



УДК 519.7

© 2009 г. **А.И. Абакумов**, д-р физ.-мат. наук
(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток),
Е.В. Пахт
(Дальрыбвтуз, Владивосток)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДАННЫХ

Одной из особенностей биологических и экологических систем является неопределенность знаний об их состоянии и функционировании. Предлагается соответствующее математико-модельное описание применительно к неопределенности данных о состоянии системы, его эффективность демонстрируется на примере водной экосистемы.

Ключевые слова: математическое моделирование, неопределенность данных, дифференциальные уравнения, экологическая система.

Введение

Математическое моделирование процессов самого разного характера сталкивается с проблемой приближенности, неопределенности данных о моделируемой системе и происходящих в ней процессах. Биологические и экологические системы сложны по структуре и разнокачественны по происходящим в них процессам. Для таких систем неопределенность знаний о них, кроме возможных технических и методических погрешностей измерений, может иметь принципиальное значение: система находится в движении и развитии, точное ее состояние нам неизвестно ввиду ее сложности. С другой стороны, точное знание в данном случае и не требуется, знания о состоянии системы и ее динамике нужны с приближением в некоторых допустимых пределах. Неопределенность в информации о системе порождает неопределенность траектории движения системы. Возникающие пучки возможных траекторий имеют свойства, качественно отличающиеся от свойств точных траекторий. Но точные траектории, их свойства могут служить опорой при исследовании свойств пучков возможных траекторий.

Такой подход иллюстрируется примером модели для водной экосистемы.

Моделирование с неопределенностью

Основу моделирования для динамической системы составляет система дифференциальных уравнений

$$x = f(t, x). \quad (1)$$

Если в некоторой области $T \times D \subset R \times R^n$ изменения (t, x) существует единственное решение системы уравнений (1), то по начальным данным можно вычислить состояние $x(t)$ системы в любой допустимой точке t . Здесь T – промежуток изменения переменной времени $t \in T$, D – открытое, связное, инвариантное относительно системы (1) множество значений $x \in D$.

Условия (*). Функцию $f(t, x)$ предполагаем непрерывной и непрерывно дифференцируемой по $x \in D$ для всех $(t, x) \in T \times D$. Будем предполагать также, что система уравнений (1) имеет единственное решение $x(t) \in D$ для всех $t \in T$ при любом начальном условии $x(t_0) = x_0$ с $(t_0, x_0) \in T \times D$.

Если начальное состояние системы известно приблизительно, то описание на основе системы (1) может быть изменено на основе теории нечетких множеств [1].

Пусть $\varphi(t, x)$ функция принадлежности состояния системы заданному значению x в момент времени t , $\varphi: T \times D \rightarrow R$. Чем больше $\varphi(t, x)$, тем с большей надежностью мы можем говорить о состоянии системы $x \in D$ в момент времени $t \in T$. Эта функция и определяет нечеткое множество состояний системы в момент времени t .

Обозначим через $\chi(t, \tau, x_\tau)$ решение $x(t)$ системы уравнений (1) в момент времени t при условии $x(\tau) = x_\tau$. Там, где не будет возникать недоразумений, будем обозначать $\chi(t, t_0, x_0)$ через x_t для сокращения записи.

Пусть Ω_0 – замкнутая ограниченная область в D . Тогда $\Omega_t = \chi(t, t_0, \Omega_0)$ – также замкнутая ограниченная область в D .

Утверждение. Пусть выполняются условия (*), задано начальное условие $\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)$; $\varphi_0 \in C^1(D)$ и $\int_{\Omega_t} \varphi(t, x) dx$ не зависит от t . Тогда $\varphi(t, x) \in C^1(T \times D)$

и вычисляется по формуле

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\chi(t_0, t, x)) \cdot e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{div} f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau} \quad (2)$$

Доказательство. В статье [2] приведено доказательство частного случая этого утверждения на основе перехода к простому варианту уравнения неразрывности. Приведем полное доказательство утверждения на основе теоремы Лиувилля [3].

