



ЛИТЕРАТУРА

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
2. *Siljak D.D.* Large-Scale Dynamic Systems: Stability and structure. New York: North, 1978.
3. *Mahmoud M.S.* Large-Scale Control Systems Theory and Techniques. New York: Marcel Dekker, 1985.
4. *Wu Hansheng.* Decentralized robust control for a class of large scale interconnected systems with uncertainty // Int. J. Control. 1989. Vol. 20. P.2597-2680.
5. *Shi Lin and Shinh Sunil K.* Decentralized control for interconnected uncertain systems extensions to high-order uncertainties // Int. J. Control. 1993. Vol. 57. P.1453-1468.
6. *Han M.C. and Chen Y.H.* Decentralized control design: uncertain systems with strong interconnections // Int. J. Control. 1995. Vol. 61. P. 1361-1385.
7. *Stengel R.F.* Optimal control and estimation. New York: Dover publication, 1994.
8. *Гайдук А.Р.* Полиномиальный синтез нелинейных систем // АиТ. 2003. №10. С.153-162.
9. *Marcus M. and Minc H.* A survey of matrix theory and matrix inequalities. Boston: Allyn and Bacon, 1964.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.А. Нейдорфом.*

УДК 684.511

© 2005 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук,  
**Д.А. Теличенко**

(Амурский государственный университет, Благовещенск)

**АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
С ЭТАЛОННЫМ УПРЕДИТЕЛЕМ  
ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ<sup>1</sup>**

В работе синтезируются алгоритмы адаптивных систем управления с эталонным упредителем для объектов с запаздываниями по управлению и по состоянию, и запаздыванием нейтрального типа. В зависимости от типа запаздывания рассматриваются различные варианты структур основного контура управления и алгоритмов контура адаптации.

**Введение**

Среди многообразия систем управления класс систем с последствием или с запаздыванием, как правило, рассматривается отдельно, по-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках плана НИР по заданию Федерального агентства по образованию в 2005 г. «Модели и алгоритмы непрерывных и гибридных систем управления априорно неопределенными нелинейно-нестационарными объектами».

сколькo математическая модель процессов в таких системах описывается наиболее общим видом функциональных уравнений, а именно – дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом [1]. Наличие в описании системы элементов, содержащих запаздывание, приводит к необходимости использования специальных методов при построении структуры системы управления [2 – 4].

Если же принимать во внимание достаточно распространенную ситуацию, когда объект управления с запаздыванием имеет априорную параметрическую неопределенность, то в целом задача разработки такой системы автоматического управления оказывается нетривиальной. При разработке таких систем широкое распространение получил адаптивный подход, основанный на применении функционалов Ляпунова – Красовского [5], квадратичного критерия абсолютной устойчивости [6] или теории гиперустойчивости [7, 8].

В предлагаемой работе синтез системы управления проводится в рамках критерия гиперустойчивости и с помощью методики расширения ошибки слежения [9, 10]. Для компенсации запаздывания и задания желаемой динамики процессов управления используется явно-неявный эталонный упредитель [11, 12].

В работе рассматриваются три случая объектов управления с последствием, выделенных по признаку наличия в них тех иных типов запаздывания. В первом случае рассматривается объект с запаздыванием по управлению, во втором случае – с запаздываниями по состоянию и управлению, в третьем случае – с запаздыванием нейтрального типа и запаздываниями по состоянию и управлению. В каждом случае, в зависимости от типа запаздываний в объекте управления, используются соответствующие структуры эталонного упредителя.

### **Адаптивная система для объекта с запаздыванием по управлению**

*Математическая модель.* Пусть объект с запаздыванием по управлению описывается уравнениями в пространстве состояний вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t-h) + f(t), \quad y(t) = L^T \cdot x(t), \\ x(0) &= x_0, \quad u(z) = j(z), \quad z \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$  – переменные состояния;  $y(t) \in R$  – выход объекта;  $u(t) \in R$  – управляющее воздействие;  $h = const > 0$  – известное постоянное запаздывание;  $j(z) \in C_h$  – начальная функция;  $C_h$  – пространство непрерывных ограниченных функций;  $A$  и  $B$ ,  $L$  – соответствующие матрица и векторы;  $B^T = [0 \dots 0 \ 1]$ ;  $f^T(t) = [0 \dots 0 \ f_n(t)]$  – вектор постоянно действующих возмущений, причем

$$|f_n(t)| \leq f_0 = const > 0. \quad (2)$$

Передаточная функция объекта (1) имеет вид

$$W_{oy}(s) = L^T (s \cdot E - A)^{-1} B \cdot e^{-h \cdot s} = \frac{b(s)}{a(s)} e^{-h \cdot s}, \quad (3)$$

где  $E$  – единичная  $n$ -мерная матрица;  $b(s)$  – гурвицев полином с положительными коэффициентами порядка  $\deg b(s) = m$ ;  $a(s)$  – полином с произвольным расположением корней порядка  $\deg a(s) = n$ ;  $l = (n - m) > 1$  – относительный порядок передаточной функции объекта.

$$\text{Объект (1) функционирует в условиях априорной неопределенности} \\ A = A(x), \quad L = L(x), \quad f(t) = f_x(t), \quad x \in \Xi, \quad (4)$$

где  $x$  – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству  $\Xi$ .

Если к выходу объекта управления (1) подключить фильтр переменных состояния

$$W_\phi(s) = \frac{g(s)}{c(s)}, \quad (5)$$

где  $g(s)$ ,  $c(s)$  – гурвицевы полиномы степени  $n - 1$ , то уравнения этого соединения можно описать следующим образом

$$\frac{dx_\phi(t)}{dt} = A_\phi \cdot x_\phi(t) + B_\phi \cdot y(t), \quad \bar{y}(t) = L_\phi^T \cdot x_\phi(t) + D_\phi \cdot y(t), \\ n(t) = g^T \cdot \bar{y}(t), \quad (6)$$

где  $x_\phi(t) \in R^{n-1}$  – переменные состояния фильтра;  $\bar{y}(t) \in R^n$  – отфильтрованный выходной сигнал объекта;  $n(t) \in R$  – обобщенный выход;  $g$  – вектор постоянных значений, с помощью которого образуется линейный компенсатор;  $A_\phi$  – гурвицева матрица;  $B_\phi$ ,  $D_\phi$  – векторы соответствующих размерностей;  $L_\phi^T$  – матрица, элементы которой выбираются определенным образом. Заметим, что для удобства технической реализации фильтра целесообразно задать  $W_\phi(s) = 1$ , т.е.  $g(s) = c(s)$  [10].

В расширенном пространстве состояний объект управления (1) совместно с фильтром (5) можно описать уравнениями

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{B} \cdot u(t - h) + \bar{f}(t), \\ \bar{y}(t) = \bar{L}^T \cdot \bar{x}(t), \quad n(t) = g^T \cdot \bar{y}(t), \quad (7)$$

где  $\bar{x}(t) \in R^{2n-1}$  – переменные состояния;  $\bar{f}(t) \in R^{2n-1}$  – вектор возмущений;  $\bar{A}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{B}$  – матрицы и вектор соответствующих размерностей.

Для задания желаемой динамики процессов управления и компенсации запаздывания по управлению введем в систему следующий явно-неявный эталонный упредитель:

$$\frac{d\tilde{x}_M(t)}{dt} = \tilde{A}_M \cdot \tilde{x}_M(t) + \tilde{B}_M \cdot y(t), \quad (8)$$

$$y(t) = [u(t-h) - J(t)], \quad \tilde{y}_M(t) = \tilde{L}_M^T \cdot \tilde{x}_M(t),$$

где  $\tilde{x}_M(t) \in R^l$  – переменные состояния;  $\tilde{y}_M(t) \in R$  – выход эталонного упредителя;  $J(t)$  – настраиваемый выход регулятора;  $y(t)$  – обобщенный вход эталонного упредителя;  $\tilde{B}_M^T = [0 \ 0 \ \mathbf{K} \ 1]$ ,  $\tilde{L}_M$  – постоянные векторы соответствующих размерностей;  $\tilde{A}_M$  – постоянная гурвицева матрица, соответствующего порядка.

