УДК 519.61

© 2010 г. **А.С. Девятисильный**, д-р техн. наук,
Д.Е. Кислов, канд. физ.-мат. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Предлагается технология численного анализа корректности математических постановок обратных задач, в основе которой лежит доказанная теорема о локализации спектральных портретов двух близких по норме линейных операторов; установлены условия разрешимости задач при их погружении в среды реализации с конечной точностью вычислений, позволяющие, в частности, проводить гарантированное исследование устойчивости стационарных динамических систем.

Ключевые слова: корректность математической постановки, спектральный портрет оператора, вычислительная устойчивость

Введение

Исследование многих прикладных задач связано с проблемой локализации собственных чисел операторов внутри определенной области в условиях их возмущений при погружении в среду вычислений. При этом в зависимости от типа решаемой задачи в качестве интересующей области могут выступать различные подмножества поля комплексных чисел. Например, при исследовании устойчивости динамической системы таковой является левая комплексная полуплоскость (в непрерывном случае) или круг единичного радиуса (в дискретном); при анализе разрешимости обратных задач (задача сводится к проверке невырожденности специальным образом построенного оператора) – вся комплексная плоскость, за исключением начала координат.

Известно [1], что при погружении операторов задач в вычислительные среды происходит возмущение их спектров. При оценке сохранения свойств решений конкретных задач крайне важно, как происходит это смещение. Достаточно наглядное представление об этом может дать обращение к спектральному портрету (или псевдоспектру, или ε–спектру) оператора [2].

В предлагаемой работе решается задача гарантированной локализации в заданной области спектрального портрета линейного конечномерного оператора

[1] Работа выполнена при частичной поддержке грантами РФФИ-ДВО № 09-01-98503-р_восток_а; ДВО РАН (№ 09-III-А-03-066, № 09-III-В-03-079 и № 09-I-П29-02).

при его погружении в вычислительную среду с конечной точностью вычислений. Изложенные результаты являются развитием идей, опубликованных в [3], и содержат новые важные обобщения теоремы о вложенности псевдоспектров операторов на случай произвольной матричной нормы, а также прикладные интерпретации теоремы, позволяющие делать гарантированные заключения о корректности математических постановок обратных задач и устойчивости стационарных динамических систем.

Теоретическая часть

Напомним, что под спектральным портретом оператора F понимается объединение всех множеств собственных значений $F + \Delta F$ при $\|\Delta F\| \le \varepsilon\|F\|$, где $\|\cdot\|$ – некоторая операторная норма.

В этом случае необходимым и достаточным условием того, что комплексное значение $л$ принадлежит ε–спектру ($л\in\Lambda_\varepsilon(F)$), является выполнение условия [1, 2].

$$\| (\lambda I - F)^{-1} \| \ge \frac{1}{\varepsilon \| F \|}.$$

Пусть далее Q пространство матриц заданной размерности; F, $\widetilde{F} \in Q$, где F – исходная, а $\widetilde{F}$ – возмущенная матрицы. Введем следующую модель возмущений, описывающую соотношение операторов F и $\widetilde{F}$:

$$\| F - \widetilde{F} \| \le \gamma \|F\|,\ 0 \le \gamma < 1, \tag{1}$$

\которую преобразуем к виду:

$$\frac{1}{1+\gamma} \| \widetilde{F} \| \le \| F \| \le \frac{1}{1-\gamma} \| \widetilde{F} \|. \tag{2}$$

Рассмотрим ε-спектры операторов F и $\widetilde{F}$. Имеем

$$\Lambda_\varepsilon(F) = \{\lambda : \| (\lambda I - F)^{-1} \| \ge \frac{1}{\varepsilon \| F \|}\},$$

$$\Lambda_\varepsilon(\widetilde{F}) = \{\lambda : \| (\lambda I - \widetilde{F})^{-1} \| \ge \frac{1}{\varepsilon \| \widetilde{F} \|}\}.$$