Элементы множества Ω_t будем обозначать через x_t . Введем обозначение $\Phi(t) = \int_{\Omega_t} \varphi(t, x_t) dx_t$, и тогда $\Phi(t) = \int_{\Omega_0} \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0)) \cdot |J(t, t_0, x_0)| dx_0$, где

$$J(t, t_0, x_0) = \det\left(\frac{\partial \chi(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}\right).$$

Как следует из свойств решений системы (1) с условиями (*), якобиан $J(t, t_0, x_0)$ отображения $\chi: \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ непрерывен по t и не может вырождаться [3]. Это означает сохранение знака $J(t, t_0, x_0)$ по t для всех допустимых значений аргументов. Для определенности положим $J(t, t_0, x_0) > 0$.

Тогда:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0))}{\partial t} |J(t, t_0, x_0)| + \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0)) \cdot \frac{\partial |J(t, t_0, x_0)|}{\partial t} \right] dx_0. \quad (3)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся теоремой Лиувилля. Нужная нам формула является промежуточной в доказательстве следующей.

Теоремы Лиувилля [3]. Пусть для системы (1) выполняются условия (*), $V(t)$ – объем области Ω_t . Тогда:

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} f(t, x) dx. \quad (4)$$

Доказательство. Из математического анализа для $V(t)$ известна формула

$$V(t) = \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_0} |J(t, t_0, x_0)| dx_0. \quad (5)$$

Из преобразований $\frac{\partial J(t, t_0, x_0)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\det \frac{\partial x_t}{\partial x_0} \right) =$

$$= \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{1t}}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_j(t, x_t)}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{nt}}{\partial x_0} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{1t}}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_j(t, x_t)}{\partial x_t} \cdot \frac{\partial x_t}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_{nt}}{\partial x_0} \end{pmatrix} = (\operatorname{div} f(t, \chi(t, t_0, x_0))) \cdot J(t, t_0, x_0),$$

получаем

$$\frac{\partial J(t, t_0, x_0)}{\partial t} = (\operatorname{div} f(t, \chi(t, t_0, x_0))) \cdot J(t, t_0, x_0). \quad (6)$$

Продифференцируем по t левую и правую части уравнения (5). С учетом формулы (6) приходим к соотношению:

$$\dot{V}(t) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} |J(t, t_0, x_0)| dx_0 = \int_{\Omega_0} (\operatorname{div} f(t, \chi(t, t_0, x_0))) |J(t, t_0, x_0)| dx_0.$$

Доказательство теоремы закончено.

Из этого доказательства нам нужна формула (6). С ее помощью из формулы (3) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0))}{\partial t} |J(t, t_0, x_0)| + \right. \\ &\left. + \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0)) (\operatorname{div} f(t, \chi(t, t_0, x_0))) |J(t, t_0, x_0)| \right] dx_0. \end{aligned}$$

По условию утверждения $\Phi(t) \equiv \text{const}$. Тогда верны соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0))}{\partial t} + \varphi(t, \chi(t, t_0, x_0)) \operatorname{div} f(t, \chi(t, t_0, x_0)) \right] \cdot |J(t, t_0, x_0)| dx_0 = \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x) + \varphi(t, x) \operatorname{div} f(t, x) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Это верно для любой замкнутой ограниченной области Ω_0 . Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x) + \varphi(t, x) \operatorname{div} f(t, x) = 0. \quad (7)$$

Сделаем в нем замену $x_\tau = \chi(\tau, t, x)$ и придем к уравнению

$$\frac{\partial \varphi(\tau, \chi(\tau, t, x))}{\partial \tau} + \varphi(\tau, \chi(\tau, t, x)) \operatorname{div} f(t, \chi(\tau, t, x)) = 0.$$

Интегрированием уравнения (7) на интервале по $\tau \in [0, t]$ получаем искомую формулу (2):

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\chi(t_0, t, x)) \cdot e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{div} f(\tau, \chi(\tau, t, x)) d\tau}.$$

Утверждение доказано.

Применим полученный в утверждении результат к моделированию водной экосистемы.

