



УДК 517.977.5

© 2008 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук,
Н.В. Кван,
Н.П. Семичевская, канд. техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ СО СТАЦИОНАРНЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ И БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЮ¹

Работа посвящена задаче синтеза робастных алгоритмов для систем управления априорно неопределенными неустойчивыми нелинейными скалярными объектами с использованием стационарного наблюдателя Льюенбергера и малоинерционной явно-неявной эталонной модели.

Введение

При проектировании робастных и/или адаптивных систем, в которых желаемое поведение объекта управления формируется с помощью эталонной модели, часто приходится сталкиваться с проблемой получения информации о недоступных измерению переменных состояниях объекта. Один из подходов к решению таких проблем связан с использованием наблюдателей [1 – 4, 6], позволяющих получить оценки переменных состояния объекта управления.

В данной работе предлагается при синтезе системы управления скалярным нелинейным объектом использовать стационарный наблюдатель полного порядка и быстродействующую явно-неявную эталонную модель (БЭМ). Показано, что применение БЭМ повышает эффективность оценок переменных состояния и допускает упрощение технической реализации эталона.

Математические модели системы управления и постановка задачи

В условиях априорной параметрической неопределенности рассматривается нелинейный объект управления, динамика которого в пространстве состояний описывается уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{\xi}(x, t) + bu(t) + f_{\xi}(t), \quad y(t) = L^T x(t) = x_1(t), \quad \xi \in \Xi, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» и тематического плана НИР АмГУ, проводимых по заданию Рособразования в 2008 г. по теме «Модели и алгоритмы непрерывных и гибридных систем управления априорно неопределенными нелинейно-нестационарными объектами».

где $x^T(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ – вектор состояния; $u(t)$ и $y(t)$ – скалярные управление и выход; $f_\xi^T(t) = [0, \dots, 0, f_n(t)]$ – возмущение; ξ – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству Ξ , $|f_n(t)| \leq f_0^2 = \text{const}$; $b^T = [0, \dots, 0, 1]$. Предполагается, что нелинейная векторная функция $A_\xi(x, t)$ представима в виде:

$$\begin{aligned} A_\xi(x, t) &= A(\xi)x(t) + b\delta_\xi(x_1(t)), \quad A(\xi) = A = A_M + b\chi_0^T(\xi), \quad \chi_0(\xi) = \chi_0, \\ \delta_\xi(x_1(t)) &= |x_1(t)|^{\alpha(\xi)} \text{sign}(x_1(t)), \quad \alpha(\xi) = \alpha, \quad \xi \in \Xi, \end{aligned} \quad (2)$$

где A_M – желаемая матрица; A , χ_0 и α – соответственно некоторые стационарные матрица, вектор и скаляр, $0 < \alpha \leq 1$.

Пусть требуемая динамика БЭМ задана уравнениями

$$\frac{dz_M(t)}{dt} = a_0 z_M(t) + a_0 r(t), \quad y_M(t) = z_M(t), \quad (3)$$

где $z_M(t)$, $y_M(t)$, $r(t) \in R$ – соответственно эталонная переменная, выход и задающее воздействие; $a_0 = \text{const} > 0$ – достаточно большое число.

Поскольку при некоторых числах n и $m = (n - 1)$ передаточная функция БЭМ (3) допускает эквивалентную форму записи вида

$$W_{\text{БЭМ}}(s) = \frac{a_0}{s + a_0} = \frac{a_0(s + a_0)^m}{(s + a_0)^n}, \quad (s + a_0)^k = s^k + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i a_0^i s^{k-i} + a_0^k, \quad k = n, m,$$

где каждый коэффициент θ_i определен тем или иным числом сочетаний

$$\theta_1 = \frac{k!}{(k-1)!1!}, \quad \theta_2 = \frac{k!}{(k-2)!2!}, \quad \theta_3 = \frac{k!}{(k-3)!3!} \text{ и т.д.},$$