Передаточная функция эталонного упредителя (8) имеет вид

$$W_M(s) = \frac{\tilde{y}_M(s)}{y(s)} = \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)}, \quad (9)$$

где  $\tilde{a}_M(s)$  – гурвицев полином степени  $l$ ;  $k_M > 0$  – коэффициент усиления эталонного упредителя.

Если задать гурвицеву матрицу  $A_M$ , вектор  $B_M$ , исходя из выполнения тождества

$$\begin{aligned} W_M(s) &= \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)} \cdot \frac{b(s)}{b(s)} = \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)} \cdot \frac{L^T (s \cdot E_n - A)^+ B}{L^T (s \cdot E_n - A)^+ B} = \\ &= \frac{L^T (s \cdot E_n - A_M)^+ B_M}{\det(s \cdot E_n - A_M)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $b(s) = L^T (s \cdot E_n - A)^+ B$  – гурвицев полином степени  $m$ , то, аналогично [12], учитывая уравнения (8) – (10), получим следующее описание упредителя:

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M \cdot x_M(t) + B_M [u(t-h) - J(t)], \quad (11)$$

$$y_M(t) = L^T \cdot x_M(t),$$

где  $x_M(t) \in R^n$  – переменные состояния;  $y_M(t) \in R$  – выход эталонного упредителя.

Аналогично предыдущему к выходу эталонного упредителя (11) подключим фильтр переменных состояния (5) и запишем выражения вида

$$\frac{dx_\phi(t)}{dt} = A_\phi \cdot x_\phi(t) + B_\phi \cdot y_M(t), \quad (12)$$

$$\bar{y}_M(t) = L_\phi^T \cdot x_\phi(t) + D_\phi \cdot y_M(t), \quad \mathbf{n}_M(t) = g^T \cdot \bar{y}_M(t),$$

где  $\bar{y}_M(t) \in R^n$  – отфильтрованный выходной сигнал эталонного упредителя;  $\mathbf{n}_M(t) \in R$  – обобщенный выход эталонного упредителя.

В расширенном пространстве состояний эталонный упредитель (12)

совместно с фильтром (5) будет описываться уравнениями

$$\frac{d\bar{x}_m(t)}{dt} = \bar{A}_m \cdot \bar{x}_m(t) + \bar{B}_m [u(t-h) - J(t)], \quad (13)$$

$$\bar{y}_m(t) = \bar{L}^T \cdot \bar{x}_m(t), \quad \mathbf{n}_m(t) = g^T \cdot \bar{y}_m(t),$$

где  $\bar{x}_m(t) \in R^{2n-1}$  – вектор состояний;  $\bar{A}_m$ ,  $\bar{B}_m$  – гурвицева матрица и вектор соответствующих размерностей.

Введем в рассматриваемую систему управления адаптивный регулятор заданной структуры

$$u(t) = r(t) + J(t), \quad J(t) = c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) + c_2(t) \cdot u(t-h), \quad (14)$$

где  $c_1^T$ ,  $c_2^T$  – параметры адаптивного регулятора, алгоритмы настройки которого подлежат определению.

*Постановка задачи.* Для объекта управления (1), функционирующего в условиях априорной неопределенности (4) совместно с фильтрами переменных состояния (5), эталонным упредителем (11) и адаптивным регулятором (14) требуется определить явный вид алгоритмов параметрической настройки коэффициентов  $c_1^T$  и  $c_2^T$  таким образом, чтобы при любых начальных условиях  $x(0)$  и произвольном наборе  $x \in \Xi$  обеспечивалось бы выполнение целевых условий вида:

$$\begin{aligned} & \text{а) при отсутствии возмущения } f(t) \equiv 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_m(t) - \bar{y}(t)| = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) = c_{10i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = c_{20}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $c_{10i}, c_{20} = const$ ;

$$\begin{aligned} & \text{б) при наличии возмущения со свойствами (2),} \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| \leq S_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_m(t) - \bar{y}(t)| \leq S_1, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) \leq c_{10i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) \leq c_{20}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $S_0, S_1 = const > 0$ .

В дальнейшем при решении задачи синтеза будем использовать вместо исходного описания системы (1) – (3), (5), (8) – (11), (14) ее эквивалентное представление в виде уравнений (7), (13), (14).

Кроме того, здесь уместно отметить тот факт, что математическая модель эталонного упредителя – это описание параллельного соединения эталонной модели и обычного упредителя

$$x_m(t) = x_{эм}(t) - x_k(t), \quad y_m(t) = y_{эм}(t) - y_k(t),$$

$$\frac{dx_{эм}(t)}{dt} = A_m \cdot x_{эм}(t) + B_m \cdot r(t), \quad \frac{dx_k(t)}{dt} = A_m \cdot x_k(t) + B_m [u(t) - u(t-h)],$$

где  $\bar{x}_{эм}(t)$  и  $\bar{y}_{эм}(t)$ ,  $\bar{x}_k(t)$  и  $\bar{y}_k(t)$  – переменные состояния и выходы соот-

ветственно эталонной модели и упредителя. Поэтому с позиции классических задач адаптивного управления, где цели управления обычно формулируются относительно асимптотических ошибок, – например, при отсутствии возмущения  $f(t) \equiv 0$  в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y_{эм}(t) - y_k(t) - y(t)| = 0,$$

в данной работе даже обеспечение выполнения этого предельного соотношения, означающего асимптотическую устойчивость системы управления по переменной  $(y_{эм}(t) - y_k(t) - y(t))$ , тем ни менее по переменной  $(y_{эм}(t) - y(t))$  будет гарантировать лишь диссипативность системы, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{эм}(t) - y(t)| \leq S_2, \quad S_2 = const > 0,$$

где, впрочем, на практике число  $S_2$  оказывается достаточно малым.

*Синтез системы управления.* Первоначально осуществим синтез системы управления при  $f(t) \equiv 0$ .

Пусть для объекта управления (7) и эталонного упредителя (13) выполняются условия структурного согласования

$$\bar{A}_m - \bar{A} = \bar{B}_m c_{10}^T \bar{L}^T, \quad \bar{B} = \bar{B}_m (1 - c_{20}), \quad (17)$$

где  $c_{10}^T$ ,  $c_{20}$  – некоторые постоянные, соответственно вектор и скаляр.

*1-й этап.* Получим эквивалентное математическое описание исследуемой системы (7), (13), (14) с использованием концепции расширения ошибки слежения.

Если ввести в рассмотрение сигнал рассогласования

$$e(t) = \bar{x}_m(t) - x(t), \quad (18)$$

то, вычитая из уравнения (7) уравнение (13) и учитывая (14), (17), можно получить эквивалентное математическое описание исследуемой системы

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot e(t) + \bar{B}_m \cdot m(t), \quad \bar{n}(t) = g^T \cdot \bar{L}^T \cdot e(t), \\ m(t) &= -\left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \bar{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot u(t-h) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\bar{n}(t) \in R$  – обобщенный выход.

Используя концепцию расширенной ошибки [10], введем в рассмотрение гурвицев полином  $D(p)$  степени  $l-1$ , тогда систему (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot e(t) + \bar{B}_m \cdot m_*(t), \quad \bar{n}_*(t) = \bar{n}(t) = D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot e(t), \\ m_*(t) &= -D(p)^{-1} \left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \bar{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot u(t-h) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Задавая новый, расширенный сигнал рассогласования

$$\tilde{e}(t) = e(t) + e_1(t), \quad (21)$$

где  $e_1(t)$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{de_1(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot e_1(t) + \bar{B}_m \cdot q(t), \quad \bar{n}(t) = D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot e_1(t), \\
q(t) &= D^{-1}(p) \cdot c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) - c_1^T(t) \cdot \dot{y}(t) + \\
&\quad + D^{-1}(p) \cdot c_2(t) \cdot u(t-h) - c_2(t) \cdot \dot{u}(t-h), \\
\dot{y}(t) &= D^{-1}(p) \cdot \bar{y}(t), \quad \dot{u}(t) = D^{-1}(p) \cdot u(t-h),
\end{aligned} \tag{22}$$

аналогично [10] математическое описание системы (20) можно преобразовать эквивалентно к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{e}(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot \tilde{e}(t) + \bar{B}_m \cdot \tilde{m}(t), \quad \tilde{v}(t) = D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot \tilde{e}(t), \\
\tilde{m}(t) &= -\left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \dot{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot \dot{u}(t-h) \right],
\end{aligned} \tag{23}$$

где первое уравнение описывает линейную стационарную часть (ЛСЧ), а второе – нелинейную нестационарную часть (ННЧ) расширенной системы;  $\tilde{v}(t) \in R$  – обобщенный выход.