Модель для водной экосистемы

Пример представлен абстрактной водной экосистемой, схема основных блоков и потоков вещества между блоками приведена на рис. 1. Ее построение сделано аналогично используемым биологами схемам для водных, и в частности морских, экосистем [4]. Математическая модель представлена в виде системы балансовых уравнений, описывающих перенос вещества между блоками:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q(x_1, x_6) - v_{12}(x_1) \cdot x_2 - v_{13}(x_1) \cdot x_3 - m_1(x_1) \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = k_{12} \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 - v_{23}(x_2) \cdot x_3 - v_{24}(x_2) \cdot x_4 + k_{25} \cdot p(x_2, x_5) - \\ \quad - m_2(x_2) \cdot x_2, \\ \dot{x}_3 = k_{13} \cdot v_{13}(x_1) \cdot x_3 + k_{23} \cdot v_{23}(x_2) \cdot x_3 - v_{34}(x_3) \cdot x_4 - m_3(x_3) \cdot x_3, \\ \dot{x}_4 = k_{24} \cdot v_{24}(x_2) \cdot x_4 + k_{34} \cdot v_{34}(x_3) \cdot x_4 - m_4(x_4) \cdot x_4, \\ \dot{x}_5 = (1 - k_{12}) \cdot v_{12}(x_1) \cdot x_2 + (1 - k_{13}) \cdot v_{13}(x_1) \cdot x_3 + (1 - k_{23}) \cdot v_{23}(x_2) \cdot x_3 + \\ \quad + (1 - k_{24}) \cdot v_{24}(x_2) \cdot x_4 + (1 - k_{34}) \cdot v_{34}(x_3) \cdot x_4 - p(x_2, x_5) + \\ \quad + m_1(x_1) \cdot x_1 + m_2(x_2) \cdot x_2 + m_3(x_3) \cdot x_3 + m_4(x_4) \cdot x_4, \\ \dot{x}_6 = (1 - k_{25}) \cdot p(x_2, x_5) - q(x_1, x_6). \end{cases} \quad (8)$$

Значение $x_j(t)$ равно массе вещества в блоке j в момент времени t . Далее приведены приблизительные характеристики блоков.

Планктон (фито- и зоопланктон, x_1) потребляет минеральные вещества (биогены, x_6) при фотосинтезе. Сам планктон потребляется нектоном (рыбы и прочие самостоятельно перемещающиеся в толще воды организмы, x_3) и, частично, мелким нектобентосом (мелкие организмы в придонной области), бактериями и простейшими (x_2). Нектон и мелкий нектобентос потребляются хищным (крупным) нектобентосом (x_4). Отмирающая органика «переходит» в детрит (x_5) и минерализуется бактериями (x_2) до биогенов (x_6).

