

УДК 519.7

© 2008 г. **А.И. Абакумов**, д-р физ.-мат. наук
(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),

Н.С. Иванко

(Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток)

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЫБНЫХ ПРОМЫСЛОВ К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ¹

При математическом моделировании стратегий управления морскими рыбными промыслами возникают линейные и квадратичные задачи оптимизации. В статье предлагаются способы решения нелинейных задач с помощью линейных методов. Приведены иллюстративные примеры.

Введение

Управление морскими рыбными промыслами имеет много аспектов. В статье рассматривается только процедура распределения разрешений (квот) на вылов рыб и других морских организмов. Рыбные промыслы отличаются от многих других процессов сбора урожая многовидовыми технологиями. Орудия промысла (тралы, сети, ловушки и т.п.) являются многовидовыми в смысле изымаемых ими особей многих биологических видов.

Один из способов управления промыслами – выдача государственными органами разрешений (квот) на объемы вылова определенных биологических видов или групп близких видов в установленное время и в определенных промысловых районах. Эти виды или объединенные группы видов называются объектами промысла. Разрешения на промысел выдаются по объектам, а сам промысел из-за орудий лова является многовидовым, с выловом других, не предусмотренных разрешениями, объектов. Выловы непредусмотренных объектов будем называть приловами.

Проблема учета приловов в математическом смысле приводит к задачам линейной и нелинейной (квадратичной) оптимизации. Задачи описывают способы распределения квот, при которых ожидаемый объем вылова по каждому виду будет близок к заранее определенному допустимому объему.

¹ Работа поддержана грантами ДВО РАН (проект №06-III-A-01-458) и ученого совета Дальрыбвтуза 2007 г.

Постановка задачи

Задача оптимизации распределения квот сформулирована в статье [1]. Особенности решения задачи, посвященной расчету возможных суммарных объемов квот по объектам промысла, при которых вылов с учетом приловов будет равен заранее определенным объемам допустимых уловов, описаны в [2].

Рассмотрим серию взаимосвязанных задач распределения квот для определенного морского промыслового района. Пусть имеется m объектов промысла и n способов промысла (предприятий-судовладельцев с определенными типами судов и орудий лова). Рассматривается выделенный промысловый период (например, 1 год). Индексы $i, j = 1, \dots, m$ соответствуют объектам промысла, индекс $k = 1, \dots, n$ – способам промысла.

Через α_{ijk} обозначены доли объекта i в вылове способом k при квоте на объект j (коэффициенты прилова). Эти коэффициенты вычисляются на основе ретроспективных данных о промыслах в этом районе.

Пусть $v = (v_1, \dots, v_m)$ – заданный вектор допустимых уловов для каждого объекта промысла. Требуется найти расчетные оценки квот u_{jk} на вылов объекта j способом k .

Приведем эту задачу к стандартным обозначениям. Пусть $m \cdot n = s$, $v = b$, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,s}$ – неотрицательная матрица приловов; $u = x = (x_1, \dots, x_s)^*$ – вектор квот (здесь и далее символ "*" означает действие транспонирования).

Тогда задача принимает стандартный вид

$$\begin{cases} \Phi(x) = \|Ax - b\|^2 \rightarrow \inf, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задачу (1) назовем задачей *мягкой оптимизации*.

Наряду с задачей (1), будем рассматривать такую же задачу с условием невышшения разрешенных объемов вылова для каждого объекта промысла:

$$\begin{cases} \|Ax - b\|^2 \rightarrow \inf, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задачу (2) назовем задачей *жесткой оптимизации*.

На множестве решений задачи (1) можно решать экономическую задачу максимизации дохода от промысла. В задачах мягкой (1) и жесткой (2) оптимизации в качестве нормы $\|\cdot\|$ выбирается какая-либо из общепринятых норм конечномерных пространств.