то, определив собственные числа матрицы A_M из тождества $\det(sE - A_M) = (s + a_0)^n$, а также выбрав некоторый вектор g из условия $g^T(sE - A_M)^+ b = a_0(s + a_0)^{n-1}$, где $(\cdot)^+$ – соответствующая присоединенная матрица, – другими словами, обеспечив выполнение соотношения $g^T = [g_1, g_2, \dots, g_n] = a_0[a_0^{n-1}, \theta_{n-2}a_0^{n-2}, \dots, 1]$, математическую модель БЭМ (3) аналогично [5, 6] представим следующим образом:

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M x_M(t) + br(t), \quad v_M(t) = y_M(t) = g^T x_M(t), \quad (4)$$

где $x_M(t) \in R^n$ – вектор состояния эталона; $v_M(t) \in R$ – обобщенный выход эталона. Очевидно, что передаточная функция БЭМ вида (4), приобретая новую форму записи, сохраняет прежние значения

$$W_{\text{БЭМ}}(s) = g^T (sE - A_M)^{-1} b = \frac{g^T (sE - A_M)^+ b}{\det(sE - A_M)} = \frac{a_0}{s + a_0}.$$

Если теперь для системы управления (1), (2), (4) ввести в рассмотрение ошибку $e(t) = (x_M(t) - x(t))$ и типовое математическое описание вида

$$\frac{de(t)}{dt} = A_M e(t) + b\mu(t), \quad (5)$$

$$v(t) = g^T e(t) = g^T (x_M(t) - x(t)), \quad (6)$$

$$\mu(t) = r(t) - u(t) - \chi_0^T x(t) - \delta(x_1(t)) - f_n(t),$$

где $v(t)$ – обобщенный выход системы управления; $\mu(t)$ – видоизмененное управ-

ление, то оказывается, что система (5), (6) технически не реализуема. Действительно, за исключением переменной $x_1(t)$, другие элементы вектора $x(t)$ измерению недоступны, следовательно, обеспечить работоспособность системы управления (5), (6) можно только осуществив восстановление недостающих переменных состояния.

Оценку вектора $x(t)$ будем проводить по наблюдениям за текущим изменением выхода объекта $y(t)$, используя аналогично [1 – 4], наблюдатель полного порядка

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A_*\bar{x}(t) + bu(t) + Ny(t), \quad \bar{y}(t) = L^T\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t), \quad \bar{v}(t) = \bar{g}^T\bar{x}(t), \quad (7)$$

где $\bar{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния наблюдателя; $\bar{v}(t) \in R$ – обобщенный выход наблюдателя; $A_* = (A_M - NL^T)$ – матрица состояния наблюдателя, собственные числа которой получают заданные значения за счет соответствующей матрицы N ; значения элементов матрицы N вычисляются из условия равенства соответствующих коэффициентов полиномов $\det(sE - A_*)$ и $\det(sE - A_M + NL^T)$; $\bar{g} = gK^{-1}$; K – коэффициент согласования в установившемся режиме значений $\bar{v}(t)$ и $v_M(t)$, величина которого определяется соотношением $K = \lim_{s \rightarrow 0} g^T (sE - A_*)^{-1} N = -g^T A_*^{-1} N$.

Как показано в [2], чтобы обеспечить быстрый темп стабилизации невязки $\bar{e}(t) = (x(t) - \bar{x}(t))$, корни характеристического уравнения $(sE - A_*)$ должны лежать существенно левее корней характеристического уравнения $(sE - A_M)$, что для матриц A_M и A_* всегда выполнимо. При этом аналогично [2, 4] асимптотическое поведение невязки $\bar{e}(t)$ будет удовлетворять соотношению $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}(t) = 0$, что позволяет в системе управления (5), (6), учитывая (7), заменить вектор состояния $x(t)$ его оценкой $\bar{x}(t)$ и получить технически реализуемые уравнения обобщенного выхода и видоизмененного управления

$$\begin{aligned} v(t) &\cong g^T \bar{e}(t) = g^T (x_M(t) - \bar{x}(t)), \\ \mu(t) &\cong r(t) - u(t) - \chi_0^T \bar{x}(t) - \delta(\bar{x}_1(t)) - f_n(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, если при решении соответствующей задачи синтеза алгоритмов системы управления (5), (6) использовать математическое описание (5), (8) и уравнение (7), дающее оценку $\bar{x}(t)$, то алгоритмы, полученные для системы управления (5), (7), (8), будут применимы для систем (5) – (7) и (1), (2), (4), (7).