*2-й этап.* Решим проблему вещественности и строгой положительности ЛСЧ системы (23).

Передаточная функция ЛСЧ эквивалентной системы (23) имеет вид

$$W_{лсч}(s) = \frac{D(s) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_m)^+ \cdot \bar{B}_m}{\det(s \cdot E - \bar{A}_m)}. \tag{24}$$

Очевидно, что из уравнений (9) – (13) можно получить следующие тождества:

$$\begin{aligned}
g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_m)^+ \cdot \bar{B}_m &= k_m \cdot b(s) \cdot g(s), \\
\det(s \cdot E - \bar{A}_m) &= \tilde{a}_m(s) \cdot b(s) \cdot c(s),
\end{aligned}$$

тогда при  $g(s) = c(s)$  передаточную функцию (24) можно записать в виде

$$W_{лсч}(s) = k_m \frac{D(s)}{\tilde{a}_m(s)}. \tag{25}$$

Чтобы передаточная функция (25), а вследствие этого и передаточная функция (24), были бы вещественными и строго положительно определенными, достаточно, чтобы полином  $D(s)$  удовлетворял тождеству

$$\tilde{a}_m(s) = D(s)(s + a_{0m}), \tag{26}$$

где  $a_{0m} = const > 0$ . Действительно, при выполнении условия (26) передаточная функция (25) получает вид

$$W_{лсч}(s) = k_m \frac{D(s)}{\tilde{a}_m(s)} = \frac{k_m}{s + a_{0m}}, \tag{27}$$

гарантирующий выполнение неравенства вида

$$\operatorname{Re} W_{лсч}(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \tag{28}$$

*3-й этап.* Обеспечим выполнение интегрального неравенства В.М. Попова, составленного относительно ННЧ эквивалентно преобразо-

ванной системы (23)

$$h(0, t) = -\int_0^t \tilde{m}(s) \cdot \tilde{n}(s) ds \geq -g_0^2 = const, \quad \forall t \geq 0. \quad (29)$$

Запишем левую часть (29), с учетом явного вида ННЧ, в виде

$$h(0, t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t (c_{1i}(V) - c_{10i}) \cdot \tilde{n}(V) \cdot y_i(V) dV + \\ + \int_0^t (c_2(V) - c_{20}) \cdot \tilde{n}(V) \cdot u(V-h) dV. \quad (30)$$

Синтезируя алгоритмы настройки коэффициентов адаптивного регулятора (14) следующим образом:

$$\frac{dc_{1i}(t)}{dt} = a_{1i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot y_i(t), \quad a_{1i} = const > 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dc_2(t)}{dt} = a_2 \cdot \tilde{n}(t) \cdot u(t-h), \quad a_2 = const > 0, \quad (31)$$

можно показать аналогично [7], что для  $h(0, t)$  вида (30) будет иметь место оценка

$$h(0, t) \geq -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{1i}^{-1} (c_{1i}(0) - c_{10i})^2 - \frac{1}{2} a_2^{-1} (c_2(0) - c_{20})^2, \quad (32)$$

а это обеспечивает выполнение условия (29).

*4-й этап.* Покажем достижимость целевых требований (15) в синтезированной системе управления (7), (13), (14), (31).

В силу показанной асимптотической гиперустойчивости системы (7), (13), (14), (31) можно говорить о справедливости следующих предельных соотношений:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) + e_1(t)) = 0, \quad (33)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) = c_{10i}, \quad (34)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = c_{20},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0, \quad (35)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \quad (36)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (37)$$

и адаптивности системы (7), (13), (14), (31) в заданном классе  $\Xi$ .

В случае наличия в системе (7), (13), (14), (31) возмущения вида (2) целевые условия (15) заменяются на условия вида (16). Тогда для сохранения работоспособности синтезированной системы (7), (13), (14), (31) аналогично [13] осуществим огрубление алгоритмов адаптации (31) путем введения в них зоны нечувствительности:



$$\frac{dc_{li}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{li} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{li} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (38)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (39)$$

где  $d = const > 0$  – величина зоны нечувствительности.

Для практической реализации синтезированной системы адаптивного управления полезно сделать ряд замечаний.

Во-первых, учитывая характер выбора полинома  $D(s)$ , заданного в выражении (26), обобщенный выход сигнала ошибки (23) можно записать в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \bar{v}(t) + \bar{v}(t), \quad \bar{v}(t) = y_m(t) - y(t), \\ \frac{d\bar{v}(t)}{dt} &= -a_{m0} \cdot \bar{v}(t) + k_m \cdot q(t). \end{aligned} \quad (40)$$

Во-вторых, в связи с тем, что в законах управления основного и дополнительного контуров системы адаптивного управления (7), (13), (14) отфильтрованного сигнала  $\bar{y}_m(t)$  в явном виде нет, практически, реализация фильтра на выходе эталонного упредителя не потребуется.

### **Адаптивная система управления для объекта с запаздыванием по состоянию и управлению**

*Математическая модель.* Модифицируем объект управления (1), введя в его описание запаздывание по состоянию

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + \Lambda \cdot x(t-t) + B \cdot u(t-h) + f(t), \quad y(t) = L^T \cdot x(t), \\ u(z) &= j(z), \quad z \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (41)$$

где  $t = const > 0$  – известное постоянное запаздывание;  $f(q) \in C_t$  – начальная функция;  $C_t$  – пространство ограниченных непрерывных функций;  $\Lambda$  – матрица соответствующей размерности.

Передаточная функция объекта (41) может быть записана в виде

$$W_{oy}(s) = L^T \left( s \cdot E - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s} \right)^{-1} B \cdot e^{-h \cdot s} = \frac{b(s)}{a(s)} e^{-h \cdot s}, \quad (42)$$

где  $b(s)$  – гурвицев полином с положительными коэффициентами порядка  $\deg a(s) = m$ ;  $a(s)$  – квазиполином с произвольным расположением корней порядка  $\deg a(s) = n$ .

Объект (41) функционирует в условиях априорной неопределенности

$$A = A(x), \quad \Lambda = \Lambda(x), \quad L = L(x), \quad f(t) = f_x(t), \quad (43)$$

$$x \in \Xi,$$

где  $x$  – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству  $\Xi$ .

В систему введем модифицированный явно-неявный эталонный упредитель (8) вида

$$\frac{d\tilde{x}_m(t)}{dt} = \tilde{A}_m \cdot \tilde{x}_m(t) + \tilde{\Lambda}_m \cdot \tilde{x}_m(t-t) + \tilde{B}_m \cdot y(t), \quad \tilde{y}_m(t) = \tilde{L}_m^T \cdot \tilde{x}_m(t), \quad (44)$$

$$y(t) = [u(t-h) - J(t)],$$

где  $\tilde{A}_m, \tilde{\Lambda}_m$  – постоянные матрицы, выбираемые так, что передаточная функция эталонного упредителя (44) получает вид:

$$W_m(s) = \frac{\tilde{y}_m(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{L}_m^T (s \cdot E - \tilde{A}_m - \tilde{\Lambda}_m \cdot e^{-t \cdot s})^+ \tilde{B}_m}{\det(s \cdot E - \tilde{A}_m - \tilde{\Lambda}_m \cdot e^{-t \cdot s})} = \frac{k_m}{\tilde{a}_m(s)}, \quad (45)$$

где  $k_m > 0$  – коэффициент усиления эталонного упредителя;  $\tilde{a}_m(s)$  – гурвицев квазиполином степени  $l$ , причем гурвивость квазиполинома  $\tilde{a}_m(s)$ , аналогично [1] обеспечивается за счет выполнения условий теоремы Животовского.