Из определения ε-спектра следует, что для того, чтобы $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Lambda_{\widetilde{\varepsilon}}(\widetilde{F})$, должно выполняться неравенство $\widetilde{\varepsilon} \ge \varepsilon$. Учитывая, что $F + \Delta F = F + \Delta F + \widetilde{F} - \widetilde{F} = \widetilde{F} + (F - \widetilde{F}) + \Delta F$, где ΔF – возмущение, участвующее в определении ε–спектра матрицы F ($\|\Delta F\| \le \varepsilon\|F\|$), в силу (1) и (2) имеем $\|(F - \widetilde{F}) + \Delta F\| \le \gamma \|F\| + \varepsilon\|F\| \le \gamma /(1-\gamma)\|\widetilde{F}\| + \varepsilon /(1-\gamma)\|\widetilde{F}\|$. Тогда, определяя $\widetilde{\varepsilon}$ из условия $\frac{\gamma+\varepsilon}{1-\gamma}\left\|\widetilde{F}\right\| \le \widetilde{\varepsilon}\, \| \widetilde{F} \|$, приходим к следующему.

Теорема 1. Пусть F и $\widetilde{F}$ соответственно точный и возмущенный операторы, удовлетворяющие неравенству (2). Тогда, если

$$\widetilde{\varepsilon} \ge \frac{\gamma+\varepsilon}{1-\gamma}, \tag{4}$$

то $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{F})$.

Обозначим $\tilde{\varepsilon}_0$ – максимально допустимое значение относительных возмущений оператора $\tilde{F}$, при которых начинается выход его ε-спектра из некоторой области Ω комплексной плоскости . Если при текущих значениях $г$ и $\tilde{\varepsilon}_0$ существует положительное значение ε_0, удовлетворяющее соотношению (4), то это означает вложенность ε_0-спектра F в $\tilde{\varepsilon}_0$-спектр возмущенного оператора $\tilde{F}$, что в свою очередь влечет $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$. Таким образом, верно следующее.

Следствие 1. Если

$$\tilde{\varepsilon}_0 > \frac{\gamma}{1-\gamma}, \tag{5}$$

то $\Lambda_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$.

По сути, следствие 1 – это условие существования положительного решения e, удовлетворяющего (4) при известных $г$ и $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0$, нарушение которого не гарантирует локализации спектра оператора F в заданной области Ω. Уровень относительных возмущений (ε_0), не выводящих ε_0-спектр F из области Ω, определяется из (4) при выполнении (5), т.е. $\varepsilon_0 = (1–г)\tilde{\varepsilon}_0 – г$.

При анализе устойчивости стационарной линейной системы (например, [4]), динамика которой определяется оператором F, в качестве областей локализации выступают множества $\Omega_1 = \{\lambda\colon \mathrm{Re}(\lambda) \le 0\}$ (левая комплексная полуплоскость C) – в непрерывном случае и $\Omega_2 = \{\lambda\colon |\lambda| \le 1\}$ (круг единичного радиуса в C) – в дискретном.

При исследовании проблемы разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), актуальной и при анализе наблюдаемости (управляемости) линейных динамических систем [5, 6], в качестве области Ω, в которой должен оставаться e-спектр матрицы, выступает вся комплексная плоскость, за исключением нуля, т.е. множество $\Omega_1 = \{C \setminus 0\}$. В этом случае имеем следующее.

Следствие 2. Для невырожденности исходной и возмущенной систем, заданных операторами F и $\tilde{F}$ соответственно, достаточно выполнения неравенства

$$\tilde{\mu} < \frac{1-\gamma}{\gamma}, \tag{6}$$

где $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\tilde{F})$ – число обусловленности оператора $\tilde{F}$.

Доказательство следствия строится на интерпретации определения числа обусловленности. Действительно, имеем $\| \tilde{F}^{-1} \|^{-1} = \dfrac{\| \tilde{F} \|}{\mu(\tilde{F})} = \| \Delta\tilde{F} \|$, $\| \Delta\tilde{F} \|$ – норма минимального возмущения оператора $\tilde{F}$, при котором возможно его вырождение. Но тогда $\| \Delta\tilde{F} \| = \tilde{\varepsilon}_0 \| \tilde{F} \|$ и, таким образом, $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{F}) = \mu^{-1}(\tilde{F})$. Далее, учитывая (5), приходим к (6). Существенно, что этим устанавливается новая область значений для параметра $г$, а именно: $0 \le г < 0$, т.е. условие (6) является калибровочным для г.