Постановка задачи. Требуется для системы (5), (7), (8), функционирующей в условиях априорной неопределенности параметров $\xi \in \Xi$ и начальных условий $x(0)$, определить явный вид закона управления

$$u(t) = u(r(t), \bar{x}(t)) \quad (9)$$

таким образом, чтобы имело место выполнение предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - \bar{x}(t)\| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_M(t) - x(t)\| \leq \bar{\delta}_x^2, \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - \bar{y}(t)| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| \leq \bar{\delta}_y^2, \quad (11)$$

где $\delta_x^2, \delta_y^2 = const$ – некоторые относительно малые числа.

Синтез робастного закона управления

Синтез алгоритма системы управления на основе критерия гиперустойчивости, следуя [6], будем проводить поэтапно.

Первый этап. Как уже отмечалось, используя оценку (7), математическое описание системы (1), (2), (4) или эквивалентной системы (5), (6), с учетом замены (8), будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= A_M e(t) + b\mu(t), \\ v(t) &= g^T \bar{e}(t) = g^T (x_M(t) - \bar{x}(t)), \\ \mu(t) &= r(t) - u(t) - \chi_0^T \bar{x}(t) - \delta(\bar{x}_1(t)) - f_n(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Второй этап. Очевидно, что условие строгой положительной определенности для вещественной части частотной передаточной функции стационарной части системы (12) выполнено, поскольку для апериодического звена первого порядка всегда имеет место частотное неравенство

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \operatorname{Re} g^T (j\omega E - A_M)^{-1} b = \frac{a_0}{\sqrt{\omega^2 + a_0^2}} > 0, \quad (13)$$

$$\forall \omega \in (-\infty, +\infty).$$

Третий этап. Разрешение интегрального неравенства В.М. Попова (ИНП)

$$\eta(0, t) = -\int_0^t \mu(s)v(s)ds \geq -\gamma^2 = const, \quad \forall t > 0, \quad (14)$$

рассматриваемого относительно нелинейной нестационарной части системы (12), связано с синтезом явного вида закона управления $u(t)$. Для упрощения процедуры построения алгоритма $u(t)$ представим его в виде четырех составляющих и перепишем левую часть выражения (14) следующим образом:

$$\eta(0, t) = -\int_0^t [r(s) - \sum_{i=0}^3 u_i(s) - \chi_0^T \bar{x}(s) - \delta(\bar{x}_1(s)) - f_n(s)]v(s)ds = \sum_{i=0}^3 \eta_i(0, t),$$

где

$$\eta_0(0, t) = \int_0^t \chi_0^T \bar{x}(s)v(s)ds + \int_0^t u_0(s)v(s)ds, \quad (15)$$

$$\eta_1(0, t) = \int_0^t \delta(\bar{x}_1(s))v(s)ds + \int_0^t u_1(s)v(s)ds, \quad (16)$$

$$\eta_2(0, t) = \int_0^t u_2(s)v(s)ds - \int_0^t r(s)v(s)ds, \quad (17)$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^t u_3(s)v(s)ds + \int_0^t f_n(s)v(s)ds. \quad (18)$$

Выполним оценку введенных в рассмотрение интегралов. Во-первых, преобразуем интеграл (15) к виду:

$$\begin{aligned}
\eta_0(0,t) &= \int_0^t \left(\chi_0^T \bar{x}(s) + u_0(s) \right) v(s) ds \pm h_0 \sum_{i=1}^n \int_0^t (\bar{x}_i(s))^2 v^2(s) ds \pm \\
&\pm \frac{\chi_{01}^2}{4h_{01}} \pm \frac{1}{4h_0} \sum_{i=2}^n \chi_{0i}^2 \geq -\frac{\chi_{01}^2}{4h_{01}} - \frac{1}{4h_0} \sum_{i=2}^n \chi_{0i}^2 + \\
&+ \int_0^t \left(u_0(s) - h_{01} (\bar{x}_1(s))^2 - h_0 \sum_{i=2}^n (\bar{x}_i(s))^2 \right) v(s) ds
\end{aligned} \tag{19}$$