Если задать  $A_m, \Lambda_m$  и  $B_m$ , обеспечивая выполнение соотношения

$$W_m(s) = \frac{k_m}{\tilde{a}_m(s)} \cdot \frac{b(s)}{b(s)} = \frac{k_m}{\tilde{a}_m(s)} \cdot \frac{L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s})^+ B}{L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s})^+ B} =$$

$$= \frac{L^T (s \cdot E_n - A_m - \Lambda_m \cdot e^{-t \cdot s})^+ B_m}{\det(s \cdot E_n - A_m - \Lambda_m \cdot e^{-t \cdot s})},$$

где  $b(s) = L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s})^+ B$  – гурвицев полином степени  $m$ , то, следуя предыдущему, вместо описания (44), (45) можно записать уравнения вида

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A_m \cdot x_m(t) + \Lambda_m \cdot x_m(t-t) + B_m [u(t-h) - J(t)], \quad (46)$$

$$y_m(t) = L^T \cdot x_m(t).$$

Как и ранее, к выходу объекта управления (41) и эталонного упредителя (46) подключаются фильтры переменных состояний (5). В расширенном пространстве состояний уравнения этих соединений могут быть записаны в виде

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{\Lambda} \cdot \bar{x}(t-t) + \bar{B} \cdot u(t-h) + \bar{f}(t), \quad \bar{y}(t) = \bar{L}^T \cdot \bar{x}(t), \quad (47)$$

$$n(t) = g^T \cdot \bar{y}(t),$$

$$\frac{d\bar{x}_m(t)}{dt} = \bar{A}_m \cdot \bar{x}_m(t) + \bar{\Lambda}_m \cdot x_m(t-t) + \bar{B}_m [u(t-h) - J(t)], \quad (48)$$

$$\bar{y}_m(t) = \bar{L}^T \cdot \bar{x}_m(t), \quad n_m(t) = g^T \cdot \bar{y}_m(t),$$

где  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Lambda}_m$ , –соответствующие матрицы.

Введем в систему управления адаптивный регулятор заданной структуры

$$u(t) = r(t) + J(t), \quad (49)$$

$$J(t) = c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) + c_2(t) \cdot u(t-h) + c_3^T(t) \cdot \bar{y}(t-t),$$

где  $c_1^T(t)$ ,  $c_2(t)$ ,  $c_3^T(t)$  – параметры адаптивного регулятора, алгоритмы настройки которого подлежат определению.

*Постановка задачи.* Для объекта управления (41), (42), (2), функционирующего в условиях априорной неопределенности (43), совместно с фильтрами переменных состояния (5), эталонным упредителем (44) – (46) и адаптивным регулятором (49), требуется определить явный вид алгоритмов параметрической настройки коэффициентов  $c_1^T(t)$ ,  $c_2(t)$ ,  $c_3^T(t)$  таким образом, чтобы при любых начальных условиях  $x(0)$  и произвольном наборе  $x \in \Xi$ , обеспечивалось бы выполнение целевых условий вида

а) при возмущении  $f(t) \equiv 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_m(t) - \bar{y}(t)| = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) = c_{10i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = c_{20}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_{3i}(t) = c_{30i},$$

где  $i = \overline{1, n}$ ;  $c_{10i}, c_{20}, c_{30i} = const$ ;

б) при возмущении со свойствами (2):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| \leq S_3, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_m(t) - \bar{y}(t)| \leq S_4, \quad (51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) \leq c_{10i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) \leq c_{20}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_{3i}(t) \leq c_{30i} = const,$$

где  $S_3, S_4 = const > 0$ .

В дальнейшем при решении задачи синтеза будем использовать вместо исходного описания системы (41), (42) (5), (44) – (46), (49) ее эквивалентное представление в виде (47), (48), (49).

*Синтез системы управления.* Рассмотрим случай  $f(t) \equiv 0$ .

Пусть для объекта управления (47) и эталонного упредителя (48) выполняются условия структурного согласования вида

$$\bar{A}_m - \bar{A} = \bar{B}_m c_{10}^T \bar{L}^T, \quad \bar{B} = \bar{B}_m (1 - c_{20}), \quad (52)$$

$$\bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda} = \bar{B}_m c_{30}^T \bar{L}^T, \quad (53)$$

где  $c_{10}^T$ ,  $c_{20}$  и  $c_{30}$  – некоторые постоянные, соответственно вектор, скаляр и вектор.

1-й этап. Получим эквивалентное математическое описание исследуемой системы (47) – (49).

Аналогично как и выше, для системы (47) – (49), (18), (52), (53) можно получить эквивалентное математическое описание вида

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}_M \cdot e(t) + \bar{\Lambda}_M \cdot e(t-t) + \bar{B}_M \cdot m(t), \quad \bar{n}(t) = g^T \cdot \bar{L}^T \cdot e(t), \\ m(t) &= -\left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \bar{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot u(t-h) + \right. \\ &\quad \left. + (c_3(t) - c_{30})^T \cdot \bar{y}(t-t) \right], \end{aligned} \quad (54)$$

из которого, вводя в рассмотрение гурвицев полином  $D(p)$  и сигнал рас- согласования (21), где  $e_1(t)$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{de_1(t)}{dt} &= \bar{A}_M \cdot e_1(t) + \bar{\Lambda}_M \cdot e_1(t-t) + \bar{B}_M \cdot q(t), \\ \bar{n}(t) &= D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot e_1(t), \\ q(t) &= D^{-1}(p) \cdot c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) - c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) + D^{-1}(p) \cdot c_2(t) \cdot u(t-h) - \\ &\quad c_2(t) \cdot u(t-h) + D^{-1}(p) \cdot c_3^T(t) \cdot \bar{y}(t-t) - c_3^T(t) \cdot \bar{y}(t-t), \\ \bar{y}(t) &= D^{-1}(p) \cdot \bar{y}(t), \quad \bar{u}(t) = D^{-1}(p) \cdot u(t-h), \\ \bar{y}(t-t) &= D^{-1}(p) \cdot \bar{y}(t-t), \end{aligned} \quad (55)$$

можно получить эквивалентное расширенное математическое описание системы (54) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{e}(t)}{dt} &= \bar{A}_M \cdot \tilde{e}(t) + \bar{\Lambda}_M \cdot \tilde{e}(t-t) + \bar{B}_M \cdot \tilde{m}(t), \\ \tilde{v}(t) &= D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot \tilde{e}(t), \\ \tilde{m}(t) &= -\left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \bar{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot \bar{u}(t-h) + \right. \\ &\quad \left. + (c_3(t) - c_{30})^T \cdot \bar{y}(t-t) \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

2-й этап. Решим проблему вещественности и строгой положительности ЛСЧ системы (56).

Передаточная функция ЛСЧ системы (56) имеет вид

$$W_{лсч}(s) = \frac{D(s) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s})^+ \cdot \bar{B}_M}{\det(s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s})}. \quad (57)$$

Очевидно, что из уравнений (45), (46), (48) можно получить следующие тождества:

$$\begin{aligned} g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s})^+ \cdot \bar{B}_M &= k_M \cdot b(s) \cdot g(s), \\ \det(s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s}) &= \tilde{a}_M(s) \cdot b(s) \cdot c(s), \end{aligned}$$

тогда при  $g(s) = c(s)$  передаточную функцию (57) можно записать в виде

$$W_{лсч}(s) = k_M \frac{D(s)}{\tilde{a}_M(s)}. \quad (58)$$

Таким образом, для передаточной функции (58) необходимо обеспечить выполнение условия (28) путем выбора параметров  $\tilde{a}_M(s)$  и  $D(s)$ .

Хорошо известно, что если  $W_{лсч}(s)$  является строго положительно вещественной функцией, то и  $(W_{лсч}(s))^{-1}$  также строго положительно вещественная функция, т.е. в данном случае для выполнения условий (28), сформулированных относительно передаточной функции (58), достаточно обеспечить выполнение

$$\operatorname{Re} W_{лсч}(j\omega)^{-1} > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \quad (59)$$

Заметим, что теперь в условии (59) квазиполином  $\tilde{a}_M(s)$  будет находиться в числителе передаточной функции  $W_{лсч}(s)^{-1}$ , что значительно упрощает процедуру выбора  $\tilde{a}_M(s)$  и  $D(s)$  (см. приложение 1).

*3-й этап.* Обеспечим выполнение интегрального неравенства (29), составленного относительно эквивалентно преобразованной системы (56). Как и выше, можно показать, что, синтезируя алгоритмы самонастройки в виде

$$\begin{aligned} \frac{dc_{1i}(t)}{dt} &= a_{1i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot y_i(t), \quad a_{1i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dc_2(t)}{dt} &= a_2 \cdot \tilde{n}(t) \cdot u(t-h), \quad a_2 = \text{const} > 0, \\ \frac{dc_{3i}(t)}{dt} &= a_{3i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot y_i(t-t), \quad a_{3i} = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (60)$$

можно обеспечить выполнение неравенства (29).

