Надежность
2003. №2(6)

УДК 681.5.015.63

© 2003 г. **О.В. Абрамов,** д-р техн. наук,
А.Н. Розенбаум, д-р техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

МИНИМАКСНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА АНАЛОГОВЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача обеспечения надежности аналоговых технических устройств и систем. Как косвенные показатели надежности используются характеристики положения вектора расчетных (номинальных) значений параметров в области работоспособности. Исследуются варианты их построения в виде запасов работоспособности и параметрической надежности.

Введение

Как показывает отечественный и зарубежный опыт эксплуатации технических систем, значительную часть их отказов составляют постепенные (или параметрические) отказы. При этом задача учета случайных отклонений параметров от расчетных в заданном временном интервале функционирования признается одной из наиболее сложных и трудоемких. Для решения проблемы проектирования технических устройств и систем с учетом производственных (технологических) и эксплуатационных отклонений параметров от номинальных (расчетных) значений обычно привлекается функционально-параметрический подход [1,2], основу которого составляют вычислительный эксперимент (математическое моделирование процессов функционирования исследуемых устройств и закономерностей вариаций их параметров на ЭВМ) и оптимальный параметрический синтез по критериям надежности.

Основные трудности, возникающие при решении задачи синтеза технических устройств и систем с учетом отклонений параметров от номинальных значений, связаны прежде всего с дефицитом информации о закономерностях случайных процессов вариации их параметров и высокой вычислительной трудоемкостью решения оптимизационных задач со стохастическим критерием, к числу которых относится и задача параметрического синтеза с учетом требований надежности [3, 4].

Задача параметрического синтеза с учетом требований надежности

Задача параметрического синтеза технических устройств и систем [1, 4] состоит в выборе номинальных значений параметров исследуемого устройства $\mathbf{x}_{\text{ном}} = (x_{1\,\text{ном}},...,x_{n\,\text{ном}})$, обеспечивающих максимум вероятности безотказной работы в течение заданного времени:

$$\mathbf{x}_{\text{ном}} = \arg\max P\{\mathbf{X}(\mathbf{x}_{\text{ном}},t) \in D, \forall t \in [0,T]\}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}_{\text{ном}},t)$ – случайный процесс изменения параметров; D – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации устройства.

Исходными в рассматриваемой задаче являются условия работоспособности, задаваемые обычно в виде допусков на выходные параметры $\mathbf{y}(t) = \{y_j(t)\}_{j=1}^{m}$, а также математическая модель системы $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t))$, определяющая зависимость выходных параметров от параметров схемных элементов $\mathbf{x}(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^{N}$ в виде непрерывных зависимостей

$$y_j(t) = y_j(\mathbf{x}(t)), j = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Следует отметить, что в большинстве случаев такая зависимость задается не в явной, а в алгоритмической форме, в частности через численные решения систем уравнений (дифференциальных или алгебраических), описывающих функционирование исследуемой системы.

В общей форме условия работоспособности можно представить как

$$d_{1j} \le y_j(t) \le d_{2j}, \forall t \in T, j = \overline{1,m}, \qquad (3)$$

или

$$P(d_{1j} \le y_j(t) \le d_{2j}, \forall t \in T) \ge P_{nj},\ j = \overline{1,m}, \qquad (4)$$

где d_{1j}, d_{2j} – границы поля допуска для $y_j(t)$; P_{nj} – заданная вероятность выполнения j-го условия работоспособности.

Расчет параметрической надежности базируется на анализе взаимосвязей выходных характеристик системы и параметров составляющих ее элементов с учетом технологического разброса, температурного и временного дрейфа этих параметров. Определенной характеристикой параметрической надежности является область работоспособности D, построенная в координатах параметров схемных элементов системы. Совокупность параметров, влияющих на работоспособность системы в данный момент, может быть представлена изображающей точкой в n-мерном пространстве этих параметров. Для обеспечения надежности работы эта точка должна находиться внутри области D. При этом расстояние от изображающей точки до границ D можно рассматривать как некоторый запас надежности и работоспособности системы.

