УДК 519.6

© 2009 г. **А.Д. Гринблат**
(Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре)

# УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В КАТЕГОРИИ СЕТЕЙ ПЕТРИ

Рассматривается новый метод построения конечных пределов и копределов в категории конечных CE-сетей Петри.
***Ключевые слова:*** сети Петри, категория, универсальные конструкции, пределы, параллельные вычислительные процессы.

## Введение

Сети Петри являются моделями языков параллельного программирования подобных языку CCS. Уинскел показал, что семантика таких языков может быть выражена с помощью универсальных конструкций. Например, параллельное выполнение процессов можно интерпретировать как произведение, а альтернативное – как копроизведение. В 1987 г. он доказал, что категория сетей Петри имеет конечные произведения. Тем не менее им установлено, что в категории сетей Петри и обобщенных морфизмов нет копроизведений. В работе [1] было доказано, что в категории CE-сетей Петри существуют конечные произведения и копроизведения. Изучение конечных пределов в различных категориях сетей Петри было продолжено в [2]. В частности, оказалось, что в категории CE-сетей Петри конечные пределы существуют.

В данной работе рассматриваются новые методы построения конечных пределов и копределов в категории конечных CE-сетей Петри. В частности, определив метод задания CE-сети Петри с помощью выделения подмножества «ложных» условий, можно доказать существование конечных пределов и копроизведений и получить принципиально новый метод построения коуравнителей.

## Категория ординарных сетей Петри

Отметим, что сеть Петри представляет собой двудольный направленный граф с двумя типами вершин – *местами* и *переходами* (*условиями* и *событиями*), соединенными дугами таким образом, что каждая дуга соединяет вершины разных типов. Графически места (условия) изображаются кругами, переходы (события) – прямоугольниками. Места (условия) имеют *разметку*, т.е. задана функция область которой есть множество всех мест (условий) сети, а кообласть множество $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Ненулевая разметка места (условия) изображается размещением в соответствующем круге одной или нескольких точек. Эти точки называются *фишками*. Задается *начальная* разметка. Сеть Петри называется CE-сетью, если образ функций разметки содержится во множестве $\{0,1\}$.

Сети Петри $N = (B, E, M_0, pre, post)$, определенные в работах [3, 4], будем называть CE-сетями, а когда множества $B$ и $E$ конечны, то CE-сеть

$N = (B, E, M_0, pre, post)$

будем называть *ординарной сетью Петри*, которую можно рассматривать как пятерку, где $B$ – множество *условий*; $E$ – множество *событий*; $M_0$ – *начальная разметка*, $M_0 \subseteq B$; $pre: E \to 2^B$ – функция, ставящая в соответствие каждому событию множество его *входных условий*; $post: E \to 2^B$ – функция, ставящая в соответствие каждому событию множество его *выходных условий*.

Морфизмы ординарных сетей Петри определяются как некоторые морфизмы соответствующих ориентированных графов. Для их определения нам понадобится категория множеств и частичных отображений. Частичным отображением $f\colon A \rightharpoonup B$ называется пара, состоящая из некоторого подмножества $Dom\, f \subseteq A$ и функции $f : Dom\, f \to B$. Композиция определяется очевидным образом. Каждому множеству $E$ поставим в соответствие $E_* = E \bigcup \{*\}$, полученное добавлением «бесконечно удаленной» точки $*$. Тогда каждому частичному отображению $f : E \rightharpoonup E'$ поставим в соответствие функцию $f_* : E_* \to E'_*$, принимающую значения:

$$f_*(e) = \begin{cases} f(e), & \text{если } e \in Dom\, f, \\ *, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Получим функтор из категории множеств и частичных отображений в категорию пунктированных множеств и пунктированных отображений. Известно, что этот функтор является изоморфизмом, поэтому категорию множеств и частичных отображений можно рассматривать как категорию пунктированных множеств и пунктированных отображений.

Следуя [3], на ординарную сеть Петри $N = (B, E, M_0, pre, post)$ распространим функции $pre$ и $post$ на $E_* = E \cup \{*\}$, полагая $pre(*) = post(*) = \varnothing$.