Обозначим через p_j доход от реализации единицы объема квоты номер j без учета затрат, а c_j – коэффициент затрат на организацию промысла по реализации этой квоты. Доход от реализации квоты номер j предполагается равным

$p_j x_j - c_j x_j^2$. Если через $p = (p_1, \dots, p_s)$ обозначить вектор коэффициентов дохода, а через $c = (c_1, \dots, c_s)$ – вектор коэффициентов затрат, то задача максимизации дохода примет вид:

$$\begin{cases} px - x^* Cx \rightarrow \sup, \\ x \in D. \end{cases} \quad (3)$$

Будем предполагать, что вектор p и диагональная матрица C строго положительны. Задачу (3) будем называть задачей *максимизации дохода*. Эта задача решается на множестве D «безусловных» решений задачи *мягкой оптимизации*. Множество D является подмножеством множества G всех решений задачи (1). Вид множества D будет формально описан при исследовании задач.

Исследование задач

По мере необходимости будем использовать в наших задачах одну из двух норм конечномерного пространства R^s [3]:

евклидову

$$\|x\| = \left[\sum_{j=1}^s x_j^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (4)$$

«ромбическую»

$$\|x\| = \sum_{j=1}^s |x_j|, \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_s)^* \in R^s$.

Проанализируем по порядку три поставленные задачи.

Задача 1 (мягкой оптимизации).

При решении этой задачи воспользуемся евклидовой нормой (4), тогда:

$$\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + 2\Delta x^* (A^* Ax - A^* b) + \|A\Delta x\|^2.$$

Из указанного равенства следует, что множество решений задачи (1) равно

$$G = \left\{ x \in R^s \mid A^* Ax - A^* b \geq 0, \ x^* (A^* Ax - A^* b) = 0, \ x \geq 0 \right\}. \quad (6)$$

Множество G имеет нелинейное описание. Решение задачи 1 будем искать одним из численных методов поиска оптимального решения – методом градиентного спуска с переменным шагом [4]. Этот метод характеризуется невысокой гарантией сходимости даже для квадратичного функционала. Поэтому можно рассмотреть иные способы решения задачи 1.

Задача минимизации квадратичного функционала

$$\|Ax - b\|^2 \quad (7)$$

без ограничения знака x имеет множество решений

$$D_0 = \left\{ x \in R^s \mid A^* Ax = A^* b \right\}.$$

В нашем случае матрица A имеет размерность $m \times s$, где $s = m \cdot n > m$. Ранг

матрицы A $r = r(A) \leq m$; матрицы A^* и A^*A имеют такой же ранг [3].

Система уравнений

$$A^*Ax = A^*b \quad (8)$$

совместна, так как ранг расширенной матрицы $(A^*A: A^*b)$ также равен r . Обозначим через x_0 одно из решений системы (8). Тогда $D_0 = x_0 + L$, где L – подпространство решений однородной системы $A^*Ax = 0$. Размерность данного подпространства равна $s - r \geq 1$. Это означает, что множество D_0 континуально. Обозначим $D = D_0 \cap R_+^S$. Очевидно, $D \subset G$. Множество D назовем множеством «безусловных» решений задачи (1), так как оно появляется из множества D_0 решений безусловной минимизации функционала (7). Множество D описывается линейно: хотя бы один из элементов этого множества можно искать решением следующей задачи линейного программирования

$$\begin{cases} \|y\| \rightarrow \inf, \\ A^*Ax - y = A^*b, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Если оптимальное решение (\bar{x}, \bar{y}) имеет $\bar{y} = 0$, то $\bar{x} \in D \subset G$ является решением задачи I. Если же $\bar{y} \neq 0$, то множество $D = \emptyset$ и $\bar{x} \geq 0$ – ближайшее по метрике нормы $\|\cdot\|$ к множеству D_0 . Это приближение \bar{x} можно рассматривать как приближенное решение задачи I.

Таким образом, мы предлагаем решать задачу (1) двумя приближенными методами: методом градиентного спуска; решением вспомогательной задачи линейного программирования (9).

Здесь и далее задача линейного программирования решается симплекс-методом [4]. Это оправдывается сравнительно невысокой размерностью задач (не более чем сотни уравнений и переменных).

Решение задачи (9) будем называть линейным методом решения задачи *мягкой оптимизации*.

Задача 2 (жесткой оптимизации).

В рассматриваемой задаче будем использовать норму (5). Вместо квадрата нормы будем минимизировать саму норму (оптимальные решения \bar{x} при этом не меняются). Тогда задача 2 сводится к задаче линейного программирования следующего вида:

$$\begin{cases} \|Ax\| \rightarrow \sup, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Переход от (2) к (10) справедлив из-за неотрицательности матрицы A . Задачу (10) решаем симплекс-методом [4].

