

Перепишем равенство (10)

$$J(t) = k_0 \int_0^t w_*(t-t) \cdot z(t) dt,$$

где  $W_*(s)$  – передаточная функция генератора периодических сигналов (10)

$$W_*(s) = \frac{k_0}{1 - e^{-sT}}. \quad (16)$$

Тогда интеграл (15) примет следующий вид:

$$h_1(0, t) = \int_0^t \left( k_0 k(t) \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx - J_*(t) \right) z(t) dt. \quad (17)$$

Поскольку формируемое управление  $J_*(t)$  – периодическая функция, то с помощью функции  $z_*(t)$ , описываемой уравнением

$$z_*(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0) \cup (T, +\infty), \\ J_*(t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (18)$$

можно определить его как  $J_*(t) = J_*(t-T) + z_*(t)$ ,  $J_*(s) = 0$ ,  $s \in [-T, 0]$  или в виде

$$J_*(t) = \int_0^t w_*(t-t) \cdot z_*(t) dt. \quad (19)$$

С учетом (19) перепишем интеграл (17) следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1(0, t) &= \int_0^t \left( k_0 k(t) \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx - \int_0^t w_*(t-x) \cdot z_*(x) dx \right) z(t) dt \pm \\ &\pm \int_0^t \left( \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx \right) z(t) dt = \int_0^t \left( \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx \right) z(t) dt + \\ &+ \int_0^t \left( (k_0 k(t) - 1) \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx \right) z(t) dt \pm \int_0^t z_*(t) \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx dt = \\ &= \int_0^t \left( \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx \right) (z(t) - z_*(t)) dt + \\ &+ \int_0^t z_*(t) \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx dt + \int_0^t \left( (k_0 k(t) - 1) \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx \right) z(t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку передаточная функция (16) имеет только простые полюсы с вещественными, положительными вычетами в этих полюсах и удовлетворяет неравенству  $\operatorname{Re} W_*(j\omega) \geq 0$ ,  $\forall \omega \in (-\infty, +\infty)$ , то можно утверждать, что имеет место следующее:

$$\int_0^t \left( \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx \right) (z(t) - z_*(t)) dt \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (20)$$

Учитывая (18) и ограниченность интеграла

$$J_*(t) = \int_0^t w_*(t-t) \cdot (z(t) - z_*(t)) dt,$$

получим следующую оценку:

$$\left| \int_0^t z_*(t) \int_0^t w_*(t-x) \cdot (z(x) - z_*(x)) dx dt \right| \leq g_{110}^2 = \text{const}. \quad (21)$$

Оценим последнее слагаемое, определив алгоритма настройки параметра  $k(t)$  из (9) в виде

$$\frac{dk(t)}{dt} = r_0 J(t) z(t), \quad r_0 = \text{const} > 0. \quad (22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left( (k_0 k(t) - 1) \int_0^t w_*(t-x) \cdot z(x) dx \right) z(t) dt = \int_0^t (k_0 k(t) - 1) J(t) z(t) dt = \\ & = k_0 r_0^{-1} \int_0^t (k(s) - k_0^{-1}) \cdot \frac{dk(s)}{ds} ds \geq -\frac{k_0 r_0^{-1}}{2} (k(0) - k_0^{-1})^2 = -g_{120}^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (23)$$

Справедливость соотношений (20), (21) и (23) означает выполнение неравенства

$$h_1(0, t) \geq -g_{110}^2 - g_{120}^2 = -g_{10}^2. \quad (24)$$

Покажем выполнение интегрального неравенства для  $h_2(0, t)$ , определив алгоритм настройки параметра адаптивной составляющей регулятора (9) в следующем виде:

$$\frac{dc(t)}{dt} = I_0 n(s) z(s), \quad I_0 = \text{const} > 0. \quad (25)$$

Очевидно, что будет справедлива оценка

$$h_2(0, t) = I_0^{-1} \int_0^t (c(s) - c_0) \cdot \frac{dc(s)}{ds} ds \geq -\frac{I_0^{-1}}{2} (c(0) - c_0)^2 = -g_{20}^2 = \text{const}. \quad (26)$$

Таким образом, из выполнения неравенств (24) и (26) следует выполнение интегрального неравенства В.М. Попова (14). Что и требовалось показать.