*4-й этап.* Покажем достижимость целевых требований (50) в синтезированной системе управления (47) – (49), (60).

Процедура доказательства достижимости целевых условий (50), а также и условий (51) аналогична проведенной ранее и здесь не приводится. Однако заметим, что при возмущениях вида (2) алгоритмы (60) регуляризируются следующим образом:

$$\frac{dc_{1i}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{1i} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{1i} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (61)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (62)$$

$$\frac{dc_{3i}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{3i} \cdot y_i(t-t) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{3i} \cdot y_i(t-t) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (63)$$

где  $d = const > 0$  – величина зоны нечувствительности.

Структура полученной адаптивной системы управления может быть упрощена. Для этого достаточно задать  $\tilde{\Lambda}_m = 0$ . Тогда при соответствующей модификации эталонного упредителя (44) – (46) условий структурного согласования (53) можно синтезировать систему адаптивного управления объектом (41) – (43), (2) с регулятором вида (49) и алгоритмами самонастройки (61) – (63).

### **Адаптивная система управления для объекта с запаздыванием нейтрального типа и запаздываниями по состоянию и управлению**

*Математическая модель.* Рассмотрим объект управления (41), дополнив его описание запаздыванием нейтрального типа

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A \cdot x(t) + \Lambda \cdot x(t-t) + \Gamma \frac{dx(t-t_*)}{dt} + B \cdot u(t-h) + f(t), \\ y(t) &= L^T x(t), \\ \frac{dx(r)}{dr} &= \frac{dy(r)}{dr}, \quad r \in [-t_*, 0], \end{aligned} \quad (64)$$

где  $t_* = const > 0$  – известное постоянное запаздывание;  $y(r) \in C_{t_*}$ , – начальная функция;  $C_{t_*}$  – пространство ограниченных непрерывных функций;  $\Gamma$  – матрица соответствующей размерности.

Передаточная функция объекта (64) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} W_{oy}(s) &= L^T \left( s \cdot E - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma \cdot e^{-t_* \cdot s} \right)^{-1} B \cdot e^{-h \cdot s} = \\ &= \frac{b(s)}{a(s)} e^{-h \cdot s}, \end{aligned} \quad (65)$$

где  $b(s)$  – гурвицев полином с положительными коэффициентами порядка  $\deg b(s) = m$ ;  $a(s)$  – квазиполином с произвольным расположением корней порядка  $\deg a(s) = n$ .

Объект (64) функционирует в условиях априорной неопределенности  $A = A(x)$ ,  $\Lambda = \Lambda(x)$ ,  $\Gamma = \Gamma(x)$ ,  $L = L(x)$ , (66)

где  $x$  – набор неизвестных параметров, принадлежащих известному множеству  $\Xi$ .

В систему введем модифицированный явно-неявный эталонный упредитель (44) вида

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_M(t)}{dt} &= \tilde{A}_M \cdot \tilde{x}_M(t) + \tilde{\Lambda}_M \cdot \tilde{x}_M(t-t) + \tilde{\Gamma}_M \frac{d\tilde{x}_M(t-t_*)}{dt} + \tilde{B}_M \cdot y(t), \\ \tilde{y}_M(t) &= \tilde{L}_M^T \cdot \tilde{x}_M(t), \quad y(t) = [u(t-h) - J(t)],\end{aligned}\quad (67)$$

где  $\tilde{A}_M$ ,  $\tilde{\Lambda}_M$ ,  $\tilde{\Gamma}_M$  – постоянные матрицы соответствующего порядка, выбирающиеся таким образом, чтобы передаточная функция эталонного упреждителя (69) имела вид

$$\begin{aligned}W_M(s) &= \frac{\tilde{y}_M(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{L}_M^T (s \cdot E - \tilde{A}_M - \tilde{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \tilde{\Gamma}_M \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ \tilde{B}_M}{\det(s \cdot E - \tilde{A}_M - \tilde{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \tilde{\Gamma}_M \cdot e^{-t_* \cdot s})} = \\ &= \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)},\end{aligned}\quad (68)$$

где  $\tilde{a}_M(s)$  – гурвицев квазиполином степени  $l$ ;  $k_M > 0$  – коэффициент усиления эталонного упреждителя.

Как и ранее, заметим, что в эталонном упреждителе вида (67) для выполнения требований (68) должны быть наложены дополнительные условия, касающиеся явного вида матриц  $\tilde{A}_M$ ,  $\tilde{\Lambda}_M$  и  $\tilde{\Gamma}_M$  [1].

Если задать матрицы  $A_M$ ,  $\Lambda_M$ ,  $\Gamma_M$  и вектор  $B_M$ , исходя из выполнения

$$\begin{aligned}W_M(s) &= \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)} \cdot \frac{b(s)}{b(s)} = \frac{k_M}{\tilde{a}_M(s)} \cdot \frac{L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ B}{L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ B} = \\ &= \frac{L^T (s \cdot E_n - A_M - \Lambda_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma_M \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ B_M}{\det(s \cdot E_n - A_M - \Lambda_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma_M \cdot e^{-t_* \cdot s})},\end{aligned}$$

где  $b(s) = L^T (s \cdot E_n - A - \Lambda \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \Gamma \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ B$  – гурвицев полином степени  $m$ , то, как и выше, от описания (67)-(68) можно перейти к описанию вида

$$\begin{aligned}\frac{dx_M(t)}{dt} &= A_M \cdot x_M(t) + \Lambda_M \cdot x_M(t-t) + \Gamma_M \frac{dx_M(t-t_*)}{dt} + \\ &+ B_M [u(t-h) - J(t)], \quad y_M(t) = L^T \cdot x_M(t).\end{aligned}\quad (69)$$

Как и ранее, к выходу объекта управления (64) и эталонного упреждителя (69) подключаются фильтры переменных состояний (5). В расширенном пространстве состояний уравнения этих соединений могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{\Lambda} \cdot \bar{x}(t-t) + \bar{\Gamma} \frac{d\bar{x}(t-t_*)}{dt} + \bar{B} \cdot u(t-h) + \bar{f}(t), \\ \bar{y}(t) &= \bar{L}^T \cdot \bar{x}(t), \quad n(t) = g^T \cdot \bar{y}(t),\end{aligned}\quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_M(t)}{dt} = & \bar{A}_M \cdot \bar{x}_M(t) + \bar{\Lambda}_M \cdot x_M(t-t) + \bar{\Gamma}_M \frac{d\bar{x}_M(t-t_*)}{dt} \\ & + \bar{B}_M [u(t-h) - J(t)], \end{aligned} \quad (71)$$

$$\bar{y}_M(t) = \bar{L}^T \cdot \bar{x}_M(t), \quad \mathbf{n}_M(t) = g^T \cdot \bar{y}_M(t),$$

где  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{\Gamma}_M$ , – матрицы соответствующей размерности.

В систему введем адаптивный регулятор заданной структуры  $u(t) = r(t) + J(t)$ ,

$$\begin{aligned} J(t) = & c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) + c_2(t) \cdot u(t-h) + c_3^T(t) \cdot \bar{y}(t-t) + \\ & + c_4^T(t) \frac{d\bar{y}(t-t_*)}{dt}, \end{aligned} \quad (72)$$

где  $c_1^T(t)$ ,  $c_2(t)$ ,  $c_3^T(t)$ ,  $c_4^T(t)$  – параметры адаптивного регулятора, алгоритмы настройки которого подлежат определению.