Для произвольных ординарных сетей Петри $N = (B, E, M_0, pre, post)$ и $N' = (B', E', M'_0, pre', post')$ морфизмом называется пара $(\beta, \eta) : N \longrightarrow N'$, состоящая из пунктированного отображения $\eta : E_* \longrightarrow E'_*$ и бинарного отношения $\beta : B \longrightarrow B'$ для которого $\beta^{-1} : B' \longrightarrow B$ частичное отображение – таких, что выполнены следующие соотношения:

$$\beta(M_0) = M'_0;\ \beta(pre(e)) = pre'(\eta(e));\ \beta(post(e)) = post'(\eta(e)).$$

По техническим соображениям CE-сеть Петри $N = (B, E, M_0, pre, post)$ будем задавать с помощью пятерки $N = (H, E, M_0, pre, post)$, указывая вместо множества условий $B$ множество $H = B \backslash M_0$.

Поясним это на примере.

$N = (H, E, M, pre, post)$.

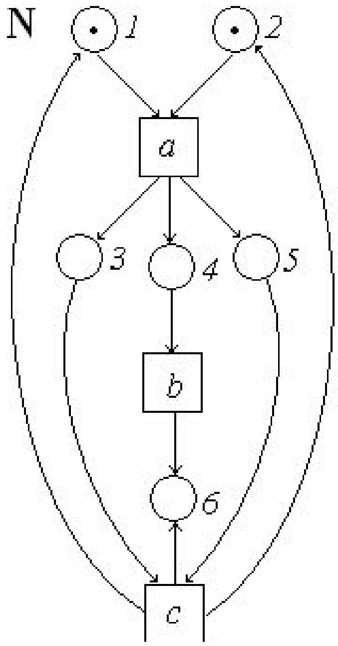


*Рис. 1.* СЕ-сеть Петри.

Для данной сети имеем:
$H = \{3,4,5,6\}$; $E = \{a,b,c\}$; $M = \{1,2\}$;
$pre(a) = M$; $pre(b) = \{4\}$; $pre(c) = \{3,5\}$;
$post(a) = \{3,4,5\}$; $post(c) = \{6,1,2\}$.

Морфизмы ординарных сетей Петри в наших обозначениях будут выглядеть следующим образом.

Согласно [4] морфизм $\gamma$ из сети $N$ в сеть $N'$ будет задаваться с помощью тройки $\gamma = (\beta, \eta, \mu)$, где $\beta$ – бинарное отношение из $H$ в $H'$ – такое, что $\beta^{-1} : H' \longrightarrow H$ – частичная функция; $\eta : E \longrightarrow E'$ – пунктированное отображение; $\mu$ – бинарное отношение из $M$ в $M'$ – такое, что $\mu^{-1} : M' \longrightarrow M$ есть тотальное отображение и выполнены условия

$$pre(\eta(e)) = \beta(pre(e)) \cup \nu(pre(e)),$$
$$post(\eta(e)) = \beta(post(e)) \cup \nu(post(e)).$$

Проиллюстрируем данное определение на следующем примере.

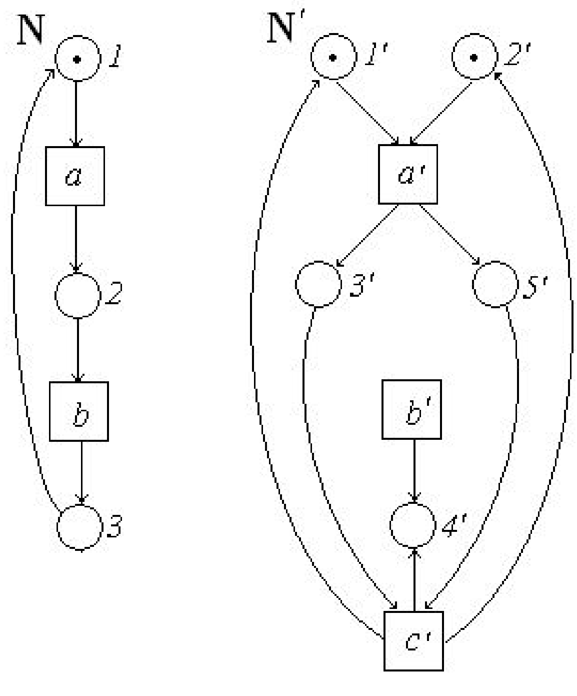


*Рис. 2.* Морфизм между сетями.

