УДК 519.854:33

© 2009 г. **А.С. Величко**, канд. физ.-мат. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ОПТИМИЗАЦИЯ НАЗНАЧЕНИЯ РАБОТНИКОВ В ГРУППЫ

Построена математическая модель формирования оптимального состава групп работников. Отбор людей в группы осуществляется по критерию минимизации суммарного показателя «несовместимости» работников. Сформулирована задача целочисленного математического программирования, которая описана на языке моделирования AMPL. Решение получено с помощью пакета численных алгоритмов оптимизации CPLEX.
Ключевые слова: комбинаторное, бинарное, целочисленное програмирование, группировка объектов, квадратичная задача о назначении.

Введение

В последнее время руководители многих организаций приходят к осознанию важности формирования команды единомышленников, слаженности работы коллектива для достижения поставленных перед группой целей, т.е. к необходимости создания команды работников, отношения между которыми будут максимально гармоничными.

Различные постановки задач группировки объектов с позиций комбинаторного и целочисленного программирования изложены в монографии [1]. Обширный обзор математических постановок задач, возникающих при формировании команд, можно найти в [2]. В данной работе рассматриваемая задача комбинаторной природы формулируется в виде задач целочисленного (бинарного) программирования.

Модель оптимизации состава групп

Рассмотрим формальную постановку задачи формирования групп работников. Пусть из $p= m\cdot n$ человек необходимо сформировать n групп работников по m человек в каждой.

Определим теперь величины c_{ij} «несовместимости» пары работников i и j, которые характеризуют, насколько неуспешно работник i будет работать в паре с работником j. Элементы $\{c_{ij}\}$ для $i, j=1,\dots,p$ формируют матрицу, которая является симметричной.

Математическая постановка задачи возможна с позиций комбинаторного и целочисленного программирования. Рассмотрим комбинаторную постановку задачи оптимизации состава групп работников.

Пусть $S=\{1,\ldots, p\}$ – множество номеров работников, а S_k – подмножество m неповторяющихся элементов S, означающих номера работников, назначаемых в группу с номером k, состоящую из m человек. Количество всех таких подмножеств будет равно $V = C_p^m$.

С каждой группой k и соответственно подмножеством S_k свяжем показатель «несовместимости» работников c_k, который равен сумме оценок «несовместимости» работников в данной группе, т.е. $c_k = \sum\limits_{(i,j)\in S_k} c_{ij}$. Задача оптимизации состава групп работников заключается в поиске такого набора номеров групп K, соответствующих разбиению S на непересекающиеся подмножества S_k, чтобы суммарный показатель «несовместимости» работников по этим группам $\sum\limits_{k\in K} c_k$ был минимален.

Такая комбинаторная постановка задачи может быть эквивалентно представлена в виде задачи целочисленного (бинарного) программирования.

Определим переменную a_{ik} следующим образом. Если работник с номером i включен в группу с номером k, т.е. номер i принадлежит подмножеству S_k, то положим a_{ik}=1, иначе считаем a_{ik}=0. Пусть значение бинарной переменной z_k равно 1, если формируется k-я группа работников, иначе положим z_k=0.

Каждый человек может работать только в одной группе, и оптимальным будет такой набор групп, для которых суммарный показатель «несовместимости» работников c_k будет минимален. Тогда получим задачу целочисленного (бинарного) программирования

$$\sum_{k=1}^{V} c_k z_k \to \min,$$

$$\sum_{k=1}^{V} a_{ik} z_k = 1,\ i = 1,\ldots, p,$$

$$z_k = \{0,1\},\ k = 1,\ldots, V.$$

Недостатком такой постановки является большое количество переменных, равное C_{mn}^m, которое быстро растет при увеличении как количества групп, так и количества работников в каждой группе. Количество ограничений задачи равно $p = m\cdot n$. При практической реализации алгоритма необходимо проделать дополнительную работу по генерации элементов a_{ik} и c_k.

Более экономной с точки зрения количества переменных является математическая постановка с позиций целочисленной задачи о назначении.

Пусть значение бинарной переменной x_{ik} равно 1, если работник i работает в группе с номером $k = 1,\ldots, n$, иначе $x_{ik} = 0$.

Во-первых, необходимо, чтобы в каждой из k групп работало точно m человек, тогда получаем условие

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = m,\ k = 1,\ldots,n.$$

Во-вторых, i-й работник может работать только в одной из k групп, тогда:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1,\ i=1,\ldots,p.$$

Пусть значение бинарной переменной y_{ij} равно 1, если работник i работает в одной группе с работником j, в противном случае будем полагать $y_{ij} = 0$.

Покажем, что между переменными y_{ij} и x_{ik} можно установить взаимооднозначное соответствие по правилу $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk} = y_{ij}$, $i, j = 1,\ldots, p$.