*Третий этап.* Выполнение этапа заключается в обеспечении условия вещественности и строгой положительности передаточной функции линейной стационарной части системы (13)

$$W(s) = g^T L^T (sE_n - A_*)^{-1} b = \frac{g^T L^T (sE_n - A_*)^+ b}{\det(sE_n - A_*)}. \quad (27)$$



тельном возмущающем воздействии  $f(t) = -0.1|\sin(0.08pt)|$  для периодической системы (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29), для объекта управления (1), (29) и блока упреждения (4), но уже в системе с регулятором вида

$$u(t) = r(t) + b(t)g^T L^T(x(t) + x_k(t)) - a(t)g^T L^T x(t), \quad (30)$$

где алгоритм настройки параметра регулятора определен в виде

$$\begin{aligned} \frac{db(t)}{dt} &= I_0 z(t)(n(t) + y_K(t)), \\ \frac{da(t)}{dt} &= -t_0 z(t)n(t), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $I_0, t_0 = const > 0, z(t) = r(t) - (n(t) + y_K(t))$ .

Для обеспечения работоспособности системы (1), (2), (4), (30), (31) при действии постоянных периодических внешних возмущений алгоритмы настройки (31) огрубляются введением зоны нечувствительности  $\Delta$

$$\begin{aligned} \frac{db(t)}{dt} &= I_0 z(t)(n(t) + y_K(t)), \\ \frac{da(t)}{dt} &= -t_0 z(t)n(t), \\ \frac{db(t)}{dt} &= \begin{cases} 0, & \forall |z(t)| \leq \Delta, \\ I_0 \cdot (n(t) + y_K(t)) \cdot (z(t) + \Delta), & \forall z(t) < -\Delta, \\ I_0 \cdot (n(t) + y_K(t)) \cdot (z(t) - \Delta), & \forall z(t) > \Delta, \end{cases} \\ \frac{da(t)}{dt} &= \begin{cases} 0, & \forall |z(t)| \leq \Delta, \\ r_0 \cdot n(t) \cdot (z(t) + \Delta), & \forall z(t) < -\Delta, \\ r_0 \cdot n(t) \cdot (z(t) - \Delta), & \forall z(t) > \Delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

На рис. 2 представлен сигнал рассогласования между выходом объекта  $n(t)$  и задающим воздействием  $r(t)$  периодической системы (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29), а на рис.3 рассматривается аналогичный сигнал  $(r(t) - n(t))$  для системы (1), (2), (4), (29), (30), (32).

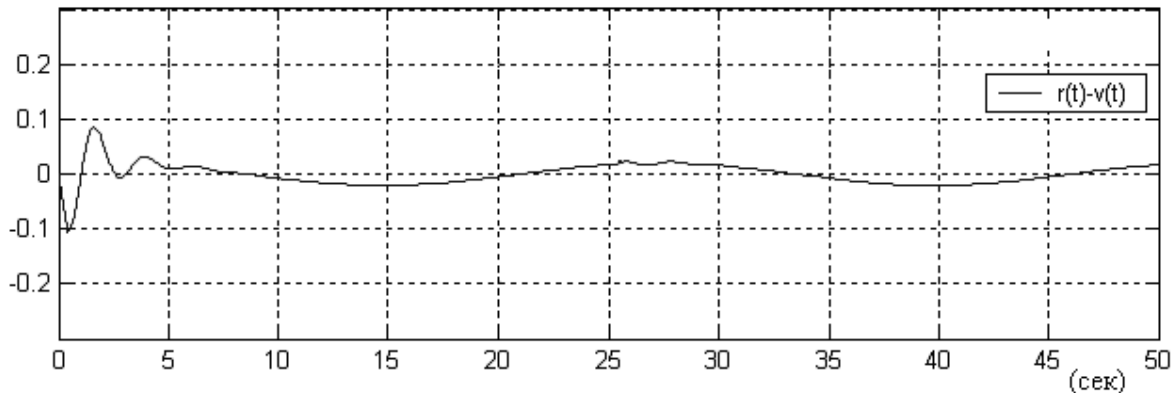


Рис. 2. Сигнал рассогласования между  $r(t)$  и выходом объекта  $n(t)$  в системе (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29) при  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -4, l_1 = 3, l_2 = 5, l_3 = 1$ .

Как уже отмечалось, предлагаемое решение задачи синтеза адаптивной системы с ГПС для объекта с запаздыванием по управлению (при периодических задающем и соизмеримом с ним возмущающем воздействиях) позволяет значительно улучшить качество функционирования по отношению к системам без ГПС.