В качестве морфизма из сети $N$ в сеть $N'$ возьмем следующую тройку:
$\gamma = (\beta, \eta, \mu)$, где $\beta = \{(2,3'),(2,5'),(3,4')\}$; $\eta = \{(a,a'),(b,c')\}$; $\mu = \{(1,1'),(1,2')\}$.
Композицию морфизмов определим покомпонентно.
Согласно [2], верно:

Предложение 1. Определенные выше класс сетей Петри и класс их морфизмов составляют категорию **N**.

## Универсальные конструкции

Следующее утверждение доказано в [2].

Предложение 2. Произведение двух сетей Петри $N = (H, E, M, pre, post)$ и $N' = (H', E', M', pre, post)$ – это сеть $N \times N' = (H \cup H', E \times_* E', M \cup M', pre, post)$. причем условие $b$ принадлежит $pre(x, y)$ тогда и только тогда, когда либо $b \in pre(x)$, либо $b \in pre(y)$. Аналогично условие $b$ принадлежит $post(x, y)$ тогда и только тогда, когда либо $b \in post(x)$, либо $b \in post(y)$, т.е.:

$$pre(x, y) = pre(x) \cup pre(y), \quad post(x, y) = post(x) \cup post(y)$$

и пара морфизмов $\pi_N = (\beta, \eta, \nu)$, $\pi_{N'} = (\beta', \eta', \nu')$,

где $\beta^{-1}(h) = h \ \forall h \in H$; $\quad \beta'^{-1}(h') = h' \ \forall h' \in H'$;

$\eta(x, y) = x \ \forall (x, y) \in E \times_* E'$; $\quad \eta'(x, y) = y \ \forall (x, y) \in E \times_* E'$;

$\nu^{-1}(m) = m \ \forall m \in M$; $\quad \nu'^{-1}(m') = m' \ \forall m' \in M'$.

Данное предложение легко обобщается (по индукции) на случай произведения более чем двух сетей.

Рис 3. иллюстрирует построение произведение двух сетей.

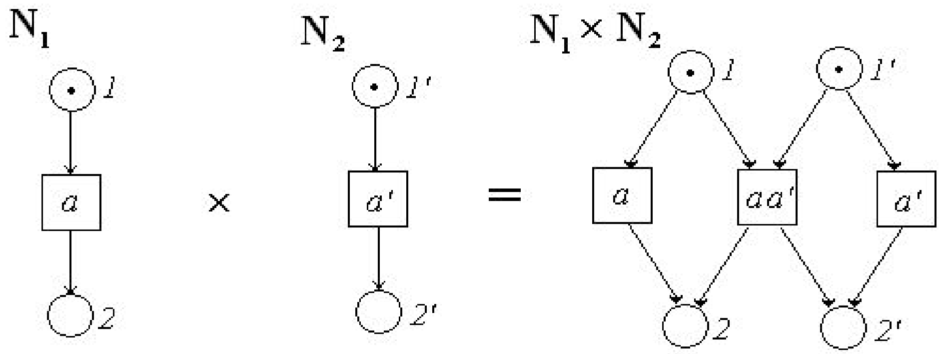


*Рис. 3.* Произведение сетей.

Следующее утверждение доказано в [2].

Предложение 3. Копроизведением или суммой двух сетей Петри $N = (H, E, M, pre, post)$ и $N' = (H', E', M', pre, post)$ будет сеть

$$N + N' = (H \times_* H', E \cup E', M \times M', pre, post),$$

причем условие $(b_1; b_2) \in pre(e)$ тогда и только тогда, когда либо $b_1 \in pre(e)$, либо $b_2 \in pre(e)$ и пара морфизмов вложений, строящихся $i_N = (\beta, \eta, \nu)$, $i_{N'} = (\beta', \eta', \nu')$, где

$\eta(e) = e$; $\quad \eta'(e') = e'$;

$\beta(h) = h \times_* H'$; $\quad \beta'(h') = H \times_* h'$;

$\nu(m) = m \times M'$; $\quad \nu'(m') = M \times m'$.

Проиллюстрируем построение суммы сетей (рис. 4).