Область работоспособности D, т.е. область пространства параметров $\mathbf{x} \in R^n$, во всех точках которой одновременно выполняются условия работоспособности вида (3), может быть построена по математической модели системы, представленной, например, в виде соотношений (2). При этом наиболее распространенными на практике методами построения области работоспособности D являются методы матричных испытаний, контурного обхода и секущих [1, 5].

Построение области работоспособности D является, по сути, первым этапом решения общей задачи анализа параметрической надежности систем. Следующими этапами решения этой задачи являются назначение допусков и выбор номинальных значений параметров схемных элементов проектируемой системы. Выполнение этих этапов связано с расчетами некоторых, как правило, статистических показателей надежности РЭА, – например, таких как вероятность безотказной работы $P(\mathbf{x})$ на интервале эксплуатации T и т.п. Кроме статистических показателей могут использоваться и детерминированные (минимаксные) типа «запасов» (работоспособности, надежности и т.д.). Расчет таких показателей не требует знания полных вероятностных характеристик случайных величин, фигурирующих в математической модели системы. По отношению к статистическим они имеют более ясную физическую интерпретацию (измеряемое определенным образом расстояние от номинальной точки до границы области D). Вместе с тем расчет «запаса» (работоспособности, надежности и т.п.) по каждому из схемных параметров $\mathbf{x}$ затрудняет оценку влияния величин этих «запасов» на выполнение того или иного условия работоспособности системы в целом. При этом целесообразно рассматривать показатели типа «запасов» относительно не схемных, а выходных параметров системы, ограничения на которые и составляют условия работоспособности системы.

Запасы работоспособности и параметрической надежности

Наиболее известными среди показателей надежности типа «запасов», построенных относительно выходных параметров системы, являются показатели «запаса» работоспособности и «запаса» параметрической надежности. Рассмотрим конструкцию первого из этих показателей.

Пусть условия работоспособности относительно всех выходных параметров приведены к виду:

$$y_j < d_j + \delta_j, -y_j < -d_j + \delta_j. \quad (5)$$

Здесь величины δ_j, $j = \overline{1,m}$ можно рассматривать как некоторые запасы на выполнение соответствующих неравенств или как количественные оценки степени их удовлетворения. Отсюда при переходе к безразмерным величинам и преобразовании неравенств в тождества получаем

$$S_j^* = (d_j - y_j)/\delta_j, j = \overline{1,m}, \quad (6)$$

где S_j^* – относительная величина оценки степени выполнения j-го неравенства в соотношениях (5). В выражении (6) y_j, а следовательно, и S_j^* –

случайные величины. Для устранения элемента случайности в (6) применим операцию математического ожидания, тогда

$$M[S_j^*] = M[(d_j - y_j)/\delta_j],$$

или

$$S_j = (d_j - M[y_j])/\delta_j, \qquad (7)$$

где S_j – «запас» работоспособности системы по y_j, характеризующий удаленность его номинального значения от границы d_j в долях величины δ_j, характеризующей рассеяние y_j. Учитывая, что $M[y_j] = y_{Hj}$, получаем

$$S_j = (d_j - y_{Hj})/\delta_j. \qquad (8)$$

Очевидно, что S_j, $j = \overline{1,m}$ можно рассматривать как некоторый детерминированный показатель параметрической надежности системы. При этом если δ_j, $j = \overline{1,m}$ определять с помощью статистического анализа, то S_j, $j = \overline{1,m}$ превращается в статистический показатель. Обычно, как это и принято при выводе зависимости (8), δ_j, $j = \overline{1,m}$ считаются постоянными величинами, задаваемыми на основе априорных данных о рассеянии выходных параметров.

Другой показатель надежности типа «запасов» – показатель «запаса» параметрической надежности – может быть построен следующим образом.