Задача 3 (максимизации дохода).

Данная задача является типичной задачей квадратичного программирования, широко известны ее свойства и численные методы решения [4, 5].

Все же попробуем провести свой анализ задачи, пользуясь ее специфичностью. Множество D определено выше и имеет вид $D = \{x \in R_+^s \mid A^*Ax = A^*b\}$.

Задача 3 может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} x^*Cx - px \rightarrow \inf \\ A^*Ax = A^*b \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для решения применим теорему Куна-Таккера в формулировке данной в работе [6]. Рассматривается задача:

$$\begin{cases} f_0(x) \rightarrow \inf \\ F(x) = 0 \\ f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ x \in Q. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь X, Y банаховы пространства; $F : X \rightarrow Y$ – аффинное отображение, т.е. $F(x) = y_0 + \Lambda x$, где $y_0 \in Y$, $\Lambda : X \rightarrow Y$ – линейный оператор; Q – выпуклое множество.

Теорема [6, с. 83]. Пусть в задаче (12) f_j ($j = 1, 2, \dots, n$) выпуклые функции на X , \bar{x} – решение этой задачи. Тогда существуют такие не все равные 0 множители Лагранжа $\lambda_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и линейный непрерывный функционал $\varphi \in Y^*$,

что $L(\bar{x}, \lambda_0, \dots, \lambda_n, \varphi) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j(\bar{x}) + \varphi(F(\bar{x})) = \min_{x \in Q} L(x, \lambda_0, \dots, \lambda_n, \varphi)$; $\lambda_j f_j(\bar{x}) = 0$,

$j = 1, \dots, n$ (условие дополняющей нежесткости).

Если же образ множества Q при отображении F содержит окрестность нуля пространства Y и существует $x \in Q$ $F(x) = 0$, $f_j(x) < 0$ для $j = 1, 2, \dots, n$, то $\lambda_0 \neq 0$ и можно считать $\lambda_0 = 1$. В последнем случае соотношение (13) достаточно для того, чтобы допустимое решение \bar{x} задачи (12) было оптимальным.

В соответствии с этой теоремой составим функцию Лагранжа для задачи (11):

$$L = \lambda_0(x^*Cx - px) + \lambda[A^*Ax - A^*b] - \mu \cdot x, \lambda_0 \geq 0, \mu \geq 0. \quad (13)$$

При этом $Q = X = R^s$. Случай $\lambda_0 = 0$ означает вырождение – в том смысле, что L не имеет минимума ни в какой конечной точке \bar{x} . Перейдем к невырожденному случаю $\lambda_0 = 1$ и получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x^*C - p + \lambda A^*A - \mu,$$

откуда появляется единственный кандидат в оптимальные решения $x = \frac{1}{2}C^{-1}[p - \lambda A^* A + \mu]^*$.

Возникает вопрос: как с помощью функции Лагранжа найти оптимальное решение \bar{x} ?

Обозначим $\eta = p - \lambda A^* A + \mu$, тогда условие на неизвестные принимает вид:

$$\frac{1}{2}A^* AC^{-1}\eta^* = A^* b. \quad (14)$$

Полученная система разрешима, так как разрешима система $A^* Ax = A^* b$ при $x \geq 0$. При этом $x = \frac{1}{2}C^{-1}\eta^*$. Из-за неотрицательности множителей Лагранжа $\mu_j \geq 0$ и условий дополняющей нежесткости для любого j выполняется равенство $\mu_j x_j = 0$, а значит $\mu_j \eta_j = 0$. Введем обозначение $v = \eta - \mu$, $v^+ = \eta$, $v^- = \mu$. Тогда $v = p - \lambda A^* A$, $\eta = v^+ = (p - \lambda A^* A)^+$ и уравнение (14) принимает вид:

$$\frac{1}{2}A^* AC^{-1}(p^* - A^* A \lambda^*)^+ = A^* b. \quad (15)$$

Попробуем решить уравнение (15). Обозначим $\tilde{A} = A^* A$, через J обозначим жорданову форму [3] матрицы \tilde{A} . Она имеет диагональный вид, и существует такая невырожденная матрица U , что $J = U^* \tilde{A} U$ и