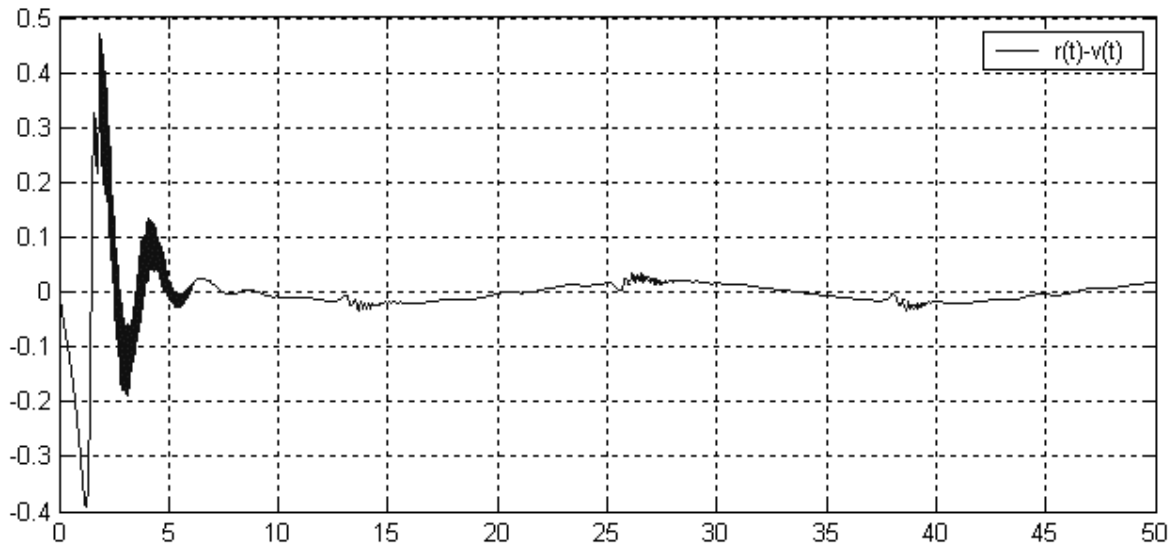


Рис. 3. Сигнал рассогласования между  $r(t)$  и выходом объекта  $n(t)$  в системе (1), (2), (4), (29), (30), (32) при  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -4, l_1 = 3, l_2 = 5, l_3 = 1, \Delta = 0.005, r_0 = 20000, I_0 = 20$ .

Действительно, следующие результаты имитационного моделирования систем при возмущающем воздействии  $f(t) = -2 - 0.5|\sin(0.08pt)|$  (рис. 4 – 6) подтверждают справедливость утверждения. Графики изменения возмущающего  $f(t)$ , задающего  $r(t)$  воздействий и выхода объекта управления  $n(t)$ , полученные в ходе имитационного моделирования с использованием пакета Matlab для системы с ГПС, представлены на рис. 4.