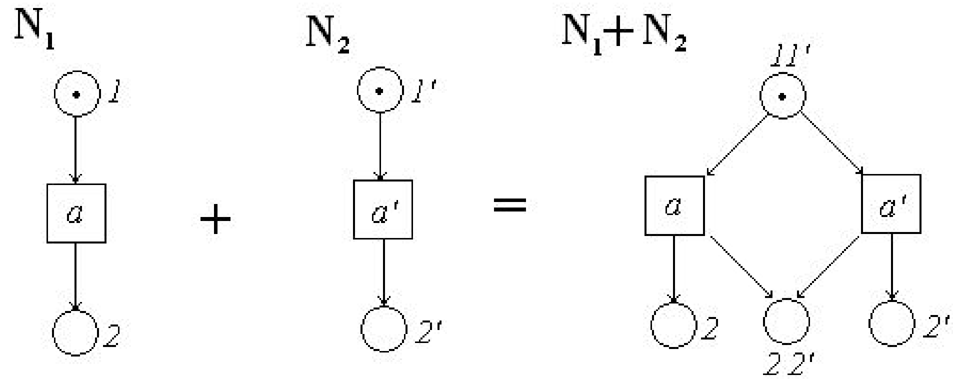


*Рис. 4.* Сумма сетей.

Рассмотрим следующую универсальную конструкцию категории CE-сетей Петри – уравнитель пары морфизмов. Существование конечных пределов в категории CE-сетей доказано в [2]. Наша цель – описать алгоритм построения конечных копределов.

Следующие два утверждения можно найти в [5].

<u>Предложение 4.</u> Пусть даны пара сетей

$$N = (H, E, M, pre, post),\ N' = (H', E', M', pre, post)$$

и пара параллельных морфизмов между ними

$$f = (\beta_1, \eta_1, \nu_1)\ и\ g = (\beta_2, \eta_2, \nu_2).$$

Уравнителем этой пары будет сеть

$$Eq(f, g) = (\widetilde{H}, \widetilde{E}, \widetilde{M}, pre, post)$$

и морфизм

$$eq(f, g) = (\widetilde{\beta}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\nu}),$$

где

$$\widetilde{H} = Coeq(\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1});\ \widetilde{E} = Eq(\eta_1, \eta_2);\ \widetilde{M} = Coeq(\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1});$$

$$\widetilde{\beta} = (coeq(\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}))^{-1};\ \widetilde{\eta} = eq(\eta_1, \eta_2);\ \widetilde{\nu} = (coeq(\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}))^{-1}.$$

Причем *pre* и *post* сети определим следующим образом:

$\widetilde{b} \in pre(\widetilde{e}) \Leftrightarrow \exists\, b \in (H \cup M)$ такое, что:

1) $b \in pre(\widetilde{\eta}(\widetilde{e}))$, 2) либо $\widetilde{\beta}^{-1}(b) = \widetilde{b}$, либо $\widetilde{\nu}^{-1}(b) = \widetilde{b}$;

$\widetilde{b} \in post(\widetilde{e}) \Leftrightarrow \exists\, b \in (H \cup M)$ такое, что:

1) $b \in post(\widetilde{\eta}(\widetilde{e}))$, 2) либо $\widetilde{\beta}^{-1}(b) = \widetilde{b}$, либо $\widetilde{\nu}^{-1}(b) = \widetilde{b}$.

Проиллюстрируем на конкретном примере (рис. 5) построение уравнителя пары морфизмов. Здесь $f$ действует на множестве $E$ следующим образом: $f(a) = a'$, $f(b) = c'$, на множестве *M’*; так $f(1') = 1$ на множестве *H’* $f(2') = 2$, $f(3') = 3$, $f(4') = 4$, $f(5') = 4$. $g$ действует на множестве $E$ следующим образом: $g(a) = b'$, $g(b) = c'$, на множестве *M’* так: $g(1') = 1$, на множестве *H’* $g(2') = 2$, $g(3') = 4$, $g(4') = 4$, $g(5') = 3$.

Очевидно, что $f$ и $g$ являются морфизмами представленных сетей.

Найдем уравнитель на событиях и коуравнители на условиях (рис. 6), тогда получим следующую сеть и морфизм, представляющие собой уравнитель пары морфизмов $f$ и $g$.