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь r – ранг матрицы \tilde{A} (он равен рангу матрицы A). Из-за неотрицательной определенности матрицы \tilde{A} все $\alpha_j > 0$ для $j=1, \dots, r$. «Псевдообратную» по отношению к матрице J обозначим следующей матрицу:

$$J^- = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r^{-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Потребуется еще несколько обозначений. Если $B = AU$, то $B^* = U^* A^*$,

$J = B^* B$. Из вида матрицы J следует, что последние $(s - r)$ столбцов матрицы B состоят из нулей. Нам понадобится также вектор $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ при $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = JU^* \lambda^*$, где $z_1 - r$ -мерный; $z_2 - (s - r)$ -мерный вектор.

Через U_1 обозначим матрицу той же размерности $s \times s$, что и U , содержащую первые r столбцов матрицы U и нулевые остальные столбцы. Аналогично через U_2 обозначим матрицу, содержащую первые r нулевых столбцов, а остальные столбцы совпадают с соответствующими столбцами матрицы U . Далее используем следующие обозначения: $V = CU_2$, $W = U_1 + V$.

С учетом этих обозначений можем сделать следующие преобразования уравнения (15):

$$\begin{aligned} UJU^*C^{-1}(p^* - UJU^*\lambda^*)^+ &= 2A^*b, \\ JU^*C^{-1}(p^* - U_1z)^+ &= 2U^*A^*b, \\ U^*C^{-1}(p^* - U_1z)^+ &= 2J^-U^*A^*b + U_2z, \\ (p^* - U_1z)^+ &= 2CUJ^-U^*A^*b + Vz. \end{aligned}$$

Обозначим: $a = 2CUJ^-U^*A^*b$, тогда решение последнего уравнения совпадает с решением дизъюнкции следующих соотношений:

$$\left[\begin{array}{l} 1) (Vz + a)_j > 0 \Rightarrow (U_1z)_j = p_j - (Vz + a)_j \\ \text{или} \\ 2) (Vz + a)_j = 0 \Rightarrow (U_1z)_j \geq p_j, \end{array} \right.$$

для $j = 1, \dots, n$.

Полученные условия эквивалентны следующей системе уравнений и неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} (Wz - p^* + a) \cdot (Vz + a) = 0, \\ Vz + a \geq 0, \\ Wz - p^* + a \geq 0, \end{array} \right. \quad (16)$$

где рассматривается скалярное произведение векторов. Из этих преобразований вытекает следующее утверждение – решение задачи III следует из формулы

$$x = \frac{1}{2} C^{-1} (p^* - U_1z)^+,$$

где z – решение задачи (16).

Задача об ортогональности векторов

Условия дополняющей нежесткости в теореме Куна-Таккера и родственные им условия в различных задачах конечномерной оптимизации приводят к специфической задаче поиска двух ортогональных векторов с неотрицательными ком-

понентами. В нашем случае такая задача возникает при описании множества G решений задачи *мягкой оптимизации* (формула (6)), *задача максимизации* доходов свелась к такой же задаче (16). Сформулируем задачу точно. Применяемые ниже обозначения не имеют отношения к предыдущей части статьи.

Пусть A, B – квадратные матрицы размерности $n \times n$; векторы – $a, b \in R^n$.

Требуется найти $x \in R^n$ из условий:

$$\begin{cases} (Ax - a) \cdot (Bx - b) = 0, \\ Ax - a \geq 0, \\ Bx - b \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Задачу (17) предлагается решать следующей итерационной процедурой с помощью задач линейного программирования.

Введем функцию $\Psi(x, y) = (By - b) \cdot (Ax - a) + (Ay - a) \cdot (Bx - b)$. При фиксированном y рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \Psi(x, y) \rightarrow \inf, \\ Ax - a \geq 0, \\ Bx - b \geq 0. \end{cases} \quad (18)$$

Обозначим через $H = \{x \in R^n \mid Ax - a \geq 0, Bx - b \geq 0\}$ множество допустимых решений задачи (18). Итерационная процедура начинается с некоторого y_1 с условиями $Ay_1 - a \geq 0, By_1 - b \geq 0$. Если таких y_1 нет, то задача (17) не имеет решения. В случае существования такого y_1 полагаем $y_{k+1} = \bar{x}(y_k)$, где $\bar{x}(y_k)$ – оптимальное решение задачи (18) при $y = y_k$.