Изложенные выше теоретические положения требуют прикладной интерпретации в условиях конечной точности вычислений, характерной для реальных арифметических устройств.

Пусть e – относительная точность представления чисел в вычислительной среде. Не нарушая общности изложения, далее положим $\gamma = e \ll 1$. Обозначим через $\tilde{\varepsilon}_0^c$ вычисленное (вообще говоря, любым способом) значение $\tilde{\varepsilon}_0$. По сути, $\tilde{\varepsilon}_0^c$ – это измерение, выполненное ЭВМ. Очевидно, $\tilde{\varepsilon}_0 < \tilde{\varepsilon}_0^c$. Отождествим накопленную в процессе вычисления $\tilde{\varepsilon}_0$ погрешность со значением $\chi(e)$, так что

$$\tilde{\varepsilon}_0 + \chi(e) = \tilde{\varepsilon}_0^c. \tag{7}$$

Пусть $\chi(e) = K_1e+K_2e^2$. Рассматривая далее $\tilde{\varepsilon}_0$, K_1 и K_2 в качестве неизвестных констант, приходим к выводу, что для их определения достаточно вычислить правую часть (7) для трех различных значений e (т.е. e_1,e_2,e_3, $e_1>e_2>e_3$) и разрешить полученную систему трех линейных уравнений вида (7). Полученные в результате такой процедуры оценки обозначим через $\tilde{\varepsilon}_0^e$, K_1^e и K_2^e. Тогда условие, гарантирующее вложенность спектра оператора F в заданную область Ω (например, $\Omega = \Omega_1$, $\Omega = \Omega_2$), имеет вид $K_1^e e + K_2^e e^2 = \chi^e(e) < \tilde{\varepsilon}_0^e$ и должно выполняться по крайней мере для случая наименьшего (e_3) из значений e. Заметим, что условие (5) для $\tilde{\varepsilon}_0^e$ (в отличие от $\tilde{\varepsilon}_0$), вообще говоря, не является гарантирующим.

В случае, когда исследуется проблема вырожденности оператора и $\Omega = \Omega_0$, обращаясь к доказательству следствия 2, перепишем (7) в виде $\dfrac{1}{\tilde{\mu}} + \chi(e) = \dfrac{1}{\tilde{\mu}^c}$, где $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\mu}^c$ – соответственно истинное и вычисленное (вообще говоря, любым способом) значения числа обусловленности оператора $\tilde{F}$. Прибегая далее к процедуре, аналогичной вышеизложенной, получаем условие, гарантирующее невырожденность оператора F, а именно: $\tilde{\mu}^e < \mu^* = 1/\chi^e(e)$, где $\tilde{\mu}^e$ – оценка числа $\tilde{\mu}$. Отметим также, что условие (6) для $\tilde{\mu}^e$ (в отличие от $\tilde{\mu}$), вообще говоря, не является гарантирующим.

Вычислительные эксперименты

Пример 1. Исследуется устойчивость матрицы F, описывающей динамику дискретной линейной системы.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & z & 0 & -0.7234 & 0 \\ -1.5376\cdot10^{-6} & 0 & 0 & z & -0.0061 & -z \\ -z & 0 & 0 & 1 & -0.2432 & 0 \\ 0 & -z & -1.5376\cdot10^{-6} & 0 & -0.0018 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & -0.5704 & 1 \\ 0 & z & 0 & 0 & -0.0046 & 0 \end{pmatrix},$$

где $z = 5.9411 \cdot 10^{-5}$.