*Постановка задачи.* Для объекта управления (64), (65), (2), функционирующего в условиях априорной неопределенности (66), совместно с фильтрами переменных состояния (5), эталонным упредителем (67)-(69) и адаптивным регулятором (72), требуется определить явный вид алгоритмов параметрической настройки коэффициентов  $c_1^T(t)$ ,  $c_2(t)$ ,  $c_3^T(t)$ ,  $c_4^T(t)$  таким образом, чтобы при любых начальных условиях  $x(0)$  и любом наборе  $x \in \Xi$  обеспечивалось бы выполнение целевых условий вида

а) при возмущении  $f(t) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_M(t) - \bar{y}(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) = c_{10i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = c_{20}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} c_{3i}(t) = c_{30i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_{4i}(t) = c_{40i}, \end{aligned} \quad (73)$$

где  $i = \overline{1, n}$ ;  $c_{10i}, c_{20}, c_{30i}, c_{40i} = const$ ;

б) при возмущении со свойствами (2):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |y_M(t) - y(t)| \leq S_5, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_M(t) - \bar{y}(t)| \leq S_6, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} c_{1i}(t) \leq c_{10i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) \leq c_{20}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} c_{3i}(t) \leq c_{30i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_{4i}(t) \leq c_{40i} = const, \end{aligned} \quad (74)$$

где  $S_5, S_6 = const > 0$ .

В дальнейшем при решении задачи синтеза будем использовать вместо исходного описания системы (64)-(65), (5), (67)-(69), (72) ее эквивалентное представление в виде (70)-(72).

*Синтез системы управления.* Рассмотрим случай  $f(t) \equiv 0$ .



Предположим, что для объекта управления (70) и эталонного упреждителя (71) выполняются условия структурного согласования

$$\begin{aligned}
\bar{A}_m - \bar{A} &= \bar{B}_m c_{10}^T \bar{L}^T, \\
\bar{B} &= \bar{B}_m (1 - c_{20}), \\
\bar{\Lambda}_m - \bar{\Lambda} &= \bar{B}_m c_{30}^T \bar{L}^T, \\
\bar{\Gamma}_m - \bar{\Gamma} &= \bar{B}_m c_{40}^T \bar{L}^T,
\end{aligned} \tag{75}$$

где  $c_{10}^T$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{30}^T$ ,  $c_{40}^T$  – некоторые постоянные, соответственно вектор, скаляр, вектор и вектор.

*1-й этап.* Получим эквивалентное математическое описание исследуемой системы (72) – (74).

Как и выше, для системы (70) – (72) можно получить эквивалентное математическое описание вида

$$\begin{aligned}
\frac{de(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot e(t) + \bar{\Lambda}_m \cdot e(t-t) + \bar{\Gamma}_m \frac{de(t-t_*)}{dt} + \bar{B}_m \cdot m(t), \\
\bar{n}(t) &= g^T \cdot \bar{L}^T e(t), \\
m(t) &= - \left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot \bar{y}(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot u(t-h) + \right. \\
&\quad \left. + (c_3(t) - c_{30})^T \cdot \bar{y}(t-t) + (c_4(t) - c_{40})^T \cdot \frac{d\bar{y}(t-t_*)}{dt} \right],
\end{aligned} \tag{76}$$

из которого, вводя в рассмотрение гурвицев полином  $D(p)$  и сигнал рас-согласования вида (21), где  $e_1(t)$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{de_1(t)}{dt} &= \bar{A}_m \cdot e_1(t) + \bar{\Lambda}_m \cdot e_1(t-t) + \bar{\Gamma}_m \frac{de_1(t-t_*)}{dt} + \bar{B}_m \cdot q(t), \\
\bar{n}(t) &= D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T e_1(t), \\
q(t) &= D^{-1}(p) \cdot c_1^T(t) \cdot \bar{y}(t) - c_1^T(t) \cdot \dot{\bar{y}}(t) + \\
&\quad + D^{-1}(p) \cdot c_2(t) \cdot u(t-h) - c_2(t) \cdot \dot{u}(t-h) - \\
&\quad + D^{-1}(p) \cdot c_3^T(t) \cdot \bar{y}(t-t) - c_3^T(t) \cdot \dot{\bar{y}}(t-t) - \\
&\quad + D^{-1}(p) \cdot c_4^T(t) \cdot \frac{d\bar{y}(t-t_*)}{dt} - c_4^T(t) \cdot \frac{d\dot{\bar{y}}(t-t_*)}{dt}, \\
\dot{\bar{y}}(t) &= D^{-1}(p) \cdot \bar{y}(t), \quad \dot{u}(t) = D^{-1}(p) \cdot u(t-h), \\
\dot{\bar{y}}(t-t) &= D^{-1}(p) \cdot \bar{y}(t-t), \quad \frac{d\dot{\bar{y}}(t-t_*)}{dt} = D^{-1}(p) \cdot \frac{d\bar{y}(t-t_*)}{dt},
\end{aligned} \tag{77}$$

можно получить эквивалентное расширенное математическое описание системы (76) в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{e}(t)}{dt} &= \bar{A}_M \cdot \tilde{e}(t) + \bar{\Lambda}_M \cdot \tilde{e}(t-t) + \bar{\Gamma}_M \frac{de(t-t_*)}{dt} + \bar{B}_M \cdot \tilde{m}(t), \\
\tilde{v}(t) &= D(p) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot \tilde{e}(t), \\
m(t) &= -\left[ (c_1(t) - c_{10})^T \cdot y(t) + (c_2(t) - c_{20}) \cdot u(t-h) + \right. \\
&\quad \left. + (c_3(t) - c_{30})^T \cdot y(t-t) + (c_4(t) - c_{40})^T \cdot \frac{dy(t-t_*)}{dt} \right].
\end{aligned} \tag{78}$$

2-й этап. Решим проблему вещественности и строгой положительности ЛСЧ системы (78).

Передаточная функция ЛСЧ системы (78) имеет вид

$$W_{лсч}(s) = \frac{D(s) \cdot g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \bar{\Gamma} \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ \cdot \bar{B}_M}{\det(s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \bar{\Gamma} \cdot e^{-t_* \cdot s})}. \tag{79}$$

Очевидно, что из уравнений (68)-(69), (71) можно получить следующие тождества:

$$\begin{aligned}
g^T \cdot \bar{L}^T \cdot (s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \bar{\Gamma} \cdot e^{-t_* \cdot s})^+ \cdot \bar{B}_M &= k_M \cdot b(s) \cdot g(s), \\
\det(s \cdot E - \bar{A}_M - \bar{\Lambda}_M \cdot e^{-t \cdot s} - s \cdot \bar{\Gamma} \cdot e^{-t_* \cdot s}) &= \tilde{a}_M(s) \cdot b(s) \cdot c(s),
\end{aligned}$$

тогда при  $g(s) = c(s)$  передаточную функцию (79) можно записать в виде

$$W_{лсч}(s) = k_M \frac{D(s)}{\tilde{a}_M(s)}. \tag{80}$$

Таким образом, для передаточной функции (80) необходимо обеспечить выполнение условия (28) путем выбора  $\tilde{a}_M(s)$  и  $D(s)$ .

Как и выше, для выполнения условия (28) достаточно обеспечить для передаточной функции (80) выполнение неравенства вида

$$\operatorname{Re} W_{лсч}(j\omega)^{-1} > 0, \quad \forall \omega \geq 0. \tag{81}$$

Условия выбора  $\tilde{a}_M(s)$  и  $D(s)$  приведены в приложении 2.

3-й этап. Обеспечим выполнение интегрального неравенства (29), составленного относительно эквивалентно преобразованной системы (78). Как и выше, можно показать, что, синтезируя алгоритмы самонастройки в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dc_{1i}(t)}{dt} &= a_{1i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot y_i(t), \quad a_{1i} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \\
\frac{dc_2(t)}{dt} &= a_2 \cdot \tilde{n}(t) \cdot u(t-h), \quad a_2 = \text{const} > 0, \\
\frac{dc_{3i}(t)}{dt} &= a_{3i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot y_i(t-t), \quad a_{3i} = \text{const} > 0, \\
\frac{dc_{4i}(t)}{dt} &= a_{4i} \cdot \tilde{n}(t) \cdot \frac{dy(t-t_*)}{dt}, \quad a_{4i} = \text{const} > 0,
\end{aligned} \tag{82}$$

можно обеспечить выполнение неравенства (29).

*4-й этап.* Покажем достижимость целевых требований (73) в синтезированной системе управления (70)-(72), (82).