Последовательность $\Psi(x(y_k), y_k)$ убывает по k и конечна из-за конечности числа вершин многоугольника H . Достигнув за конечное число шагов наименьшего значения $\Psi(\bar{x}(y_k), y_k)$, ищем решение (17) из этого приближения одним из известных численных методов [4].

Задачу (17) можно решать с помощью подобной (18) линейной задачи. Коэффициенты в целевой функции можно варьировать и иными способами.

Примеры применения моделей и методов

Расчеты проведены на примерах, построенных по аналогии с данными о морских рыбных промыслах. Первый и второй примеры условно названы малым и большим соответственно размерам таблиц исходных данных. Эти примеры построены по аналогии с данными о рыбных промыслах в дальневосточных морях. Большой пример по объему данных соответствует реальным промыслам.

Третий пример придуман специально для случая непустого множества D с ненулевым значением функционала Φ на нем. Все исходные данные и результаты – в условных единицах.

В табл. 1 приведены данные о промыслах для *малого примера*.

Таблица 1

Объекты промысла	Способы промысла								Допустимый вылов
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	0.2	0.1	1.0	0.3	0.4	0.1	0.0	0.1	34.6
2	1.0	0.2	0.1	0.1	1.0	0.2	0.1	0.2	108.4
3	0.3	1.0	0.2	1.0	0.1	1.0	0.2	0.1	59.2
4	0.1	0.3	0.0	0.1	0.1	0.3	0.1	0.0	17.1
5	0.2	0.4	0.3	0.2	0.2	0.4	1.0	1.0	37.8
Затраты на вылов	0.001	0.005	0.003	0.009	0.002	0.004	0.006	0.008	
Доход	2	4	6	8	3	1.4	1	0.4	

Для задачи *мягкой оптимизации* представлено решение методом градиентного спуска. Причем вектор u задачи (9) не нулевой, т.е. множество D пусто, и потому задача *максимизации дохода* не имеет решения.

Задача *мягкой оптимизации* дает решение (рис. 1), по ряду объектов отклоняющееся в большую сторону от допустимого улова.