Если работники i и j работают в одной группе, тогда для некоторого номера группы v выполняется $x_{iн} = 1$, $x_{jн} = 1$ и значит $x_{iн}x_{jн} = 1$, а для всех остальных номеров групп данное произведение равно нулю. Обратно: y_{ij}=0 тогда и только тогда, когда каждое из произведений $x_{iн}x_{jн}$ равно нулю, что означает отсутствие группы, в которой работают i-й и j-й работники.

Теперь суммарный показатель «несовместимости» работников в группах можно легко сформулировать в терминах переменной y_{ij}, данный показатель равен $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} c_{ij} y_{ij}$.

В силу симметричности определения величин y_{ij} и c_{ij} достаточно использовать набор индексов таких, что $i > j$.

Задача формирования групп работников будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k,i>j} c_{ij} x_{ik} x_{jk} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = m,\ k = 1,\ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1,\ i = 1,\ldots, p, \tag{3}$$

$$x_{ik} = \{0,1\},\ k = 1,\ldots, n,\ i = 1,\ldots, p. \tag{4}$$

Количество переменных задачи равно $pn = mn^2$, а количество ограничений – $p + n = (m + 1)n$.

Полученная задача является задачей целочисленного математического программирования с линейными ограничениями и квадратичной (билинейной) целевой функцией.

Задача (1) – (4) напоминает известную в литературе квадратичную задачу о назначении (quadratic assignment problem, QAP) с тем лишь отличием, что традиционно в данном классе задач в ограничении (2) в правой части стоит 1, как и в классической линейной задаче о назначении. Хороший обзор постановок и методов решения QAP-задач можно найти в [3]. Квадратичная задача о назначении является NP-полной, и для ее решения с 60-х гг. XX в. разрабатываются специальные методы численного решения, эффективность которых становится наиболее актуальной в случае задач большой размерности. Одним из наиболее простых способов решения QAP-задач является подход точной линеаризации, позволяющий эквивалентным образом представить задачу (1) – (4) в виде линейной задачи целочисленного программирования.

Воспользуемся идеей линеаризации и покажем, что задачу (1) – (4) можно свести к бинарной задаче с линейными ограничениями с линейным целевым функционалом.

Вместо ограничений $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk} = y_{ij}$ в задаче (1) – (4) можно использовать линейные ограничения $x_{ik}+x_{jk} \le y_{ij}+1$, где y_{ij} – бинарные, в условиях минимизации линейной по всем y_{ij}, здесь $i \ne j$, целевой функции $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} c_{ij} y_{ij}$ с положительными коэффициентами c_{ij} (для $i \ne j$). В силу симметричности определения величин y_{ij} и c_{ij} достаточно использовать набор индексов таких, что $i > j$.

Если работники i и j в оптимуме работают в одной группе с номером k, тогда $x_{ik} = 1$, тогда $x_{ik}+x_{jk} = 2$ и в условиях минимизации по y_{ij} его значение в ограничении $x_{ik}+x_{jk} \le y_{ij}+1$ равно 1, а это в свою очередь означает по определению y_{ij}, что работники i и j в оптимуме работают в одной группе. Если работники в оптимальном решении работают в разных группах, тогда в ограничении $x_{ik}+x_{jk} \le y_{ij}+1$ минимальное значение y_{ij} равно 0 для любых k, поскольку или один из работников работает в группе k (и тогда либо $x_{ik} = 1$, либо $x_{jk} = 1$), или оба работают в отличной от k группе (тогда $x_{ik} = 0$ и $x_{jk} = 0$). Здесь становится существенным условие положительности всех c_{ij} для $i > j$, поскольку иначе y_{ij} может быть равно не 0, а 1 без дополнительного увеличения целевой функции.

Обратно: если в оптимальном решении $y_{ij}=0$, т.е. по определению y_{ij} работники i и j работают в разных группах, это влечет $x_{ik}+x_{jk} \le 1$ для всех k, а значит, либо $x_{ik} = 1$, либо $x_{j\,k}= 1$, т.е. если один из работников работает в группе с номером k, тогда второй работает в другой группе. Случай $x_{ik} = 0$ и $x_{jk} = 0$ для любого k невозможен в силу ограничения (3).

Если в оптимуме $y_{ij} = 1$, тогда для всех k имеем $x_{ik}+x_{jk} \le 2$, а значит, возможен случай, когда $x_{ik} = 1$ и $x_{jk} = 1$, а это означает, что работники i и j в оптимуме работают в одной группе с номером k. Но остальные два случая (когда или $x_{ik} = 1$ или $x_{jk} = 1$ и случай $x_{ik} = 0$ и $x_{jk} = 0$) невозможны, поскольку, взяв тогда $y_{ij}=0$, получаем для этих случаев совместные ограничения $x_{ik}+x_{jk} \le 1$, но это означает, что можно уменьшить целевую функцию на величину $c_{ij}y_{ij} = c_{ij}$, а значит, y_{ij} не является оптимальным.