Процедура доказательства достижимости целевых условий (73), а также и целей (74) аналогична проведенной ранее и здесь не приводится. Здесь же заметим, что в случае наличия возмущения вида (2) алгоритмы (82) заменяются на регуляризованные вида

$$\frac{dc_{1i}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{1i} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{1i} \cdot y_i(t) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (83)$$

$$\frac{dc_2(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_2 \cdot u(t-h) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (84)$$

$$\frac{dc_{3i}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{3i} \cdot y_i(t-t) \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{3i} \cdot y_i(t-t) \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (85)$$

$$\frac{dc_{4i}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \forall t \geq 0, |\tilde{n}(t)| \leq d, \\ a_{4i} \cdot \frac{dy(t-t_*)}{dt} \cdot (\tilde{n}(t) + d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) < -d, \\ a_{4i} \cdot \frac{dy(t-t_*)}{dt} \cdot (\tilde{n}(t) - d), & \forall t \geq 0, \tilde{n}(t) > d, \end{cases} \quad (85)$$

где  $d = const > 0$  – величина зоны нечувствительности.

Структура полученной адаптивной системы управления может быть упрощена. Для этого достаточно задать  $\tilde{\Gamma}_m = 0$ . Тогда, при соответствующей модификации эталонного упредителя (67) – (69), условий структурного согласования (75), можно синтезировать систему адаптивного управления объектом (64)-(66), (2) с регулятором вида (72) и алгоритмами самонастройки (83)-(85). Если же предположить, что матрица  $\Gamma$  априорно неопределенна, но ее собственные числа лежат в круге единичного радиуса, то для управления объектом (64)-(66), (2) можно использовать адаптивный регулятор вида (49), с алгоритмами самонастройки (61) – (63), при структуре эталонного упредителя вида (44) – (46).

### Иллюстративный пример

Рассмотрим пример имитационного моделирования адаптивной системы управления объектом (64) – (65), функционирующим в условиях априорной неопределенности вида (66). Значения параметров объекта управ-

ления зададим произвольным образом, например:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -8.1 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0.4 & -0.27 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, \quad L^T = (0.5 \quad 1.9 \quad 1 \quad 0), \quad \begin{cases} h = 0.3, \\ t = 1.4, \\ t_* = 0.65. \end{cases}$$

Задающее воздействие примем равным  $r(t) = 1\sin(0.05t)$ .

Возмущение (2) зададим в виде  $f_4(t) = 1.2\sin(0.05t)$ .

Эталонный упредитель (67) зададим в виде

$$\tilde{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_m^T = (4 \quad 0),$$

$$\tilde{\Lambda}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.4 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Фильтр переменных состояния (5) будет иметь вид

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_\phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad D_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Параметры линейного компенсатора, входящего в состав фильтра (5), будут заданы в виде  $g^T = (1 \quad 3 \quad 3 \quad 1)$ .

Схему расширения сформируем следующим образом:  $D(s) = (s + 2)$ .

Параметры настройки адаптивного зададим следующими:  $\chi_{11} = 100$ ,  $\chi_{12} = 50$ ,  $\chi_{13} = 40$ ,  $\chi_{14} = 20$ ,  $\chi_2 = 30$ ,  $\chi_{31} = 0.01$ ,  $\chi_{32} = 0.09$ ,  $\chi_{33} = 0.07$ ,  $\chi_{34} = 0.08$ ,  $\chi_{41} = 12$ ,  $\chi_{42} = 15$ ,  $\chi_{43} = 11$ ,  $\chi_{44} = 9.5$ .

Зону нечувствительности алгоритмов параметрической самонастройки примем равной  $d = 0.002$ .

Для удобства и наглядности оценки качества функционирования адаптивной системы с эталонным упредителем по результатам имитационного моделирования на рис. 1 отражено поведение выходов как объекта управления  $y(t)$ , так и эталонной модели  $y_m(t)$ , а ошибка между ними  $e(t)$  – на рис. 2.

Исходя из представленных рисунков, можно сделать вывод о достаточно хорошем качестве работы синтезированной системы.

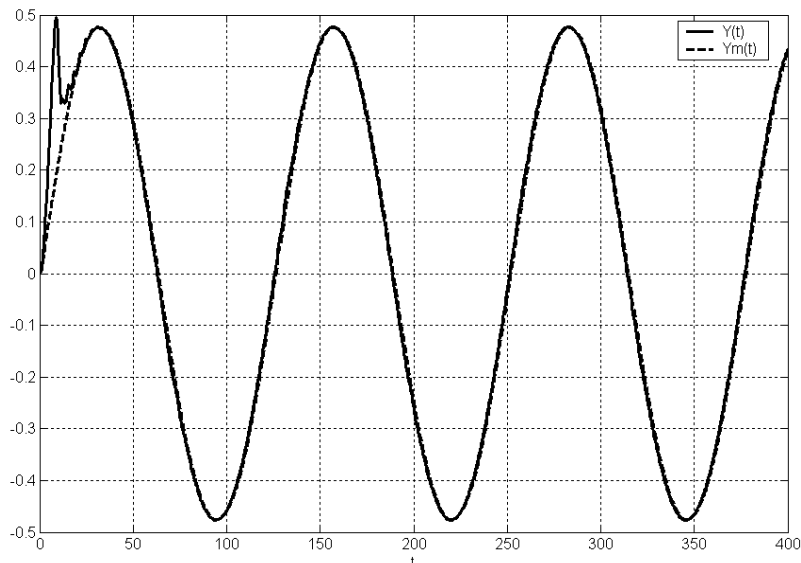


Рис. 1. Динамика выхода системы и эталона.

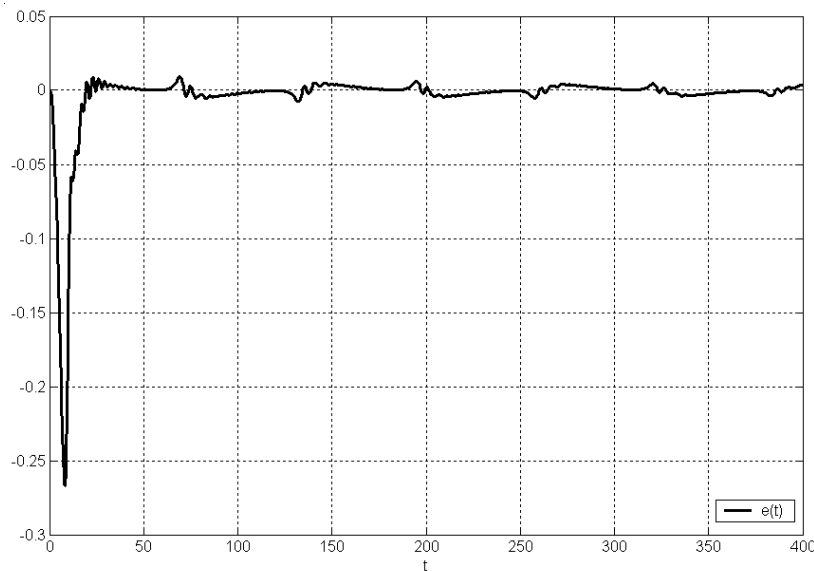


Рис. 2. Ошибка системы  $e(t)$ .

### Заключение

В предлагаемой работе были синтезированы три системы прямого адаптивного управления неустойчивыми, априорно неопределенными объектами с запаздыванием нейтрального типа и запаздываниями по состоянию и по управлению.

Использование явно-неявного эталонного упредителя позволило в каждом из рассматриваемых случаев синтезировать устойчивую  $D$ -адаптивную систему управления с эталонным упредителем, имеющим минимальную структурную сложность.