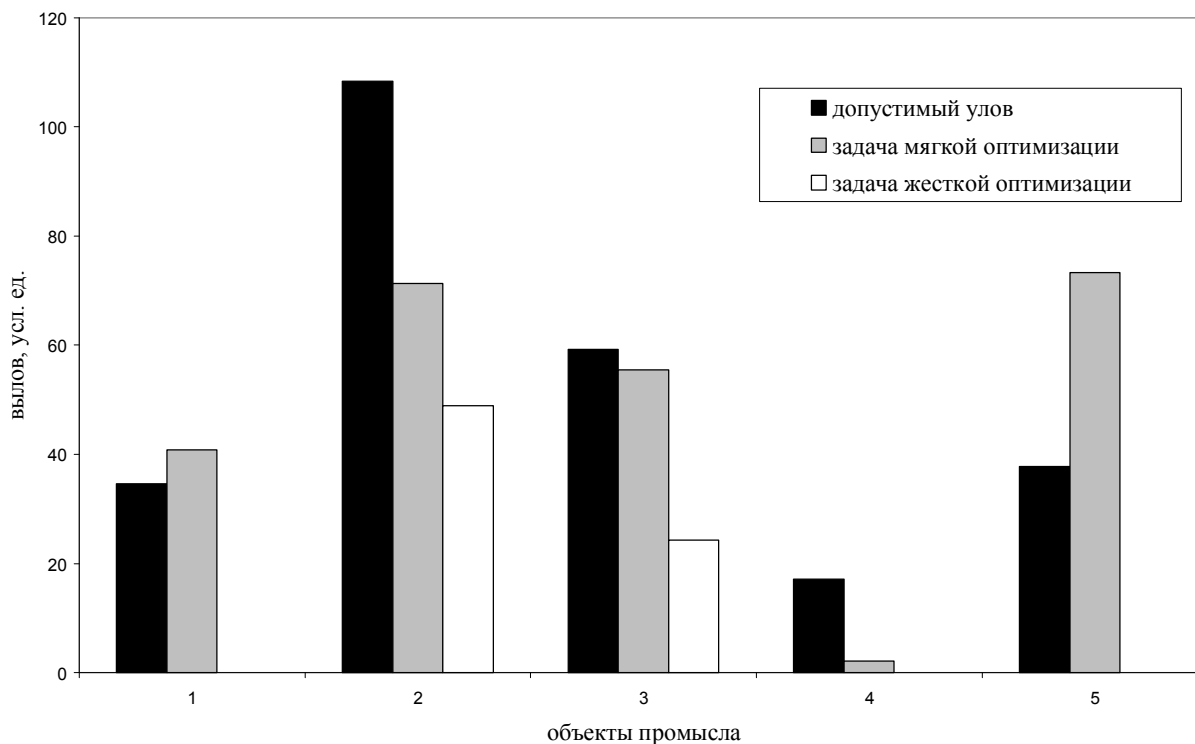


Рис. 1. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (малый пример).

В задаче *жесткой оптимизации* таких отклонений не может быть, но разрешенный охват объектов промыслов гораздо меньше.

Исходные данные о промыслах для *большого примера* приведены в табл. 2. Для задачи *мягкой оптимизации* решение получено методом градиентного спуска. Судя по решениям задач *мягкой и жесткой оптимизации* (рис. 2), большой пример лучше сбалансирован по исходной информации, чем малый.

Решения задач здесь гораздо ближе к допустимым уловам. На этом фоне

малый пример может рассматриваться как парадоксальный (или, как минимум, «неудобный») для рыбных промыслов. Малый пример показывает, что задачи оптимизации рыбного промысла могут плохо работать на «плохом» наборе данных.

Таблица 2

Объекты промысла	Способы промысла												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	0.02	0.3	0.001	0.003	0	0.2	0.05	0.02	0.05	0
2	0.08	0.01	0.03	0.005	0.01	0	0.001	0	0.05	0.01	1	1	1
3	0.03	0.15	0.2	1	1	0.03	0.03	0.1	0.25	0.05	0.01	0.05	0.15
4	0	0	0	0.25	0.05	1	1	1	0.04	0.005	0	0	0
5	0.04	0	0	0.001	0.002	0	0	0	0.1	0.001	0.2	0.04	0.07
6	0	0	0	0.02	0.04	0.005	0.002	0	0.08	0.02	0	0	0
7	0.02	0.1	0.6	0.01	0.1	0.001	0.005	0	1	1	0	0	0
8	0.03	0.09	0.2	0.01	0.08	0.002	0.005	0	0.15	0.07	0	0	0
9	0	0.05	0.3	0.005	0.04	0	0	0	0.2	0.05	0	0	0
10	0.01	0.002	0	0.003	0.001	0.001	0	0.01	0	0.004	0.05	0	0
11	0.02	0	0	0.001	0.002	0	0	0	0	0.005	0	0	0
12	0	0.03	0	0	0	0.002	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0.002	0	0	0.01	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0.001	0	0	0	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
Затраты на вылов	2	4	6	8	3	1.4	1	0.4	4	6	3	1.4	1
Доход	0.001	0.005	0.003	0.009	0.002	0.004	0.006	0.008	0.001	0.005	0.003	0.009	0.002

Продолжение табл. 2

Объекты промысла	Способы промысла							Допустимый вылов
	14	15	16	17	18	19	20	
1	0	0.05	0.01	0.02	0.01	0.08	0.002	10
2	1	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04	0.005	1.5
3	0.02	0	0.17	0.04	0	0	0.02	120
4	0	0	0.05	0	0	0	0	75
5	0.06	0.03	0.02	0.01	0.001	0.001	0	0.08
6	0.08	1	1	0.06	0	0.002	0	2
7	0	0.05	0.04	0.05	0	0.15	0.1	15
8	0	0.08	0.2	0	0	1	1	5
9	0.04	0	0.02	0	0	0.1	0	3
10	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0.06	0.1	1	1	0	0	2
12	0	0	0	0	0	0	0	4
13	0	0	0	0	0	0	0	0.5
14	0	0.1	0.02	0.004	0	0	0	12
15	0	0	0.005	0	0.05	0	0	0.3
Затраты на вылов	2	4	6	8	3	1	0.4	
Доход	0.005	0.003	0.009	0.002	0.004	0.006	0.008	

