УДК 681.5:519.6

© 2011 г. **Г.Б. Диго**,
Н.Б. Диго
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

АППРОКСИМАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ РАВНОМЕРНОЙ СЕТКОЙ НА ОСНОВЕ АДАПТИВНОГО РАЗБИЕНИЯ[1]

Предлагается аппроксимация равномерной сеткой областей работоспособности и достижимости на основе адаптивного разбиения параллелепипеда ограничений на параметры технической системы или устройства. Показано, что такое сеточное представление позволяет уточнять неизвестные границы аппроксимируемых областей, используя имеющуюся априорную и текущую информацию.

Ключевые слова: область работоспособности, область достижимости, условия неопределенности, аппроксимация, сеточное представление области, адаптивное разбиение.

Введение

В различных областях науки и техники при решении задач проектирования, моделирования реальных процессов или явлений, анализе данных возникают проблемы выбора оптимального управления и сокращения пространства его поиска. Проблемы управления динамическими объектами, в частности проблемы параметрического синтеза, являются очень затратными с вычислительной точки зрения и требуют эффективных численных методов для своего решения в условиях большой размерности и неопределенности. Использование областей достижимости и работоспособности позволяет уменьшить вычислительную трудоемкость. Однако в случае нелинейных систем такие области не имеют аналитического описания, и для их аппроксимации применяются различные численные методы, сокращающие пространство поиска и время вычислений, но эффективность используемых алгоритмов существенно зависит от имеющейся априорной информации [1 – 3].

В настоящее время для аппроксимации областей достижимости управляе-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов ДВО РАН (программа фундаментальных исследований Президиума РАН №14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» и программа фундаментальных исследований №15 ОЭММПУ РАН «Управление движением, теория сложных информационно-управляющих систем»).

мых динамических систем различного вида известен ряд методов, один из которых предложен Ф.Л. Черноусько [1]. Он основан на использовании эллипсоидальной аппроксимации и применим в принципе и для нелинейных динамических систем. Этот метод не требует чрезмерно больших вычислительных затрат, однако не позволяет получать результат с наперед заданной точностью вычислений. Подходы Х.Г. Гусейнова, А.Н. Моисеева, В.Н. Ушакова [4] позволяют аппроксимировать лишь границы областей достижимости и только в случае их выпуклости. К ним близок метод, предлагаемый Н.В. Евсеевым и В.Е. Усачовым [5]. Он использует задание в фазовом пространстве набора равномерно распределенных узловых точек, принадлежащих аппроксимируемой области достижимости, по которым строится аппроксимирующее множество, образованное объединением шаров с центрами в узловых точках определенного одинакового радиуса, по которому определяется точность полученной аппроксимации.

Используемые в параметрическом синтезе области работоспособности могут быть построены, исходя из математической модели исследуемой системы, системы ограничений на выходные показатели и ограничений на внутренние параметры. В ряде случаев применяется описание их системой в общем случае нелинейных неравенств, а наличие априорной информации о выпуклости позволяет применять методы выпуклой оптимизации. Во многих ситуациях оказываются эффективными методы аппроксимации некоторыми геометрическими фигурами (вписанными или описанными гиперпараллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, выпуклыми многогранниками, эллипсоидами [6 – 8]). Кроме того, при выполнении определенных требований к целевой функции, условиям работоспособности и ограничениям на внутренние параметры могут использоваться методы неравномерных покрытий – такие как покрытия n-мерными параллелепипедами (кубами), вписанными в шары [9], и покрытия n-мерными параллелепипедами, полученные адаптивным диагональным разбиением [10 – 12].

В статье рассматривается подход к аппроксимации областей работоспособности и достижимости равномерной сеткой с помощью адаптивного разбиения параллелепипеда допусков на вектор внутренних параметров или на вектор состояния.