Пусть условия работоспособности вида (3) в некоторые заданные моменты времени $t_k \in T$ можно представить как

$$|y_j| \le d_j, \ j = \overline{1,m}.$$

Такое представление широко распространено на практике (для многих типов технических систем ограничения на выходные координаты задаются симметрично, т.е. $d_j = -d_j^*$). Достаточно распространенным является и задание требований на выполнение условий работоспособности в виде

$$P(|\mathbf{y}| < \mathbf{d}) > P_t,$$

т.е. с вероятностью $P_t < 1$ при наложении ограничений на некоторые схемные переменные (для обеспечения работоспособности и режимов работы элементов)

$$X_i^H(t) \le X_i(t) \le X_i^B(t), \ i = 1,2,..., \ t \in T.$$

Плотность совместного распределения для системы случайных величин

$$f(|\mathbf{y}|) = \frac{\partial^m F(|\mathbf{y}|)}{\partial |\mathbf{y}|^m}$$

позволяет определить вероятность попадания в пределы m-мерной области $D^{*}=\{\mathbf{y}\in R^{m}:|\mathbf{y}|\le \mathbf{d}\}$ случайных величин $|\mathbf{y}|$ как

$$P\{|\,\mathbf{y}\,|\in D^{*}\}=\int\limits_{\Delta^{*}} f(|\,y\,|)\,d|\,y\,|. \qquad (9)$$

Соотношение (9) характеризует вероятность безотказной работы системы в заданные моменты времени $t_k \in T,\ k=1,2,...$ Величина $P\{|\mathbf{y}|\in D^{*}\}$ позволяет количественно оценить надежность системы при $t_k \in T,\ k=1,2,...$, но не раскрывает возможностей ее повышения. Более полно характеризует надежность системы показатель «запаса» параметрической надежности, т.к. дает оценку запаса, обеспечиваемого по отношению к условиям работоспособности. Он позволяет судить о способности (или неспособности) системы удовлетворить более высокие требования технического задания. Для построения данного показателя введем зависимость вида

$$H(y)=\sqrt[q]{\left|\frac{y_1}{d_1}\right|^{q}+\left|\frac{y_2}{d_2}\right|^{q}+...+\left|\frac{y_m}{d_m}\right|^{q}},q=2,3,... \qquad (10)$$

Ее можно рассматривать как норму некоторого вектора $\mathbf{y}$ с координатами $\left|\frac{y_1}{d_1}\right|,...,\left|\frac{y_m}{d_m}\right|$, т.е. $H(\mathbf{y})=\|\mathbf{y}\|$. Преобразуем (10), вынося под радикалом за знак суммы наибольший по величине член:

$$H(y)=\sqrt[q]{\left|\frac{y_j}{d_j}\right|^{q}\cdot\left[\frac{|y_l/d_l|^{q}}{|y_j/d_j|^{q}}+...+1+...+\frac{|y_m/d_m|^{q}}{|y_j/d_j|^{q}}\right]}.$$

Поскольку

$$\lim_{q\to\infty}\left[\frac{|y_l/d_l|^{q}}{|y_j/d_j|^{q}}+...+1+...+\frac{|y_m/d_m|^{q}}{|y_j/d_j|^{q}}\right]=1,$$

то

$$H(\mathbf{y})=\left|\frac{y_j}{d_j}\right|_{\max},\quad j=\overline{1,m}, \qquad (11)$$

где $\left|\frac{y_j}{d_j}\right|_{\max}=\max\limits_{j}\left\{\frac{y_j}{d_j}\right\},\ j=\overline{1,m}$.

Вероятность того, что максимальная из компонент вектора $\mathbf{y}$ не выйдет за пределы допуска с учетом (11), можно определить как

$$P\big(H(\mathbf{y})<1\big)=\int_0^1 f\big[H(\mathbf{y})\big]dH(\mathbf{y}), \qquad (12)$$

где $f[H(\mathbf{y})]$ – плотность распределения случайной величины $H(\mathbf{y})$ из (11).