и определим составляющую $u_0(t)$ уравнением

$$u_0(t) = h_{01} (\bar{x}_1^2(t)) + h_0 \sum_{i=2}^n (\bar{x}_i(t))^2 v(t), \quad h_{01}, h_0 = const > 0. \tag{20}$$

В результате получим оценку

$$\eta_0(0,t) \geq -\frac{\chi_{01}^2}{4h_{01}} - \frac{1}{4h_0} \sum_{i=2}^n \chi_{0i}^2 = -\gamma_0^2 = const, \quad \forall t > 0. \tag{21}$$

Во-вторых, с учетом (2), если интеграл (16) преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
\eta_1(0,t) &= \int_0^t \left| \bar{x}_1(s) \right|^\alpha v(s) \text{sign}(\bar{x}_1(s)) ds + \int_0^t u_1(s) v(s) ds \pm \int_0^t \left| \bar{x}_1(s) \right|^\alpha |v(s)| ds \pm \\
&\pm h_1 \int_0^t \left| \bar{x}_1(s) \right|^{2\alpha} v^2(s) ds \pm \frac{1}{4h_1} \geq \int_0^t u_1(s) v(s) ds - h_1 \int_0^t \left| \bar{x}_1(s) \right|^{2\alpha} v^2(s) ds - \\
&- \frac{1}{4h_1} \pm h_1 \int_0^t \left(\left| \bar{x}_1(s) \right|^2 + 1 \right) v^2(s) ds + h_1 \left(\frac{1}{2h_1} - \int_0^t \left| \bar{x}_1(s) \right|^\alpha |v(s)| ds \right)^2 \geq \\
&\geq \int_0^t \left(u_1(s) - h_1 (\bar{x}_1^2(s) + 1) \right) v(s) ds - \frac{1}{4h_1},
\end{aligned} \tag{22}$$

то можно синтезировать составляющую алгоритма управления

$$u_1(t) = h_1 (\bar{x}_1^2(t) + 1) v(t), \quad h_1 = const > 0, \tag{23}$$

со следующей оценкой интеграла (16):

$$\eta_1(0,t) \geq -0.25h_1^{-1} = -\gamma_1^2 = const, \quad \forall t > 0. \tag{24}$$

В-третьих, если составляющие алгоритма управления $u_2(t)$ и $u_3(t)$ сформировать согласно уравнениям

$$u_2(t) = h_2 r^2(t) v(t), \quad u_3(t) = h_3 v(t), \quad h_2, h_3 = const > 0, \tag{25}$$

то подобно преобразованиям, выполненным в соотношениях (19), (22), для интегралов (17) и (18) можно вывести следующие оценки:

$$\eta_2(0,t) \geq -0.25h_2^{-1} = -\gamma_2^2 = const, \tag{26}$$

$$\eta_3(0,t) \geq -0.25f_0^4 h_3^{-1} = -\gamma_3^2 = const, \quad \forall t > 0.$$

Окончательно, объединяя уравнения (20), (23) и (25), получим следующий

явный вид закона управления (9):

$$u(t) = (h_0 \bar{x}^T(t) \bar{x}(t) + h_2 r^2(t))v(t) + h_4 v(t), \quad (27)$$

где числа $h_0 = h_{01} + h_1$ и $h_4 = h_1 + h_3$.

В результате, учитывая интегралы (15) – (18) и оценки (21), (24), (26), имеем выполнение ИНП (14), в котором величина $\gamma^2 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = const$, что на данном этапе синтеза и требовалось доказать.

Четвертый этап. Покажем, что в системе (7), (12), (27) достижимо выполнение поставленных целей управления (10), (11).

Действительно, поскольку для системы (12), (27), использующей наблюдатель (7), выполнены частотное и интегральное неравенства (13) и (14), система управления (7), (12), (27) гиперустойчива, следовательно, достижимы предельные условия (10) и (11). Кроме того, поскольку цели управления (10), (11) имеют место при любых начальных значениях $x(0)$ и в условиях априорной неопределенности $\xi \in \Xi$, то система управления (7), (12), (27) является робастной в рассматриваемом классе Ξ .