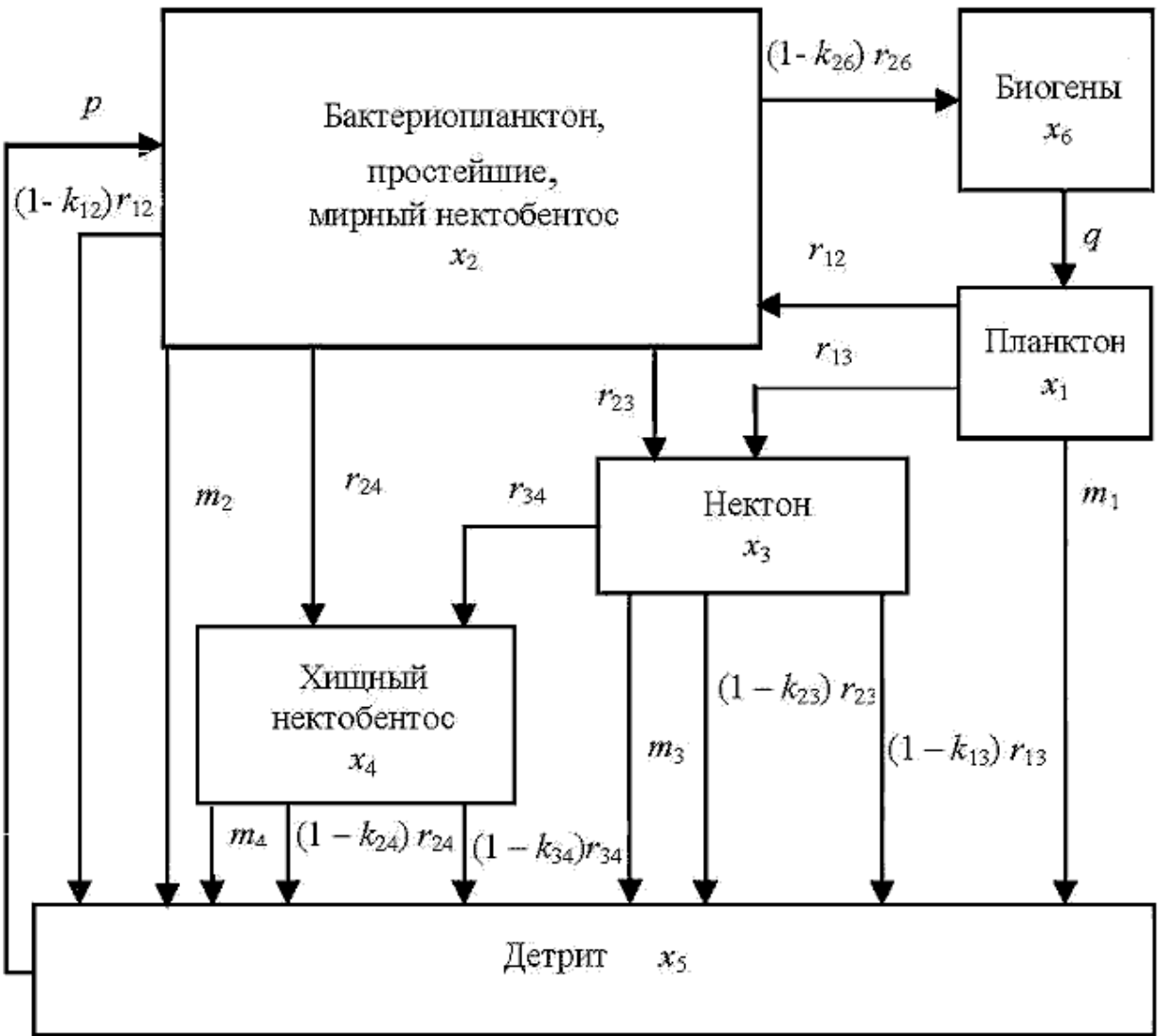


Рис. 1. Схема переноса вещества между блоками в абстрактной водной экосистеме.

Трофические функции скорости выедания блока i на единицу биомассы блока j обозначены $v_{ij}(x_i)$. Доли этой выеденной биомассы, идущие на рост хищника, обозначены k_{ij} . Функции $p(x_2, x_5)$ и $q(x_1, x_6)$ описывают потоки детрита и биогенов, а функции $m_i(x_i)$ – удельные скорости отмирания.

Функции перетоков вещества выбираем в линейном или билинейном виде [5]:

$$q(x_1, x_6) = q_0 \cdot x_1 \cdot x_6, \quad p(x_2, x_5) = p_0 \cdot x_2 \cdot x_5, \quad v_{ij}(x_i) = v_{ij}^0 \cdot x_i, \quad m_i = m_i^0 \cdot x_i.$$

Моделируемая водная экосистема считается замкнутой в том смысле, что поток вещества через ее внешнюю границу равен нулю. В модели (8) это означает, что сумма правых частей дифференциальных уравнений равна нулю. Такую модель также будем называть замкнутой.

Для замкнутой модели исследование динамических свойств решений имеет специфику. Множество равновесных решений в области $D \in R_+^n$ представляет собой кривую, проходящую через начало координат. В нашем случае эта кривая

оказалась лучом (рис. 2 – 4) из-за выбранных числовых значений параметров и нормировки переменных на заранее постулируемое равновесие, все равновесные решения на этом луче локально устойчивы.