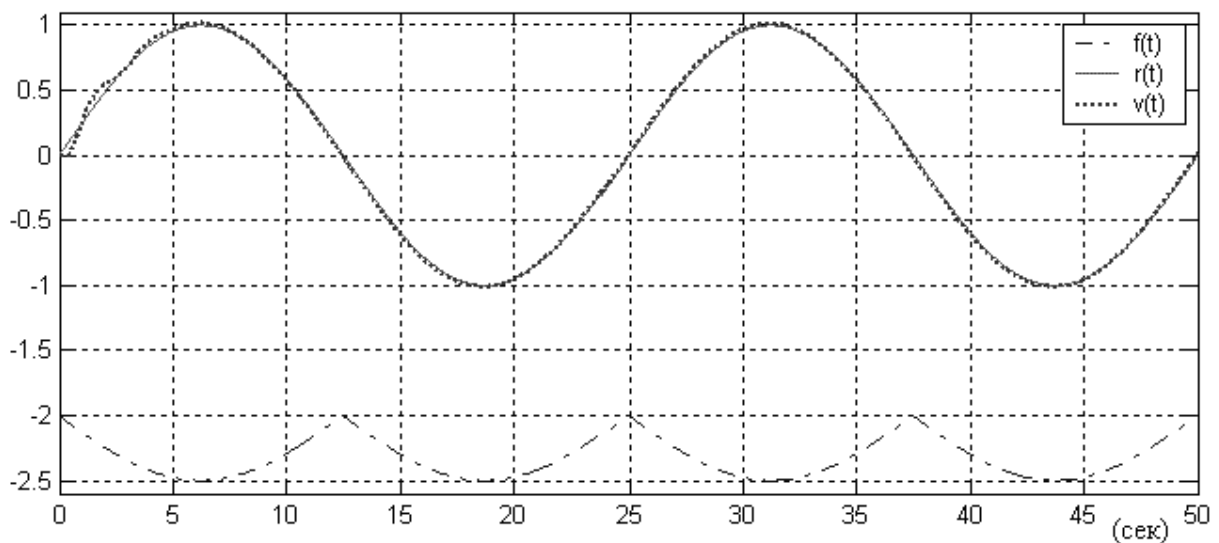


Рис. 4. Графики  $f(t)$ ,  $r(t)$  и  $n(t)$  в системе (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29) при  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -4, l_1 = 3, l_2 = 5, l_3 = 1$ .



На рис. 5 и 6 соответственно представлены сигналы ошибки между задающим воздействием и выходом объекта управления для исследуемых систем, но при значительном постоянном возмущении.

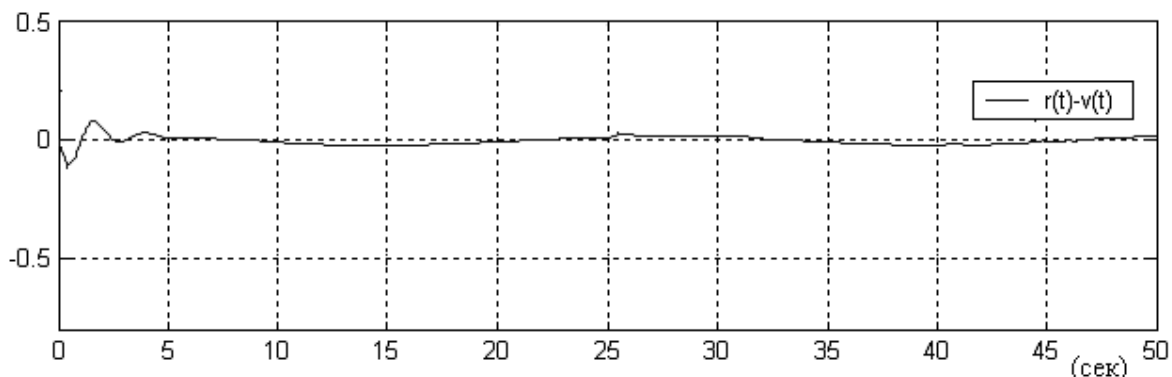


Рис. 5. Сигнал рассогласования между  $r(t)$  и выходом объекта  $n(t)$  в системе (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29) при  $f(t) = -2 - 0.5 |\sin(0.08pt)|$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = -4$ ,  $l_1 = 3$ ,  $l_2 = 5$ ,  $l_3 = 1$ .