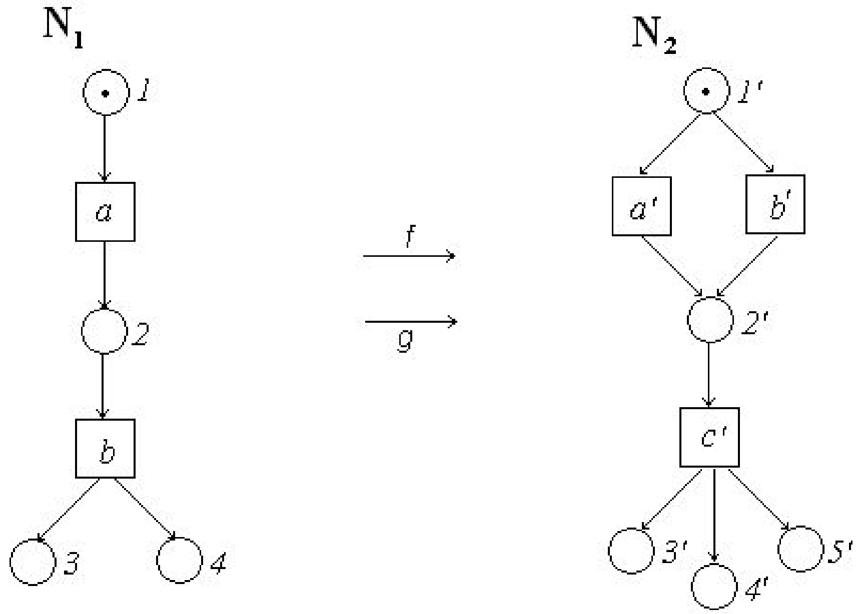


*Рис. 5.* Пара параллельных морфизмов.

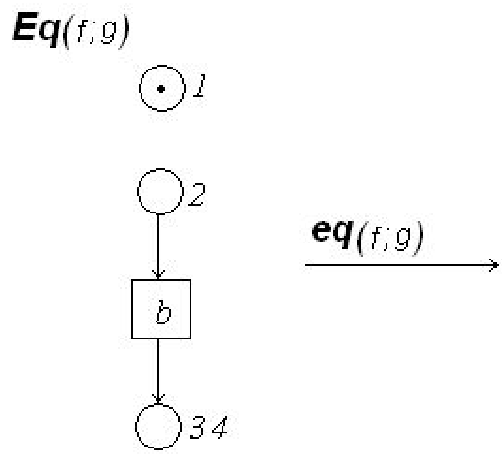


*Рис. 6.* Уравнитель пары.

Здесь $eq(f;g)$ морфизм, действующий на множестве событий – $eq(f;g)(b)=b$; на множестве $M$ – $eq(f;g)(1)=1$, на множестве $H$ – $eq(f;g)(3)=34$, $eq(f;g)(4)=34$. Очевидно, что данная конструкция уравнивает морфизмы $f$ и $g$; кроме того, она обладает свойством универсальности.

Предложение 5. Пусть даны пара сетей

$N=(H,E,M,pre,post)$, $N'=(H',E',M',pre,post)$

и пара параллельных морфизмов между ними из $N$ в $N'$

$f=(\beta_1,\eta_1,\nu_1)$ *и* $g=(\beta_2,\eta_2,\nu_2)$, коуравнителем этой пары будет сеть

$$Coeq(f,g) = \left(\widetilde{H}, \widetilde{E}, \widetilde{M}, pre, post\right)$$

и морфизм

$$coeq(f,g) = \left(\widetilde{\beta}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\nu}\right),$$

где

$$\widetilde{H} = Eq\left(\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}\right); \widetilde{E} = Coeq(\eta_1, \eta_2); \widetilde{M} = Eq\left(\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}\right);$$

$$\widetilde{\beta} = \left(eq\left(\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}\right)\right)^{-1}; \widetilde{\eta} = coeq(\eta_1, \eta_2); \widetilde{\nu} = \left(eq\left(\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

Причем *pre* и *post* сети определим следующим образом

$\widetilde{b} \in pre(\widetilde{\eta}(e')) \Leftrightarrow \exists\, b' \in (H' \cup M')$ такое, что:

1) $b' \in pre(e')$; 2) либо $\widetilde{\beta}^{-1}(\widetilde{b}) = b'$, либо $\widetilde{\nu}^{-1}(\widetilde{b}) = b'$;

$\widetilde{b} \in post(\widetilde{\eta}(e')) \Leftrightarrow \exists\, b' \in (H' \cup M')$ такое, что:

1) $b' \in post(e')$; 2) либо $\widetilde{\beta}^{-1}(\widetilde{b}) = b'$, либо $\widetilde{\nu}^{-1}(\widetilde{b}) = b'$.