Интегральный закон распределения случайной величины $H(\mathbf{y})$ можно представить в виде

$$F(a) = P(H(\mathbf{y}) < a). \tag{13}$$

Очевидно, что выражение (13) для любого произвольного a определяет вероятность нахождения внутри m-мерного прямоугольника со сторонами $d_j \cdot a,\ j = \overline{1,m}$ максимальной по величине выходной координаты (а следовательно, и всех других, меньших по величине), т.е. $P(|\mathbf{y}| < \mathbf{d}a)$. При $a = 1$ по (13) можно оценить вероятность удовлетворения РЭА условиям работоспособности $P(|\mathbf{y}| < \mathbf{d})$. При этом любую точку на $F(a)$ можно интерпретировать как некоторую оценку вероятности выполнения условий работоспособности на заданном уровне.

Для идеальной, абсолютно надежной РЭА интегральный закон распределения $F(a)$ представляет собой «ступеньку», совпадающую с осью ординат и линией вероятности, равной 1. Очевидно, что для неидеальных систем (с вероятностью безотказной работы меньше 1) соответствующие им кривые $F(a)$ в полуплоскости $\{F(a), a\}$ всегда будут лежать правее идеальной кривой («ступеньки») $F(a)_{\text{ид}}$. При этом мерой близости реальной системы к идеальной может служить площадь, заключенная между реальной кривой $F(a)$ и $F(a)_{\text{ид}}$, т.е. функционал вида

$$G = \int_{\alpha_н}^{\alpha_в} \{F(a)_{\text{ид}} - F(a)\}\, da .$$

С учетом того, что $F(a)_{\text{ид}} = 1$, для $\forall a$ получаем

$$G = \int_{\alpha_н}^{\alpha_в} [1 - F(a)]\, da , \tag{14}$$

где $\alpha_в, \alpha_н$ – пределы интегрирования. В общем случае $\alpha_н = 0,\ \alpha_в = \infty$.

Очевидно, что как мера близости реально и идеально надежных систем величина G характеризует и величину потенциального «запаса» надежности реальной системы. Иными словами, G – показатель «запаса» параметрической надежности системы.

Следует отметить, что определенные допущения, принятые при выводе показателя G, – например, рассмотрение вероятности невыхода $\mathbf{y}(t)$ за пределы допуска только в одной точке интервала T, фактическое игнорирование не максимальных по величине компонент $\mathbf{y}$, – требуют некоторых пояснений. Относительно рассмотрения вероятности невыхода $\mathbf{y}(t)$ за пределы допуска только в одной точке интервала T можно заметить, что поскольку построение функции $F(a)$ предполагает использование компьютерного моделирования на основе метода Монте-Карло, то выполнение необходимых вычислений в одной или во многих точках интервала T существенных отличий не имеет и связано с увеличением затрат машинного времени. Использование же не максимальных по величине компонент $\mathbf{y}$ вполне допустимо с точки зрения минимаксного метода (ориентация на наихудший случай). В тех же ситуациях, когда грубые минимаксные оценки неприемлемы, можно использовать традиционные для векторной оптимизации преобразования и свертки векторного критерия, т.е. вектора $\mathbf{y}$ [4].

Свойства показателей запасов работоспособности и надежности

В определенном смысле показатели «запасов» работоспособности и параметрической надежности являются некоторыми аналогами показателя вероятности безотказной работы. В частности, они эквивалентны в смысле нахождения экстремума при решении оптимизационных задач. При этом использование показателя вероятности безотказной работы как критерия выбора номинальных значений параметров $\mathbf{x}_{\text{н}}$ вдали от границ области работоспособности D часто бывает малоэффективным вследствие его малой чувствительности к изменениям $\mathbf{x}_{\text{н}}$ в данной зоне. Действительно, вероятность безотказной работы $P_T(\mathbf{x})$ на интервале эксплуатации T можно представить в виде

$$P_T(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{y} \in D^*, \forall t \in T\} = P_1(y_1) \cdot P_2(y_2 / y_1) \ldots \cdot P_m(y_m / y_1, ..., y_{m-1}), \quad (15)$$

где $P_1(y_1)$ – безусловная вероятность выполнения 1-го условия работоспособности; $P_k(y_k / y_1, ..., y_{k-1})$ – условная вероятность выполнения k-го условия работоспособности, $k = \overline{2,m}$.