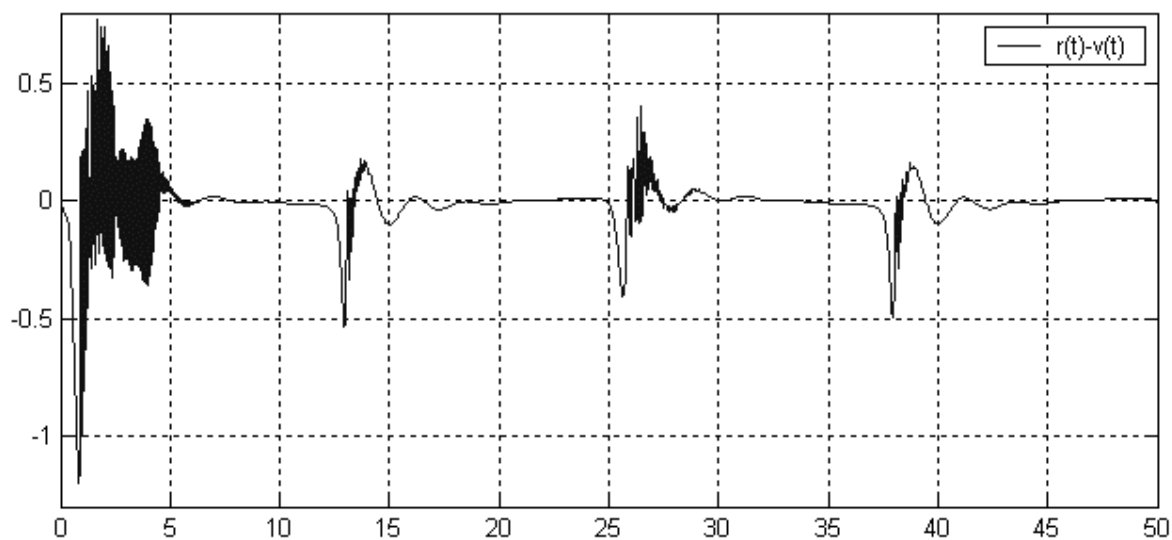


Рис. 6. Сигнал рассогласования между  $r(t)$  и выходом объекта  $n(t)$  в системе (1), (2), (4), (29), (30), (32) при  $f(t) = -2 - 0.5 |\sin(0.08pt)|$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = -4$ ,  $l_1 = 3$ ,  $l_2 = 5$ ,  $l_3 = 1$ ,  $\Delta = 0.005$ ,  $r_0 = 20000$ ,  $I_0 = 20$ .

### Заключение

В работе предлагается в периодической системе с неявной эталонной моделью для объекта с запаздыванием по управлению использовать для компенсации постоянного возмущения генератор периодических сигналов вида (10). Сравнивая результаты имитационного моделирования синтезированной системы управления (1), (2), (4), (7), (9), (10), (22), (25), (29) и адаптивной системы (1), (2), (4), (29), (30), (32), можно сделать вывод, что при незначительных по амплитуде периодических внешних воздействиях сигналы рассогласования между заданием и выходом объекта в системах соизмеримы. Однако если возмущающее воздействие оказывается значительным, то использование динамического звена (10) улучшает качество функционирования периодической системы с запаздыванием по управлению.

Задача управления периодическими системами с запаздыванием, функционирующими в условиях априорной параметрической неопределенности, решение которой связано с разработкой адаптивных или робастных алгоритмов, обеспечивающих желаемое качество процессов управления, обоснованно позволяет считать развиваемое в данной работе направление актуальным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Закс В.С.* Об одной возможности повышения точности регулирования в следящих системах циклического действия // *АиТ.* – 1981. – №1. – С.170-174.
2. *Shinji Hara, Yutaka Yamamoto, Tohru Omata, Micho Nakato.* Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals // *IEEE Transactions on automatic control.* – 1988. – Vol. 33, No. 7. – P.659 – 668.
3. *Еремин Е.Л.* Нелинейные преобразования алгоритмов прямого адаптивного управления непрерывными объектами: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Владивосток, 1994.
4. *Еремин Е.Л.* Гиперустойчивость циклических систем управления с генератором периодических сигналов // *Информатика и системы управления.* – 2006. – №1(11). – С.224-234.
5. *Еремин Е.Л., Капитонова М.С.* Адаптивная система управления  $T$ -периодическими нелинейными объектами // *Проблемы управления.* – 2007. – № 1. – С.2-7.
6. *Пат. № 2155983 РФ.* Следящая система управления для объектов с запаздыванием по управлению / С.Г. Акилова, Е.Л. Еремин // *Официальный бюл. "Изобретения. Полезные модели".* – 2000. – №25. – С.379-380.
7. *Пат. № 2173871 РФ.* Адаптивная система для объектов с запаздыванием по управлению / Е.Л. Еремин, И.Е. Еремин, С.Г. Самохвалова // *Официальный бюл. "Изобретения. Полезные модели".* – 2001. – №26. – С.335.
8. *Пат. № 2205440 РФ.* Следящая система для априорно-неопределенных объектов управления / Е.Л. Еремин, Л.В. Ильина, С.Г. Самохвалова // *Официальный бюл. "Изобретения. Полезные модели".* – 2003. – №15. – С.493.
9. *Еремин Е.Л.* Гиперустойчивость системы управления нелинейным объектом с запаздыванием // *Автоматизация технологических процессов.* – Фрунзе: Фрунз. политех. ин-т, 1987. – С.89-95.
10. *Еремин Е.Л., Ильина Л.В.* Адаптивный упредитель-компенсатор для объекта с запаздыванием по управлению в системах с явным эталоном // *Управление в системах: Вестник ИрГТУ. Сер. «Кибернетика».* – 2003. – Вып. 5. – С.89-92.
11. *Мееров М.В.* Адаптивные компенсирующие регуляторы с предиктором Смита // *АиТ.* – 2000. – № 10. – С.125-135.
12. *Еремин Е.Л., Теличенко Д.А., Чепак Л.В.* Синтез адаптивных систем для скалярных объектов с запаздыванием по управлению. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2006.