Таким образом, получаем эквивалентную для (1) – (4) задачу:

$$\sum_{i>j} c_{ij} y_{ij} \to \min, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ik} = m,\ k = 1,\ldots, n, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1,\ i = 1,\ldots, p, \tag{7}$$

$$x_{ik}+x_{jk} \le y_{ij}+1,\ k = 1,\ldots, n,\quad i, j = 1,\ldots, p, \tag{8}$$

$$x_{ik},\ y_{ij} = \{0,1\},\ k = 1,\ldots, n,\quad i, j = 1,\ldots, p. \tag{9}$$

Количество переменных задачи равно $pn+p^2 = mn^2(m+1)$, а количество ограничений – $p+n+p^2n = (m+m^2n^2+1)n$.

Недостатком данного подхода линеаризации для задачи (1) – (4) является существенное увеличение числа ограничений в задаче (5) – (9) за счет ограничений (8), однако в случае небольших размерностей это не является существенной проблемой для использования, например, классического метода ветвей и границ. С другой стороны, количество переменных в задаче (5) – (9) не столь большое, как в случае постановки задачи с позиций комбинаторного программирования. Для задач большой размерности более эффективным, с точки зрения практической вычислительной сложности, становится использование специальных подходов и алгоритмов, обзор которых можно найти в [3, 4].

Численное решение задачи

Рассмотрим следующий пример назначения 9 человек в три группы по три человека в каждой, т.е. $m = 3$, $n = 3$, $p = 9$. Задача (5) – (9) приобретает следующий вид:

$$\sum_{i>j} c_{ij} y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ik} = 3,\ k = 1, 2, 3,\ \sum_{k=1}^{3} x_{ik} = 1,\ i = 1,\dots, 9,$$

$$x_{ik}+x_{jk} \le y_{ij}+1,\ x_{ik},\ y_{ij} = \{0,1\},\ k = 1, 2, 3,\ i,j = 1,\dots, 9.$$

Матрица, состоящая из элементов c_{ij} для девяти человек, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 65.29 & 135.27 & 49.96 & 76.84 & 55.85 & 24.73 & 89.48 & 5.66 \\ 65.29 & 0 & 69.98 & 15.33 & 11.55 & 9.44 & 40.56 & 154.77 & 70.94 \\ 135.27 & 69.98 & 0 & 85.32 & 58.43 & 79.42 & 110.54 & 224.75 & 140.93 \\ 49.96 & 15.33 & 85.32 & 0 & 26.88 & 5.89 & 25.23 & 139.44 & 55.61 \\ 76.84 & 11.55 & 58.43 & 26.88 & 0 & 20.99 & 52.11 & 166.32 & 82.5 \\ 55.85 & 9.44 & 79.42 & 5.89 & 20.99 & 0 & 31.12 & 145.33 & 61.5 \\ 24.73 & 40.56 & 110.54 & 25.23 & 52.11 & 31.12 & 0 & 114.21 & 30.38 \\ 89.48 & 154.77 & 224.75 & 139.44 & 166.32 & 145.33 & 114.21 & 0 & 83.82 \\ 5.66 & 70.94 & 140.93 & 55.61 & 82.5 & 61.5 & 30.38 & 83.82 & 0 \end{pmatrix},$$

где элемент c_{ij} тем меньше, чем работники i и j больше «совместимы» при работе в одной группе.

Язык описания моделей AMPL [5] позволяет представить полученную задачу бинарного программирования на интуитивно понятном языке, который близок к математической записи постановки задачи, в отличие от классических языков программирования, – например, Си. Ниже представлен листинг программы.

```
set people := 1 2 3 4 5 6 7 8 9;
set group := 1 2 3;
param cost {people, people} >= 0;
var work {people, group} binary;
```

```
var y {people, people} binary;
minimize t_cost:
   sum {i in people, j in 1..i} cost[i,j] * y[i,j];
subject to A {k in group}:
   sum {i in people} work[i,k] = 3;
subject to B {i in people}:
   sum {k in group} work[i,k] = 1;
subject to C {i in people, j in people, k in group}:
   work[i,k] + work [j,k] <= y[i,j] + 1;
data;
param cost:
    1 2 3 4 5 6 7 8 9 :=
  1 0.00   65.29  135.27 49.96  76.84  55.85  24.73  89.48  5.66
  2 65.29  0.00   69.98  15.33  11.55  9.44   40.56  154.77 70.94
  3 135.27 69.98  0.00   85.32  58.43  79.42  110.54 224.75 140.93
  4 49.96  15.33  85.32  0.00   26.88  5.89   25.23  139.44 55.61
  5 76.84  11.55  58.43  26.88  0.00   20.99  52.11  166.32 82.50
  6 55.85  9.44   79.42  5.89   20.99  0.00   31.12  145.33 61.50
  7 24.73  40.56  110.54 25.23  52.11  31.12  0.00   114.21 30.38
  8 89.48  154.77 224.75 139.44 166.32 145.33 114.21 0.00   83.82
  9 5.66   70.94  140.93 55.61  82.50  61.50  30.38  83.82  0.00;
option solver cplex;
solve;
display work;
display t_cost;
```