В случае независимых выходных параметров y_j, $j = \overline{1,m}$ вероятность (15) может быть записана как

$$P_T(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} P_j(y_j).$$

При нахождении номинальной точки $y(\mathbf{x}_{\text{н}})$ вдали от границ области D^* вероятности $P_j(y_j)$ близки к нулю или единице (или равны им для усеченных законов распределений $f_j(y)$) и перестают быть чувствительными к изменениям их номинальных значений $y_j(\mathbf{x}_{\text{н}})$. Менее чувствительными по сравнению с $P_T(\mathbf{x})$ к степени удаленности $\mathbf{y}(\mathbf{x}_{\text{н}})$ от границ области D^* являются показатели «запасов» работоспособности и параметрической надежности.

Действительно, пусть вероятность удовлетворения j-го условия работоспособности можно представить как

$$P_j(y_j)=\int\limits_{d_j}^{\infty} f_j(y)dy, \qquad (16)$$

где $f_j(y)$ – плотность распределения y_j. Значение «запаса» работоспособности (8) характеризует вероятность (16)следующим образом.

<u>Теорема.</u> *В области работоспособности D вероятность* $P_j(\mathbf{x})$ *удовлетворения j-го условия работоспособности является неубывающей монотонной функцией «запаса» работоспособности* $S_j(\mathbf{x})$ *и*

$$\max_{\mathbf{x}\in D} P_j(\mathbf{x})=P_j(S_j(\mathbf{x}^*)),$$

где

$$S_j(\mathbf{x}^*)=\max_{\mathbf{x}\in D} S_j(\mathbf{x}).$$

<u>Доказательство.</u> В (8) величина δ_j как характеристика рассеяния выходных параметров, задающая их возможные уходы, может быть представлена как

$$\delta_j = y_{Hj}(\mathbf{x})-y_{Pj}(\mathbf{x}),\ \delta_j>0,\ \ j=\overline{1,m}, \qquad (17)$$

где $y_{Hj}(\mathbf{x})$ – номинальное значение, а $y_{Pj}(\mathbf{x})$– квантиль уровня $P\approx 0$ j-го выходного параметра, т.е.

$$P=P\{y_j(t)\le y_{Pj}(\mathbf{x})\}=\int\limits_{-\infty}^{y_{Pj}(\mathbf{x})} f_j(y)dy. \qquad (18)$$

При этом соотношение (8) можно записать в виде

$$S_j(\mathbf{x})=(y_{Hj}(\mathbf{x})-d_j)/\delta_j(\mathbf{x})-1. \qquad (19)$$

С учетом (17) и (19)

$$d_j=y_{pj}(\mathbf{x})-S_j(\mathbf{x})\cdot\delta_j(\mathbf{x}). \qquad (20)$$

Тогда после подстановки (20) в (16) получим

$$P_j(\mathbf{y}_j)=P_j(\mathbf{x})=\int\limits_{y_{Pj}(\mathbf{x})}^{-\infty} f_j(y)dy+\int\limits_{y_{Pj}(\mathbf{x})-S_j(\mathbf{x})\delta_j(\mathbf{x})}^{y_{Pj}(\mathbf{x})} f_j(y)dy=$$
$$=P_T+\int\limits_{y_{Pj}(\mathbf{x})-S_j(\mathbf{x})\delta_j(\mathbf{x})}^{y_{Pj}(\mathbf{x})} f_j(y)dy, \qquad (21)$$

где $P_T=1-P$, P – вероятность (18).