Поскольку система (7), (12), (27) и система (5) – (7), (27) или (1), (2), (4), (7), (27) эквивалентны, то они также будут робастными в заданном классе Ξ и в них будут достижимыми и цели управления (10), (11). Структурная схема робастной системы управления (1), (2), (4), (7), (27) представлена на рис. 1.

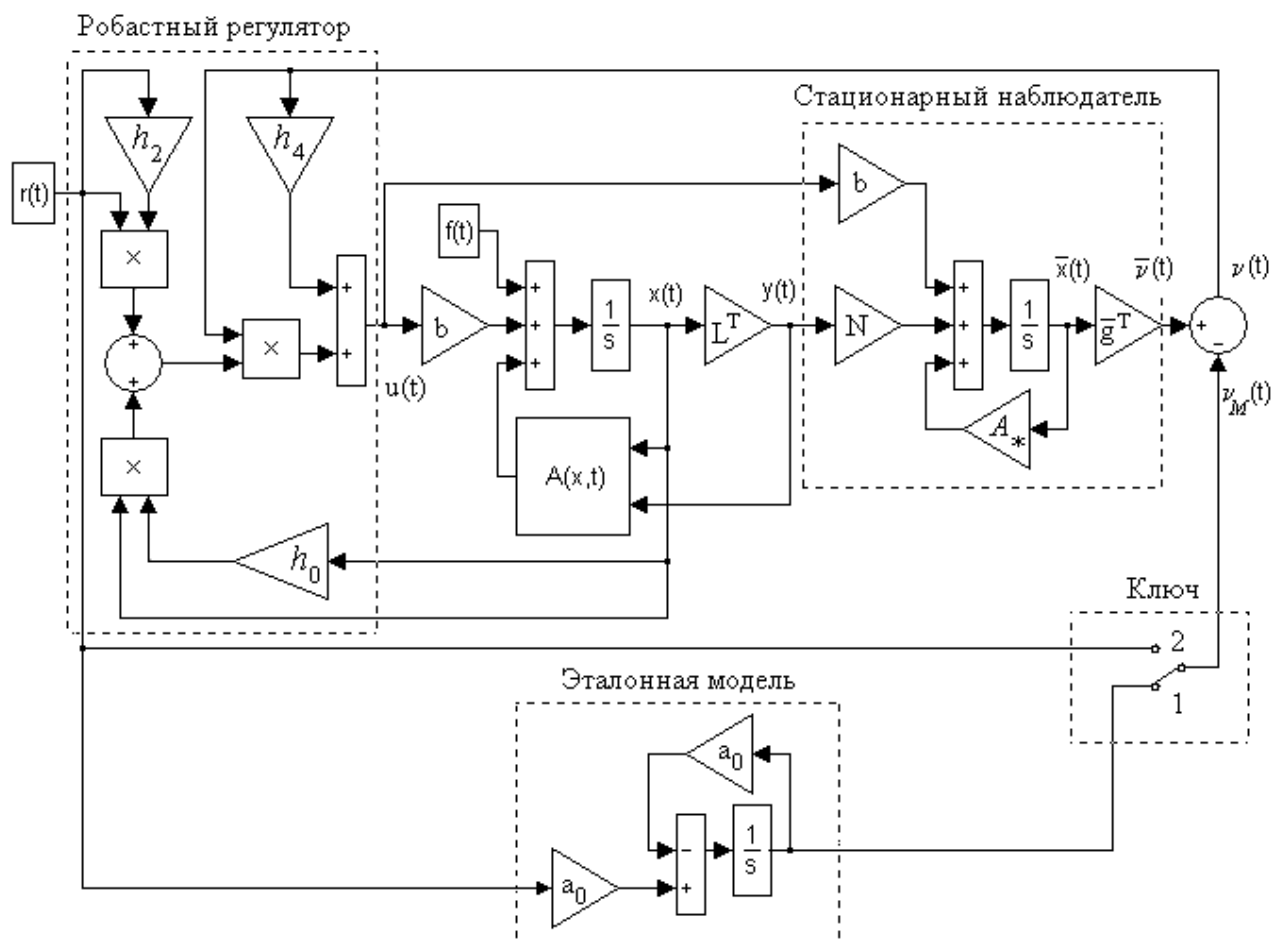


Рис. 1. Структурная схема системы с быстродействующей явно-неявной эталонной моделью.