В процессе выполнения алгоритма потребовалось 277 итераций алгоритма целочисленной оптимизации с 21 узлом дерева решений (использовался пакет CPLEX версии 11.2.0, подключаемый в качестве модуля к AMPL). Оптимальное распределение работников по трем группам для данной задачи показано на рисунке. В первой группе работают работники с номерами 1, 8 и 9, во второй группе – работники 4, 6 и 7, в третьей – работники 2, 3 и 5.

Значение показателя «несовместимости» работников для первой группы равно $c_{18}+c_{89}+c_{19}$ = 89,48+83,82+5,66 = 178,96, для второй – 62,24, для третьей – 139,96. Минимальное значение целевой функции равно 381,16.

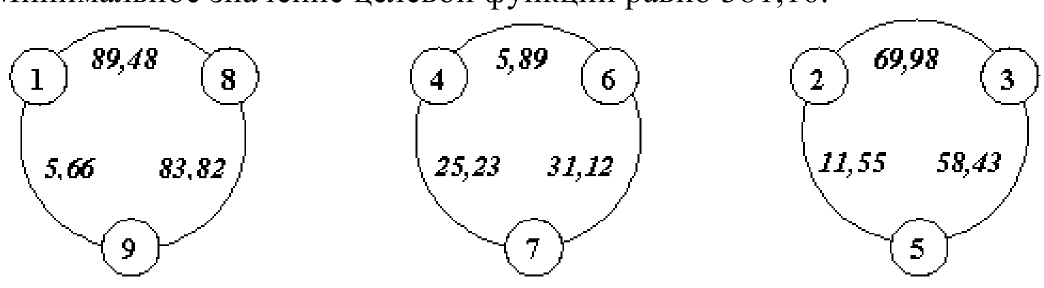

Рис. 1. Оптимальное назначение работников в группы.

Как видно из рисунка, оптимальное назначение работников в группы имеет следующие особенности. В первой группе показатели несовместимости работников существенно различаются. Работник с номером 8 по сути плохо совместим с остальными работниками. Показатели несовместимости работников также существенно различаются между группами. Такой характер назначений работников в группы объясняется минимизацией суммарного показателя несовместимости работников во всех группах.

Для формирования более однородных групп работников как в смысле показателя несовместимости между группами, так и между работниками внутри каждой из групп необходимо вводить дополнительные ограничения сверху на величины соответствующих показателей несовместимости работников. С другой стороны, задача с подобными ограничениями может и не иметь решения. На практике для исключения подобных ситуаций можно рекомендовать предварительно проанализировать матрицу элементов c_{ij} на предмет появления людей с существенной величиной несовместимости со всеми остальными работниками и, возможно, вообще исключить подобных работников из формируемых групп.

Заключение

В работе сформулированы математические постановки задачи отбора людей для работы в группах. В статье показано, что решение данной задачи может быть представлено в виде задачи комбинаторного и целочисленного программирования, которая сводится к задаче бинарного программирования с линейной целевой функцией.

Для примера небольшой размерности полученная математическая постановка описана на языке моделирования AMPL, которая может быть легко видоизменена для решения задач другой размерности.

Рассматриваемый в работе критерий минимизации суммарной «несовместимости» работников может приводить к получению достаточно неоднородных групп по показателю несовместимости работников как внутри группы, так и между группами. Данный эффект может быть скорректирован путем введения дополнительных ограничений на соответствующие показатели несовместимости работников.

Задачи большой размерности требуют разработки специальных алгоритмов [3, 4], но они выходят за рамки данной работы. Дальнейшее развитие подобных моделей возможно, например, для случая неоднородных групп работников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубинштейн М.И.* Оптимальная группировка взаимосвязанных объектов. – М.: Наука, 1989.
2. *Новиков Д.А.* Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008.
3. *Burkard R.E., Зela E., Pardalos P.M., Pitsoulis L.M.* The quadratic assignment problem. In: Handbook of Combinatorial Optimization, 1998. – Vol. 3. Kluwer Academic Publishers. – P. 241-338.
4. *Зela E.* The quadratic assignment problem. Theory and algorithms. Kluwer Academic Publishers, 1998.
5. AMPL: A Modeling Language For Mathematical Programming: [сайт]. URL: http://www.ampl.com (дата обращения: 14.01.2009).

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Нурминским.

E-mail:
Величко А.С. – vandre@dvo.ru.