Из формулы (21) следует, что вероятность удовлетворения условия работоспособности следующим образом зависит от значения «запаса» работоспособности $S_j(\mathbf{x})$:

$P_j(\mathbf{x}) < P_T$, если $S_j(\mathbf{x}) < 0$,

$P_j(\mathbf{x}) = P_T$, если $S_j(\mathbf{x}) = 0$,

$P_j(\mathbf{x}) > P_T$, если $S_j(\mathbf{x}) > 0$,

т.е. в окрестности нуля функции $S_j(\mathbf{x})$ возрастает $P_j(\mathbf{x})$ с ростом $S_j(\mathbf{x})$ и, кроме того, $P_j(\mathbf{x}) \Rightarrow 1$ при $S_j(\mathbf{x}) \Rightarrow \infty$ и $P_j(\mathbf{x}) \Rightarrow 0$ при $S_j(\mathbf{x}) \Rightarrow -\infty$.

Далее доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $P_j(\mathbf{x}) \Rightarrow 1$ при возрастании $S_j(\mathbf{x})$ в области D не строго монотонно, т.е. существуют точки $\mathbf{x}^0$, в которых значение $P_j(S_j(\mathbf{x}^0))$ достигает своего локального максимума $P_j(S_j(\mathbf{x}^0)) = P^0 < 1$, и точка $\mathbf{x}^+$, в которой $S_j(\mathbf{x}^+) > S_j(\mathbf{x}^0)$, а вероятность $P_j(S_j(\mathbf{x}^+))$ принимает значение

$$P_j(S_j(\mathbf{x}^+)) \le P_j(S_j(\mathbf{x}^0)). \tag{22}$$

Найдем в точке $\mathbf{x}^0$ квантиль y_{p0} распределения $f_j(y)$ уровня $P_0 = 1 - P^0$ и построим «запас» работоспособности по (19) и (17), взяв в качестве уровня вероятности P значение P_0. При этом формула (21) может быть представлена как

$$P_j(\mathbf{x}) == P^0 + \int\limits_{y_{P0}(\mathbf{x}) - S_j^0(\mathbf{x})\delta_j^0(\mathbf{x})}^{y_{P0}(\mathbf{x})} f_j(y)dy, \tag{23}$$

где $S_j^0(\mathbf{x}) = \left(y_{Hj}(\mathbf{x}) - d_j\right)/\delta_j^0(\mathbf{x}) - 1$, $\delta_j^0(\mathbf{x}) = y_{Hj}(\mathbf{x}) - y_{P_0}(\mathbf{x})$.

В соответствии с принятым предположением в точке $\mathbf{x}^0$ вероятность $P_j(\mathbf{x}^0) = P^0$. Следовательно, $S_j^0(\mathbf{x}^0) = 0$, $y_{P_0}(\mathbf{x}^0) = d_j$. При возрастании в окрестности нуля функции $S_j^0(\mathbf{x})$ значение вероятности $P_j(\mathbf{x})$ также возрастает, т.к. при $P^0 < 1$ значение $y_{P_0}(\mathbf{x}^0)$ еще не достигло границ усечения плотности вероятностей $f_j(y)$. Поэтому значение интеграла в (23) при положительном значении $S_j^0(\mathbf{x})$ больше нуля.

Теперь покажем, что причины, вызывающие любое увеличение функции $S_j(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$, приводят к увеличению $S_j^0(\mathbf{x})$ и, следовательно, к увеличению вероятности $P_j(\mathbf{x})$, т.е. покажем, что наше предположение о не монотонности изменения вероятности $P_j(\mathbf{x})$ с изменением $S_j(\mathbf{x})$ в области D при $P_j(\mathbf{x}) < 1$ неверно.

Поскольку переменные $S_j(\mathbf{x})$, $S_j^0(\mathbf{x})$, $\delta_j(\mathbf{x})$, $\delta_j^0(\mathbf{x})$, $y_{pj}(\mathbf{x})$ характеризуют одно и то же распределение $f_j(y)$ в номинальной точке $\mathbf{x}_H$, то в соответствии с (19)

$$y_{Hj}(\mathbf{x}) - d_j = \left(S_j^0(\mathbf{x}) + 1\right)\delta_j^0(\mathbf{x})$$

или

$$S_j^0(\mathbf{x}) = \left(\left(S_j^*(\mathbf{x}) + 1\right)\delta_j(\mathbf{x})\right)/\delta_j^0(\mathbf{x}) - 1. \qquad (24)$$