Покажем теперь построение коуравнителя пары морфизмов. В качестве конкретного примера рассмотрим рис. 5. Найдем коуравнитель на событиях и уравнители на условиях. И получим следующую сеть и морфизм, которые и будут представлять собой коуравнитель пары морфизмов *f* и *g*.

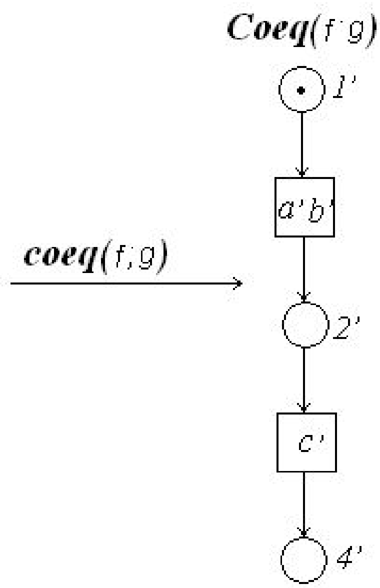


*Рис. 7.* Коуравнитель пары.

Здесь $coeq(f;g)$ морфизм действующий: на множестве событий – $coeq(f;g)(a') = a'b'$; на множестве *M'* – $coeq(f;g)(1'') = 1'$; на множестве *H'* – $coeq(f;g)(4') = 4'$. Данная конструкция уравнивает морфизмы *f*, *g* и обладает свойством универсальности.

<u>Предложение 6.</u> Пусть в категории C существует уравнители всех пар морфизмов, а также произведения всех семейств объектов. Тогда в C существует предел любой диаграммы. Верна само собой и двойственная теорема о связи коуравнителей и сумм с копределами. Доказательство можно найти в [1].

Следствие 1. Пусть имеется диаграмма сетей $D$, тогда пределом этой диаграммы (над диаграммой) будет сеть $L = (H, E, M, pre, post)$ и семейство морфизмов по одному в каждый объект диаграммы $\{f_i = (\beta_i, \eta_i, \nu_i)\}$, где $H = Co\lim D_H$; $E = \lim D_E$; $M = Co\lim D_M$; тогда каждый морфизм из семейства представляет собой «проекцию» предела на объект диаграммы, *pre* и *post* структура сети строится естественным образом.

Следствие 2. Пусть имеется диаграмма сетей $D$, тогда копределом этой диаграммы (над диаграммой) будет сеть $L = (H, E, M, pre, post)$ и семейство морфизмов по одному из каждого объекта диаграммы $\{f_i = (\beta_i, \eta_i, \nu_i)\}$, где $H = \lim D_H$; $E = Co\lim D_E$; $M = \lim D_M$; тогда каждый морфизм из семейства представляет собой «вложение» объекта диаграммы в копредел, *pre* и *post* структура сети строится естественным образом.

## Заключение

Рассмотрена категория сетей Петри. Проиллюстрировано определение морфизмов. Представлен метод построения произведений и копроизведений ординарных сетей Петри. Разработан метод построения уравнителей и коуравнителей. Предложено конструктивное доказательство существования уравнителей и коуравнителей, конечных пределов и копределов в категории сетей Петри.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. – М.: Физматлит, 2004.
2. *Bednarczyk M.A., Borzyszkowski A.M., Somla R.* Finite Completeness of Categories of Petri Nets // Fundamenta Informaticae. – 2000. – V.43. – P.21-48.
3. *Nielsen M., Wkinskel G.* Petri Nets and Bisimulations. – Aarhus, 1995.
4. *Winskel G ., Nielsen M*. Models for Concurrency // Handbook of Logic in Computer Science, V.IV ed. Abramsky. – Gabbay, Maibaum; Oxford University Press, 1995. – P.1-148.
5. *Гринблат А.Д.* О пределах сетей Петри // Актуальные проблемы совершенствования математического и физического образования в школе и вузе. Материалы регион. науч.-практ. конф. – Комсомольск-на-Амуре, 2006. – С.33-37.



*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Олейниковым.*



*E-mail:*
*Гринблат А.Д. –* expandrey@mail.ru.