Схема расчетов

Система (8) имеет фазовое пространство R^6 . Начальная функция φ_0 выбирается следующим образом. Выбранная точка $x_0 \in R_+^6$ окружается замкнутым шаром радиуса ρ : $\Omega_0 = \{x \in R^6 / \|x - x_0\| \leq \rho\}$ (под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма). Функцию $\varphi_0(x)$ определим как:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|x - x_0\|}{\rho}\right)^2, & \|x - x_0\| < \rho, \\ 0, & \|x - x_0\| \geq \rho. \end{cases} \quad (9)$$

По шару Ω_0 создается дискретное множество:

$$\Omega_0^d = \left\{ x_k \in R^6 / x_k = x_0 + k \cdot \frac{\rho}{m} \cdot e_g, \quad k = \overline{1, m} \right\}.$$

Здесь $e_g = \frac{1}{\|g\|} \cdot g$; g – вектор направления $g \in R^6$; $g_j = \{-1; 0; 1\}$; m – количество

точек в шаре по координатным осям. Для каждой точки области Ω_0^d расчет значений функции принадлежности ведется по формуле (2) с применением метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности [6] для численного решения системы уравнений (8).

Пример

В модели (8) для водной экосистемы выбраны три начальные точки и по указанной выше схеме рассчитаны нечеткие траектории. Все они «стремятся» к множествам равновесий на луче равновесий, причем это множество зависит от начальной области траектории. На рис. 2 – 4 приведены двумерные представления нечетких траекторий в плоскостях, определяемых линейными комбинациями начальных фазовых переменных. Густота пометок траекторий возрастает с ростом значения функции принадлежности. Отмечены только участки ненулевых значений функций принадлежности.

Решения с начальными условиями из рассмотренного множества Ω_0 стремятся к некоторому множеству равновесных решений. Из рис. 2 – 4 видно, что при асимптотическом приближении к точке x_* площадь Ω_t уменьшается. Согласно утверждению, в соответствии с которым $\int_{\Omega_t} \varphi(t, x) dx$ не зависит от t , с уменьше-

нием площади множества Ω_t происходит распределение положительных значений $\varphi(t, x)$ по меньшей площади, так что в среднем значение функции $\varphi(t, x)$ в каждой точке множества увеличивается, что означает уменьшение неопределенно-

сти полученных решений.

На рис. 2 приведена проекция нечеткой фазовой траектории динамики биомасс рыб и других крупных организмов (нектон и хищный нектобентос) в зависимости от мелких организмов (планктон, мирный нектобентос).

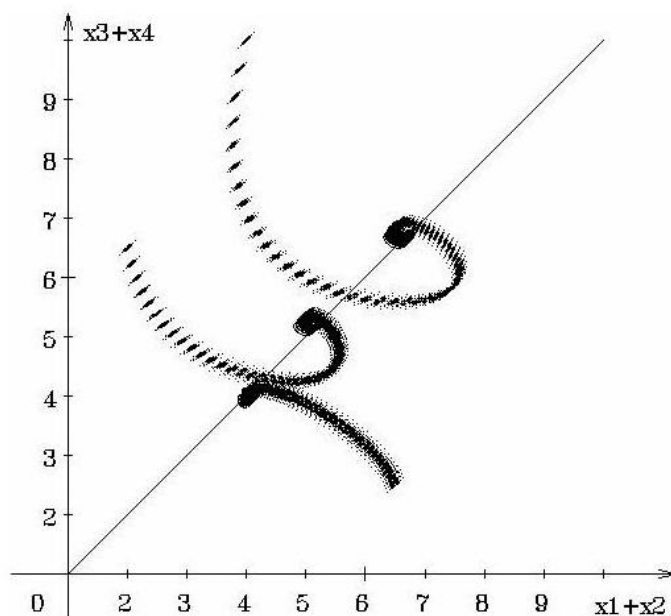


Рис. 2. Нечеткая динамика биомасс крупных организмов (x_3+x_4) в сравнении с биомассами мелких организмов (x_1+x_2).