Найдем связь параметра рассеивания $\delta_j(\mathbf{x})$ и уровня вероятности P задания квантиля $y_{Pj}(\mathbf{x})$ в формуле (18). Подставив зависимость $y_{Pj}(\mathbf{x})$ от $\delta_j(\mathbf{x})$ и $y_{Pj}(\mathbf{x})$ в выражении (18), получим

$$P = \int_{-\infty}^{y_{Pj}(\mathbf{x})} f_j(y)dy = \int_{-\infty}^{y_{Pj}(\mathbf{x}) - \delta_j(\mathbf{x})} f_j\left(\frac{y - y_{Hj}(\mathbf{x})}{\delta_j(\mathbf{x})}\right)dy.$$

После замены переменных

$$u = \left(y - y_{Hj}(\mathbf{x})\right)/\sigma_j(\mathbf{x});\ y = u \cdot \sigma_j(\mathbf{x}) + y_{Hj}(\mathbf{x});\ d_j = \sigma_j(\mathbf{x})d_j \qquad (25)$$

интеграл принимает вид

$$P = \int_{-\infty}^{-\delta_j(\mathbf{x})/\sigma_j(\mathbf{x})} \sigma_j(\mathbf{x}) f_j(u)du = F_j\left(-\delta_j(\mathbf{x})/\sigma_j(\mathbf{x})\right),$$

где $F_j(q) = \int_{-\infty}^{q} \sigma_j f_j(u)du$; $f_j(u)$ – плотность нормированной преобразованием (25) случайной величины $y_j(\mathbf{x})$; $\sigma_j(\mathbf{x})$ – среднеквадратичное отклонение $y_j(\mathbf{x})$. Отсюда получаем следующую зависимость $\delta_j(\mathbf{x})$ от P:

$$\delta_j(\mathbf{x}) = -\sigma_j\left(\mathbf{x} \cdot F_j^{-1}(P)\right), \qquad (26)$$

где $F_j^{-1}(P)$ – квантиль уровня P нормированного распределения $F_j(q)$. После подстановки (26) в (24) находим

$$S_j^0(\mathbf{x}) = \left(S_j(\mathbf{x}) + 1\right)F_j^{-1}(P) / F_j^{-1}(P_0) - 1. \qquad (27)$$

Производная от $S_j^0(\mathbf{x})$ по направлению $\mathbf{W}$ возрастания функции $S_j(\mathbf{x})$ с учетом выражения (27) равна

$$dS_j^0 / d\mathbf{W} = \left(F_j^{-1}(P) / F_j^{-1}(P_0)\right)dS_j / d\mathbf{W}$$

и в области D всегда положительна. Поэтому при любом увеличении $S_j(\mathbf{x})$ значение функции $S_j^0(\mathbf{x})$ также возрастает, в том числе и в точке $\mathbf{x}^0$, что и доказывает утверждение о монотонном стремлении к единице при увеличении «запаса» работоспособности $S_j(\mathbf{x})$. Противоречивость утверждения (22) доказывает также справедливость утверждения теоремы.

При этом все доказанные утверждения справедливы для функции (19), а так как функция (8) отличается от (19) на постоянную величину, то эти утверждения справедливы и для нее. Теорема доказана полностью.

Анализ зависимостей и соотношений, найденных в ходе доказательства теоремы, позволяет отметить следующие особенности поведения вероятности $P_j(\mathbf{x})$ с ростом $S_j(\mathbf{x})$:

1. При $S_j(\mathbf{x})<0$ значение $P_j(\mathbf{x})$ может оставаться равным нулю для усеченной справа плотности распределения вероятности $f_j(y)$ до тех пор, пока координата этого усечения, сдвигаясь вправо, остается левее ограничения d_j (кривая плотности распределения приближается к области работоспособности).