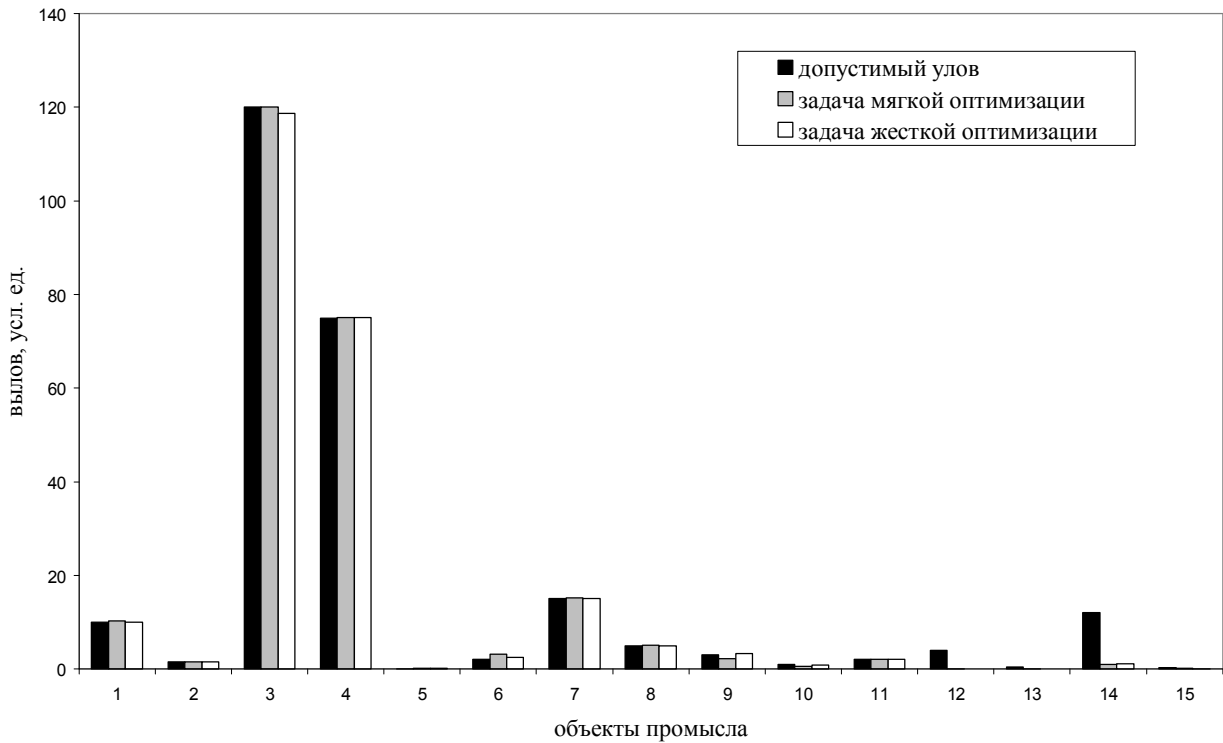


Рис. 2. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (большой пример).

Специальный пример. Данные о промыслах в табл. 3 подобраны так, что множество D непусто. В этом случае мы можем решать задачу максимизации дохода. Решение такой задачи оказывается близким к решению задачи мягкой оптимизации, хотя в общем случае эти решения различны.

Таблица 3

Объекты промысла	Способы промысла				Допустимый вылов
	1	2	3	4	
1	1/11	2/11	2/11	1/11	1.0
2	2/11	1/11	1/11	2/11	2.0
3	1/11	1/11	1/11	1/11	3.0
Затраты на вылов	0.2	0.1	0.1	0.2	
Доход	0.8	0.2	0.2	4.4	

Для сравнения всех примеров можно предложить некоторый критерий качества решений приведенных задач. В роли такого критерия рассмотрим $q = \sqrt{\Phi/m}$, где Φ – значение функционала (1). Этот критерий учитывает размерность задачи и квадратичность функционала Φ . Решение тем лучше, чем меньше значение q .