Иллюстративный пример

Рассматривается робастная система (1), (2), (4), (7), (27), подверженная действию внешнего возмущения

$$f_3(t) = 0.3 \sin(0.1t), \quad |f_3(t)| \leq f_0^2 = 0.3. \quad (28)$$

В описании объекта (1) нелинейная векторная функция имеет вид:

$$A^T(x, t) = \left(x_2(t), x_3(t), -2.5x_1(t) + 0.5x_2(t) - 8.5x_3(t) + |y(t)|^{0.3} \text{sign}(y(t)) \right). \quad (29)$$

Задающее воздействие $r(t)$ в системе (1), (2), (4), (7), (27) сформировано следующим образом:

$$T \frac{dr(t)}{dt} = r(t) + q(t), \quad T = 5, \quad q(t) = 0.6 + (\cos 0.05t) \sin 0.025t. \quad (30)$$

В эталонной модели (4) коэффициент a_0 выбран со значением равным 10, что соответствует заданию: для матрицы A_M – собственных чисел $s_{M1} = s_{M2} = s_{M3} = -10$; для обобщенного выхода $v_M(t)$ – вектора $g^T = [g_1, g_2, g_3] = [1000, 200, 10]$.

В таком случае, рассматривая динамические свойства модели (4) по отношению к поведению $r(t)$, эталонную модель можно считать быстродействующей. Действительно, как показывают результаты моделирования (рис. 2), графики $r(t)$ и $v_M(t)$ фактически совпадают, а величина максимального рассогласования $\Delta(t) = r(t) - v_M(t)$ мала и не превышает $\pm 0.2\%$.

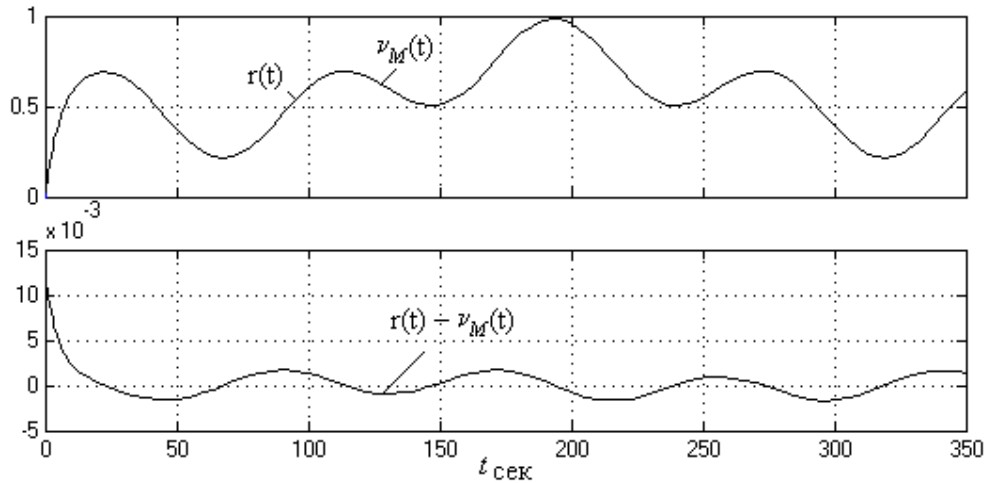


Рис. 2. Динамика рассогласования между входом и выходом БЭМ.

Для наблюдателя (7) собственные числа матрицы A^* заданы лежащими существенно левее собственных чисел матрицы A_M и выбраны со значениями: $s_{*1} = s_{*2} = s_{*3} = -50$. При таких матрицах A^* , A_M и известной матрице L^T из выполнения условия $\det(sE - A^*) = \det(sE - A_M + NL^T)$ можно рассчитать значения как элементов матрицы $N^T = [N_1, N_2, N_3] = [120, 3600, -20000]$, так и коэффициента согласования K , а также числовые значения элементов вектора \bar{g}^T , необходимых для вычисления обобщенного выхода наблюдателя $\bar{v}(t)$, которые примут следующие значения:

$$K = -g^T A_*^{-1} N = 512, \quad \bar{g}^T = g^T K^{-1} = (1.9531, 0.3906, 0.0195). \quad (31)$$

В ходе моделирования коэффициенты робастного закона управления (27) были выбраны со следующими значениями:

$$h_0 = 25, h_2 = 200, h_4 = 300. \quad (32)$$

На рис. 3 показаны изменения ошибки регулирования $e_{БЭМ}(t) = v_M(t) - y(t)$ и управляющего воздействия $u(t)$ в системе управления (1), (2), (4), (7), (27) – (32).