Тогда $\Omega = \Omega_2$. В табл. 1 приведены результаты для четырех матричных норм, первые три из которых – подчиненные (индуцированные), последняя, евклидова (фробениусова), – векторная. Вычисления выполнены при $e_1 = 1.19 \cdot 10^{-7}$, $e_2 = 2.22 \cdot 10^{-16}$ и $e_3 = 1.08 \cdot 10^{-19}$ (так называемые одинарная, двойная и расширенная машинные точности).

Таблица 1

Норма	$\tilde{\varepsilon}_0^e$	$\chi^e(e)$
$\|\cdot\|_1$	0.116920219837503	$3.68 \cdot 10^{-17}$
$\|\cdot\|_2$	0.170845322693065	$4.28 \cdot 10^{-17}$
$\|\cdot\|_\infty$	0.109396611965521	$2.28 \cdot 10^{-17}$
$\|\cdot\|_F$	0.103989809826734	$1.99 \cdot 10^{-17}$

Как видим, для всех матричных норм $\chi^e(e) < \tilde{\varepsilon}_0^e$ и, следовательно, спектры матриц $\tilde{F}$ и F принадлежат Ω_2, т.е. $\Lambda(\tilde{F}) \in \Omega_2$ и $\Lambda(F) \in \Omega_2$.

Действительно, $\Lambda(\tilde{F})$ = {–0.562143820645085, –0.008165871472793, –0.000040614091017±0.001296771322193*i*, –0.000039559588110 ± 0.001180536479058*i*.

Пример 2. Исследуется матрица

$$F = \begin{pmatrix} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 \end{pmatrix},$$

которая вырождена, причем кратность нулевого собственного значения равна 5. В этом случае $\Omega = \Omega_0$.

Результаты вычисления собственных чисел в среде с $e=e_2$ (одно действительное и четыре мнимых числа) приводят к ложному заключению о невырожденности F.

Вместе с тем результаты исследования, приведенные в табл. 2 (при $e=e_1$, $e=e_2$ и $e=e_3$), показывают, что гарантирующее условие невырожденности матрицы (т.е. $\tilde{\mu}^e < \mu^*$) не выполняется ни для одной из матричных норм.

Таким образом, утверждать, что исследуемый оператор невырожден, вообще говоря, нельзя, так же, как нельзя утверждать и обратное.

Таблица 2

Норма	$\widetilde{\mu}^e$	$1/\chi^e(e)$
$\|\cdot\|_1$	$4.11\cdot 10^{15}$	$2.91\cdot 10^{15}$
$\|\cdot\|_2$	$1.0\cdot 10^{15}$	$8.6\cdot 10^{14}$
$\|\cdot\|_\infty$	$5.2\cdot 10^{15}$	$3.4\cdot 10^{15}$
$\|\cdot\|_F$	$7.3\cdot 10^{15}$	$6.2\cdot 10^{15}$

Заключение

Таким образом, в работе сформулированы и доказаны новые теоретические положения, расширяющие представление об ε–спектрах матричных операторов, а также выполнена прикладная интерпретация этих положений, результаты которой позволяют делать объективные выводы о наблюдаемости, управляемости и устойчивости решений обратных задач в условиях конечной точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малышев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. – Новосибирск: Наука, 1991.
2. *Годунов С.К., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Спектральные портреты матриц. Препр.–№ 3. Сиб. отделение Института математики. – Новосибирск, 1990.
3. *Кислов Д.Е.* Об условиях локализации спектров операторов // Информатика и системы управления. – 2009. – № 1. – С.116-120.
4. *Девятисильный А.С., Крыжко И.Б.* Исследование устойчивости задачи коррекции инерциальной навигационной системы на неподвижном основании // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2000. – №3. – С.125–130.
5. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
6. *Девятисильный А.С., Кислов Д.Е.* Устойчивость динамических алгоритмов определения орбит квазистационарных ИСЗ // Космические исследования. – 2007. – Т.45, №2. – С.138-143.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ю.Н.Кульчиным.

E-mail:
Девятисильный А.С. – devyatis@iacp.dvo.ru;
Кислов Дмитрий Евгеньевич – kisl_di@mail.ru.