Из табл. 4 видно, что в задаче мягкой оптимизации линейный метод может оказаться лучше градиентного. Задача жесткой оптимизации проигрывает по этому критерию задаче мягкой оптимизации из-за более жестких условий на решение.

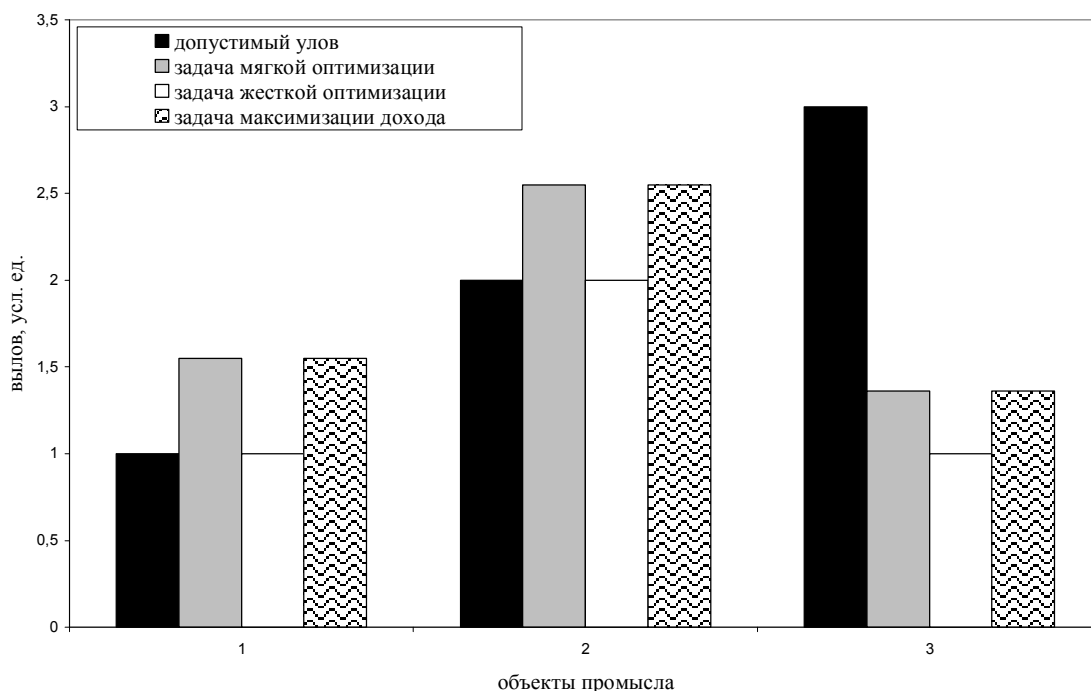


Рис. 3. Объемы выловов в задачах мягкой и жесткой оптимизации (специальный пример).

Таблица 4

Примеры	Задача мягкой оптимизации		Задача жесткой оптимизации	Задача максимизации дохода	
	метод градиентного спуска	линейный метод		q	Ψ
			Малый	24.17	24.45
Большой	3.06	3.02	10.14	—	—
Условный	1.04	1.04	1.15	1.04	25.2

Заключение

В статье приведен анализ задач оптимального распределения квот при морском рыбном промысле. Несмотря на нелинейность ряда задач, удается сводить их к линейным или решать линейными методами. Для убедительности приводятся примеры расчетов, иллюстрирующих модельные представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумов А.И., Бочаров Л.Н., Каредин Е.П. Модельный анализ многовидовых рыбных промыслов // Известия ТИНРО. – 2004. – Т. 138. – С.220-224.
2. Иванко Н.С., Абакумов А.И. Анализ задачи о рациональном распределении разрешений на вылов при рыбном промысле // Научные труды Дальрыбвтуза. – Владивосток: Изд-во Дальрыбвтуза, 2007.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
4. Измаилов А.Ф. Численные методы в оптимизации. – М.: Физматлит, 2005.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Физматлит, 2001.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.