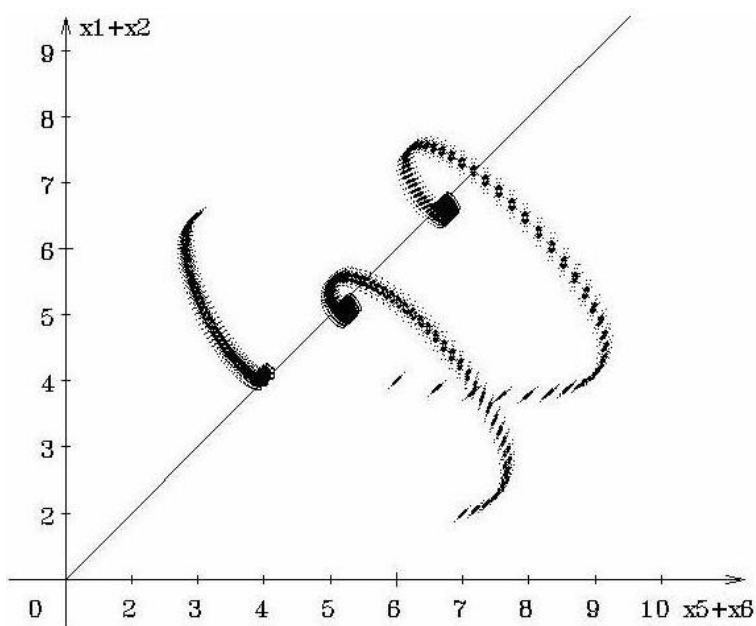


Рис. 3. Нечеткая динамика биомасс мелких организмов (x_1+x_2) в зависимости от масс неживых компонентов (x_5+x_6).

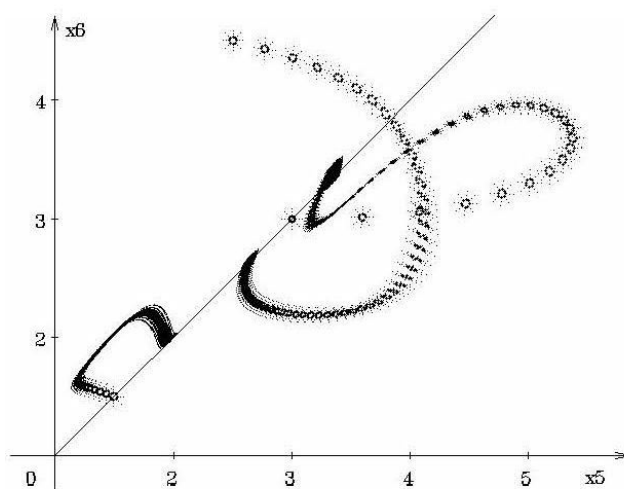


Рис. 4. Нечеткая динамика масс неживых компонентов (детрита x_5 и биогенов x_6).

Рис. 3 характеризует динамику биомасс мелких организмов в зависимости от динамики масс неживых компонентов экосистемы (биогенные элементы и детрит). На обоих рисунках видна динамика проекций траекторий вблизи равновесия типа устойчивого фокуса. Связь между динамикой масс биогенов и детрита также является устойчивой вблизи равновесия (рис. 4). Нечеткие траектории приближаются к траектории равновесий, демонстрируя их устойчивость.

Заключение

В статье предложена модель динамических процессов с учетом неопределенности информации о них. Неопределенность моделируется в терминах нечетких множеств функцией принадлежности состояния системы некоторому множеству. Получена формула для вычисления функции принадлежности. Приведены расчеты на примере модели для абстрактной водной экосистемы. Этим примером мы пытаемся обозначить сложность экологической системы и принципиальную неопределенность знаний о ней. Пример абстрактен и схематичен, но авторы надеются на его эффективность в демонстрации модельных описаний с учетом неопределенности информации об описываемом объекте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. Biological applications of the theory of fuzzy sets and systems // Biocybernetics of the central nervous system. Ed. L.C. Proctor, L. C. Littre. – Boston: Brown & Co. – 1969. – P.199- 206.
2. Абакумов А.И. Неопределенность данных в математической экологии // Дальневосточный математический журнал. – 2000. – Т.1, № 1. – С. 38-42.
3. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
4. Дуленова Е.П. Сравнительная биопродуктивность макроэкосистем дальневосточных морей. – Владивосток: ТИНРО-центр, 2002.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978.
6. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987.

E-mail:

Абакумов А.И. – abakumov@iacp.dvo.ru.