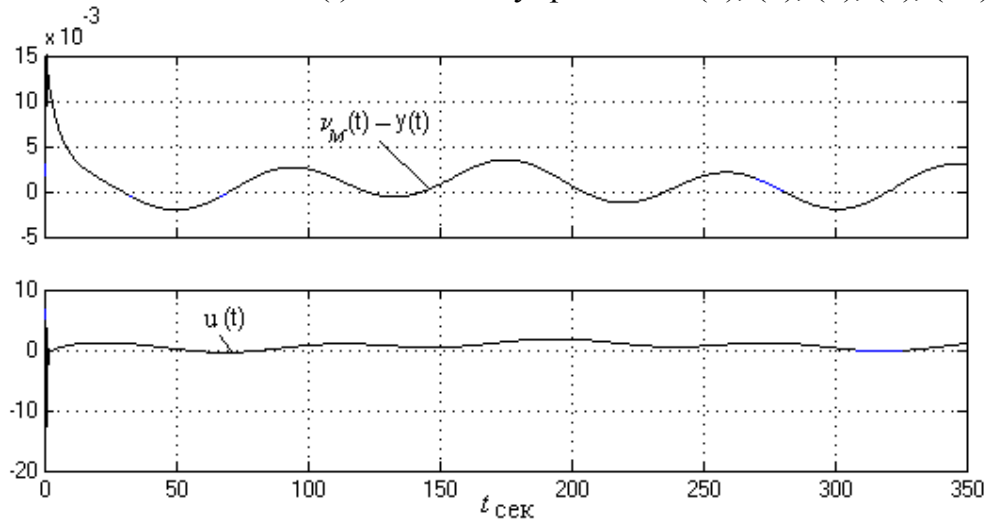


Рис. 3. Динамика ошибки регулирования $e_{БЭМ}(t)$ и управления $u(t)$.

Обратим внимание на то, что структурная системы (1), (2), (4), (7), (27) допускает упрощение, т.е. поскольку БЭМ (4) – быстродействующая и $v_M(t) \approx r(t)$, то системе управления (1), (2), (4), (7), (27) в качестве альтернативы можно противопоставить систему (1), (2), (7), (27). Для построения системы (1), (2), (7), (27) достаточно заменить БЭМ вида (4) на неявную эталонную модель (НЭМ). На структурной схеме системы управления (см. рис. 1) такой переход означает переключение ключа из положения 1 в положение 2. Сопоставляя показатели качества управления в системах (1), (2), (4), (7), (27) и (1), (2), (7), (27), на основании результатов моделирования (рис. 4) можно обоснованно полагать, что такое упрощение правомочно, так как величина рассогласования ($e_{БЭМ}(t) - e_{НЭМ}(t)$), $e_{НЭМ}(t) = r(t) - y(t)$ существенно мала и в установившемся режиме не превышает $\pm 0.002\%$.