2. При $S_j(\mathbf{x})>0$ значение $P_j(\mathbf{x})$ может оставаться равным единице для усечения слева плотностей распределения вероятностей, когда ограничение d_j остается слева от координаты усечения. С ростом $S_j(\mathbf{x})$ координата усечения будет сдвигаться в области работоспособности вправо все дальше от ограничения d_j, создавая «запас» надежности и обеспечивая полное удовлетворение условий работоспособности при большом разбросе значений выходного параметра (при плотности распределения вероятностей с большой дисперсией) и, следовательно, при менее точно изготовленных элементах системы и/или более жестких условиях эксплуатации.

3. В остальных случаях с ростом $S_j(\mathbf{x})$ вероятность $P_j(\mathbf{x})$ непрерывно увеличивается, при этом кривая плотности распределения вероятности $f_j(y)$ сдвигается вправо внутрь области работоспособности.

Кроме отмеченных особенностей, анализ зависимости вероятности $P_j(\mathbf{x})$ от «запаса» работоспособности $S_j(\mathbf{x})$ и сравнение выражений (8) и (19) позволяют определить смысл введения отрицательного смещения в формулу (19). Указанное смещение введено, чтобы при использовании формулы (8) нуль функции $S_j(\mathbf{x})$ достигался при вероятности удовлетворения условия работоспособности, равной требуемой $P_j(\mathbf{x})=P_T$ (выбираемой обычно близкой к 1), а не при $P_j(\mathbf{x})=0{,}5$ (для симметричного закона распределения выходного параметра) или равной какой-нибудь другой величине, отличной от P_T, (для несимметричного закона). Иными словами, смещение, равное –1, обеспечивает возможность использования нулевого «запаса» работоспособности как индикатора удовлетворения условия работоспособности с требуемой вероятностью.

Другим показателем типа «запасов» является показатель параметрической надежности. Он, как отмечалось выше, эквивалентен показателю вероятности безотказной работы в смысле нахождения экстремума. Действительно, если при вычислении функционала G по (14) положить $\alpha_B = 1$, а $\alpha_H = 1 - \varepsilon$ (ε – сколь угодно малое число), то точки $\min G$ и $\max P_T$ практически совпадают. При этом чувствительность G по сравнению с вероятностью P_T к изменениям $\mathbf{x}_H$ вдали от границ области работоспособности D очевидным образом следует из построения данного показателя как меры близости реальной и идеальной систем.

Заключение

Использование показателей «запасов» работоспособности и надежности при решении задач анализа надежности представляет определенный интерес с точки зрения выявления потенциальных возможностей разрабатываемой системы, поиска путей их улучшения. Однако несравненно большую ценность данные показатели приобретают при использовании их как критериев оптимальности для решения задач оптимизации надежности технических систем путем выбора оптимальных значений параметров и назначения рациональных допусков на них. На практике решение подобных задач чаще всего осуществляется на основе критерия вероятности безотказной работы $P_T(\mathbf{x})$. Его низкая чувствительность к изменениям положения номинальной точки $\mathbf{x}_H$ вдали от границ области работоспособности D существенно снижает эффективность поиска оптимального решения и, в частности, при выборе номинальных значений. Показатели «запасов» работоспособности $S_j(\mathbf{x})$ и G свободны от этого недостатка. Кроме того, в вычислительном аспекте использование $S_j(\mathbf{x})$ как критерия оптимальности позволит значительно уменьшить трудоемкость поиска оптимального решения вследствие детерминированного характера $S_j(\mathbf{x})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука. 1992.
2. *Абрамов О.В.* Функцонально-параметрический подход в задачах обеспечения надежности технических систем //Надежность и контроль качества. 1999. №5. С.34-45.
3. *Абрамов О.В., Катуева Я.В., Супоня А.А.* Эффективные методы параметрической оптимизации по стохастическим критериям. // Труды международной конференции по проблемам управления. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. Т.2. С.130-132.
4. *Антушев Г.С.* Методы параметрического синтеза сложных технических систем. М.: Наука, 1989.
5. *Васильев Б.В., Козлов Б.А., Ткаченко Л.Г.* Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. М.: Советское радио, 1964.