Если параметры эталонного упрединителя (44), (45) задать в виде

$$\tilde{A}_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\tilde{a}_{M0} & -\tilde{a}_{M1} & \dots & -\tilde{a}_{M(l-1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Lambda}_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{r}_{M0} & -\tilde{r}_{M1} & \dots & -\tilde{r}_{M(l-1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_M^T = (k_M \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

то для передаточной функции (58) можно записать ее явный вид

$$W(s) = k_M \frac{D(s)}{\tilde{a}_M(s)} = k_M \frac{D(s)}{b(s) + g(s) \cdot e^{-t \cdot s}},$$

$$b(s) = s^l + \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{a}_{M(k)}, \quad g(s) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{r}_{M(k)},$$

исходя из которого вполне очевидно, что

$$W(s)^{-1} = \frac{\tilde{a}_M(s)}{k_M \cdot D(s)} = \frac{b(s)}{k_M \cdot D(s)} + \frac{g(s)}{k_M \cdot D(s)} \cdot e^{-t \cdot s}.$$

Вводя обозначения

$$\frac{b(jw)}{D(jw)} = \frac{U_b(w) + j \cdot V_b(w)}{F(w) + j \cdot S(w)}, \quad \frac{g(jw)}{D(jw)} = \frac{U_g(w) + j \cdot V_g(w)}{F(w) + j \cdot S(w)}$$

и используя известное соотношение

$$e^{-t \cdot jw} = \cos(t \cdot w) - j \cdot \sin(t \cdot w),$$

для  $\text{Re}(W(jw)^{-1})$ , можно записать следующее тождество

$$\text{Re}(W(jw)^{-1}) = \frac{1}{k_M} \left( \frac{\Phi_1(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} + \frac{k_M \cdot \Phi_2(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \cos(t \cdot w) + \frac{k_M \cdot \Phi_3(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \sin(t \cdot w) \right),$$

где

$$\Phi_1(w) = U_b(w) \cdot F(w) + V_b(w) \cdot S(w),$$

$$\Phi_2(w) = U_g(w) \cdot F(w) + V_g(w) \cdot S(w),$$

$$\Phi_3(w) = V_g(w) \cdot F(w) - U_g(w) \cdot S(w).$$

Учитывая что

$$\Phi_2(w) \cdot \cos(t \cdot w) + \Phi_3(w) \cdot \sin(t \cdot w) \leq |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)|,$$

$$F(w)^2 + S(w)^2 > 0, \quad k_m > 0.$$

Окончательно можно получить следующее достаточное условие положительности передаточной функции (58):

$$\Phi_1(w) > |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)|.$$

*Частный случай.* Пусть параметры  $b(s)$  заранее известны (т. е. заданы значения матрицы  $\tilde{A}_m$ ). Тогда для выполнения условия (59) достаточно, задавая полином  $D(s)$ , исходя из тождества

$$b(s) = D(s)(s + a_{0m}),$$

где  $a_{0m} = \text{const} > 0$  при любых значениях запаздывания  $t$ , ограничить параметры  $g(s)$  (т. е. наложить требования на значения матрицы  $\tilde{\Lambda}_m$ ), исходя из выполнения неравенства

$$a_{0m} > |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)|.$$

## Приложение 2

Если параметры эталонного упрединателя (67), (68) задать в виде

$$\tilde{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\tilde{a}_{m0} & -\tilde{a}_{m1} & \dots & -\tilde{a}_{m(l-1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_m^T = (k_m \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

$$\tilde{\Lambda}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{r}_{m0} & -\tilde{r}_{m1} & \dots & -\tilde{r}_{m(l-1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\tilde{p}_{m(l)} \end{pmatrix},$$

то для передаточной функции (79) можно записать ее явный вид

$$W(s) = k_m \frac{D(s)}{\tilde{a}_m(s)} = k_m \frac{D(s)}{b(s) + g(s) \cdot e^{-t \cdot s} + a(s) \cdot e^{-t_* \cdot s}},$$

$$b(s) = s^l + \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{a}_{m(k)}, \quad g(s) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{r}_{m(k)}, \quad a(s) = s^l,$$

исходя из которого вполне очевидно, что

$$W(s)^{-1} = \frac{\tilde{a}_m(s)}{k_m \cdot D(s)} = \frac{1}{k_m} \left( \frac{b(s)}{D(s)} + \frac{g(s)}{D(s)} \cdot e^{-t \cdot s} + \frac{a(s)}{D(s)} \cdot e^{-t_* \cdot s} \right).$$

Вводя обозначения

$$\frac{b(jw)}{D(jw)} = \frac{U_b(w) + j \cdot V_b(w)}{F(w) + j \cdot S(w)}, \quad \frac{g(jw)}{D(jw)} = \frac{U_g(w) + j \cdot V_g(w)}{F(w) + j \cdot S(w)},$$

$$\frac{a(jw)}{D(jw)} = \frac{U_a(w) + j \cdot V_a(w)}{F(w) + j \cdot S(w)};$$

используя известное соотношение

$$e^{-t \cdot jw} = \cos(t \cdot w) - j \cdot \sin(t \cdot w), \quad e^{-t_* \cdot jw} = \cos(t_* \cdot w) - j \cdot \sin(t_* \cdot w),$$

для  $\operatorname{Re}(W(jw)^{-1})$  можно записать следующее тождество

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(W(jw)^{-1}) = & \frac{1}{k_m} \left( \frac{\Phi_1(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} + \frac{\Phi_2(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \cos(t \cdot w) + \right. \\ & + \frac{\Phi_3(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \sin(t \cdot w) + \frac{\Phi_4(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \cos(t_* \cdot w) + \\ & \left. + \frac{\Phi_5(w)}{F(w)^2 + S(w)^2} \cos(t_* \cdot w) \right) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(w) = U_b(w) \cdot F(w) + V_b(w) \cdot S(w),$$

$$\Phi_2(w) = U_g(w) \cdot F(w) + V_g(w) \cdot S(w),$$

$$\Phi_3(w) = V_g(w) \cdot F(w) - U_g(w) \cdot S(w).$$

$$\Phi_4(w) = U_a(w) \cdot F(w) + V_a(w) \cdot S(w),$$

$$\Phi_5(w) = V_a(w) \cdot F(w) - U_a(w) \cdot S(w).$$

Учитывая что

$$\Phi_2(w) \cdot \cos(t \cdot w) + \Phi_3(w) \cdot \sin(t \cdot w) + \Phi_4(w) \cdot \cos(t_* \cdot w) +$$

$$+ \Phi_5(w) \cdot \sin(t_* \cdot w) \leq |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)| + |\Phi_4(w)| + |\Phi_5(w)|,$$

$$F(w)^2 + S(w)^2 > 0, \quad k_m > 0.$$

Окончательно можно получить следующее достаточное условие положительности передаточной функции (58):

$$\Phi_1(w) > |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)| + |\Phi_4(w)| + |\Phi_5(w)|.$$

*Частный случай.* Пусть параметры  $b(s)$  заранее известны (т.е. заданы значения матрицы  $\tilde{A}_m$ ). Тогда для выполнения условия (83) достаточно, задавая полином  $D(s)$ , исходя из тождества

$$b(s) = D(s)(s + a_{0,m}),$$

где  $a_{0,m} = \text{const} > 0$ , при любых значениях запаздывания  $t$ ,  $t_*$ , ограничить параметры  $g(s)$  и  $a(s)$  (т.е. наложить требования на значения матриц  $\tilde{L}_m$  и  $\tilde{\Gamma}_m$ ), исходя из выполнения неравенства

$$a_{0,m} > |\Phi_2(w)| + |\Phi_3(w)| + |\Phi_4(w)| + |\Phi_5(w)|.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1973.



3. *Клюев А.С., Карнов В.С.* Синтез быстродействующих регуляторов для объектов с запаздыванием. М.: Энергоатомиздат, 1990.
4. *Мееров М.В.* Адаптивные компенсирующие регуляторы с предиктором Смита // *АиТ.* 2000. № 10. С.125 – 135.
5. *Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектами с последействием. М.: Наука, 1984.
6. *Паршева Е.А., Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектом с запаздывающим управлением со скалярным входом-выходом // *АиТ.* 2001. № 1. С.142-149.
7. *Landau I.D.* Adaptive control systems: the model reference approach. N.Y.: Marsel Dekker, 1979.
8. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Адаптивно-робастные алгоритмы следящей системы для объекта с запаздыванием по управлению // *Дальневосточный математический журнал.* 2003. Т. 4. №1. С.141-150.
9. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой // *АиТ.* 1994. № 9. С.3-20.
10. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Метод расширенной ошибки в адаптивных системах управления с явно-неявной эталонной моделью // *Информатика и системы управления.* 2003. №2 (6). С.110-119.
11. *Еремин Е.Л.* Построение адаптивных систем с запаздыванием по управлению на основе эталонного упредителя // *Информатика и системы управления.* 2005. № 1(9). С.122-128.
12. *Еремин Е.Л.* Робастные алгоритмы нестационарных систем управления с явно-неявной эталонной моделью // *Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления».* 2001. №3. <http://www.neva.ru/journal>.
13. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.