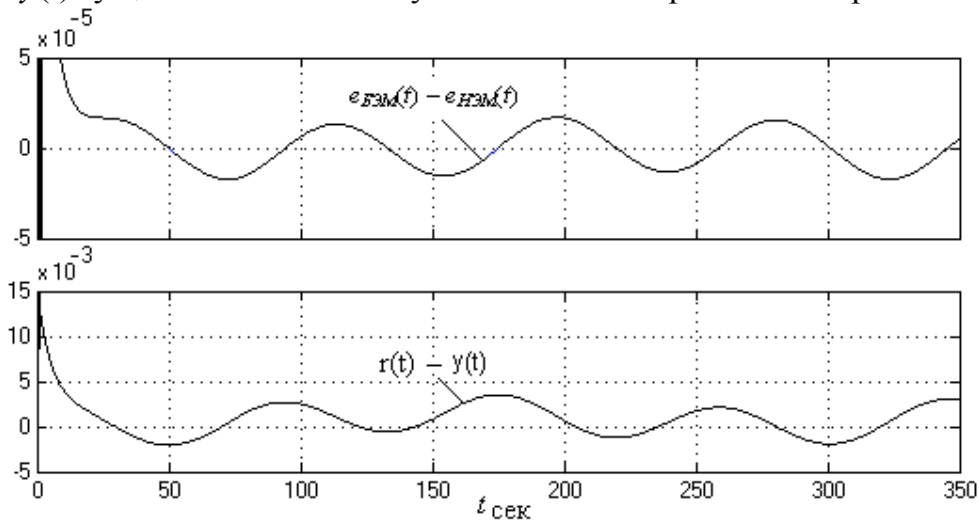


Рис. 3. Динамика рассогласования ($e_{БЭМ}(t) - e_{НЭМ}(t)$) и ошибки $e_{НЭМ}(t)$.

Важно отметить, что обе рассматриваемые системы обладают достаточно хорошим качеством управления, поскольку при ограниченном управляющем воздействии выход объекта управления $y(t)$ практически с первых моментов времени отслеживает желаемое поведение (рис. 5), формируемое любым из сигналов $v_M(t)$ или $r(t)$.

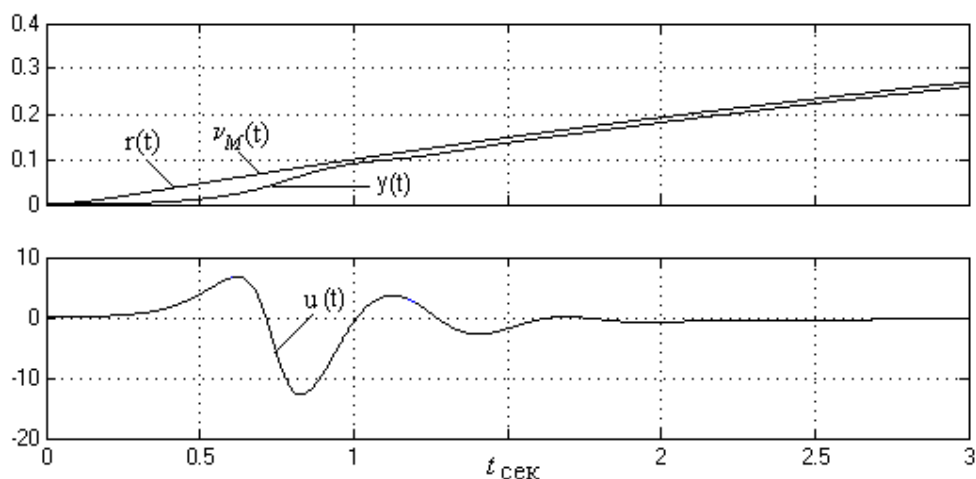


Рис. 5. Динамика робастной системы в начале процесса управления.

Заключение

Предложенный в статье способ построения робастных систем управления скалярными нелинейными объектами, с применением быстродействующей эталонной явно-неявной моделью и стационарного наблюдателя полного порядка, позволяет построить высококачественные системы автоматического управления, в которых имеет место высокий темп как стабилизации невязки, так и уменьшения ошибки регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Краснова С.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова, 2003.
3. Семичевская Н.П. Нелинейное робастное управление нестационарными объектами со стационарным наблюдателем // Информатика и системы управления. – 2006. – №1(11). С.202 – 211.
4. Еремин Е.Л., Семичевская Н.П., Чепак Л.В. Нелинейно-робастная система управления с явно-неявным эталоном для нестационарных SISO-объектов с запаздыванием по состоянию // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2007. – №1. – С.4-20.
5. Еремин Е.Л., Чепак Л.В. Алгоритмы робастного нелинейного управления нестационарными скалярными объектами // Информатика и системы управления. – 2007. – №1(13). – С.149-160.
6. Еремин Е.Л., Галаган Т.А., Семичевская Н.П. Нелинейное робастное управление нестационарными объектами. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2006.