Основные понятия, определения и пояснения

К задачам параметрического синтеза относится совокупность задач, связанных с определением требований к параметрам объекта, номинальных значений параметров и их допусков. Для пояснения их сущности используется геометрическая интерпретация, связанная с введением n-мерного пространства управляемых (внутренних) параметров и m-мерного пространства выходных параметров. При этом каждой точке пространства управляемых параметров соответствует вектор значений выходных параметров, компоненты которого являются координатами точки.

Задача оптимального параметрического синтеза (параметрической оптимизации) состоит в определении значений параметров элементов, наилучших с позиций удовлетворения требований технического задания при неизменной структуре проектируемого объекта.

С учетом случайных параметрических возмущений она заключается в выборе номинальных значений внутренних параметров исследуемой системы или устройства $x_{ном} = (x_{1ном},...,x_{n\,ном})$, обеспечивающих максимум вероятности его безотказной работы в течение заданного промежутка времени:

$$x_{ном} = \arg\max P\{\mathbf{X}(x_{ном},t) \in D_{\mathbf{x}}, \forall t \in [0,T]\}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{X}(x_{ном},t)$ – случайный процесс изменения параметров; $D_{\mathbf{x}}$ – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации системы или устройства.

Пусть заданы условия работоспособности (технические требования) на выходные параметры $\mathbf{y} = (y_1,...,y_m)$

$$a_j \le y_j(\mathbf{x}) \le b_j, \quad j = 1,...,m, \tag{2}$$

причем

$$y_j = F_j(x_1,...,x_n), \tag{3}$$

$F_j(\cdot)$ – известный оператор, зависящий от топологии исследуемого устройства. Пусть, кроме того, известны прямые ограничения

$$x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max}, \quad x_i \ge 0, i = \overline{1,n} \tag{4}$$

на внутренние (управляемые) параметры, образующие в ортогональной системе координат допустимую область в виде n-мерного параллелепипеда допусков B_d

$$B_d = \{\mathbf{x} \in R^n \mid x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max}, i = 1,...,n\} \tag{5}$$

и выражающие условия их физической или технологической реализуемости.

Областью работоспособности $D_{\mathbf{x}}$ в пространстве управляемых параметров $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ называется множество точек $\mathbf{x} \in B_d$, в которых выполняются все заданные условия работоспособности (2), т.е.

$$D_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in D \,\big|\, a_j \le y_j(\mathbf{x}) \le b_j, \quad j = 1,...,m\}. \tag{6}$$

Зависимость (3) обычно задается не в явной, а в алгоритмической форме, в частности через численные решения систем уравнений (дифференциальных или алгебраических), описывающих функционирование исследуемой системы [2-3, 6]. Кроме того, область $D_{\mathbf{x}}$, как правило, неизвестна и отсутствует информация об ее форме и ориентации в пространстве внутренних параметров. В таких условиях задача построения области работоспособности в общем виде не имеет аналитического решения, и для ее аппроксимации применяются различные численные методы, сокращающие пространство поиска и снижающие трудоемкость вычислений путем их распараллеливания [6].

При управлении динамическими системами с использованием моделей объектов в виде обыкновенных дифференциальных уравнений возникает задача построения их областей достижимости.

Пусть изменение состояния некоторой управляемой динамической системы, подверженной действию неопределенных факторов, на отрезке времени

$[t_0,T]$, t_0 – начальный момент времени, описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = f(t,\mathbf{z},\mathbf{u}), \quad \mathbf{z}\in R^n, \ \mathbf{u}\in R^m, \qquad (7)$$

в котором $\mathbf{z} = (z_1,...,z_n)$ – n-мерный вектор состояния системы с терминальными ограничениями,

$$z_{i\,\min} \le z_i \le z_{i\,\max}, \quad z_i \ge 0, i = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

образующими в ортогональной системе координат допустимую область D:

$$D = \{\mathbf{z}\in R^n \,\big|\, z_{i\,\min} \le z_i \le z_{i\,\max}, \quad z_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}\}, \qquad (9)$$

$\mathbf{u} = (u_1,...,u_m)$ – m-мерный вектор управления (или неконтролируемых возмущений).

Пусть, кроме того, заданы геометрические ограничения на вектор $\mathbf{u}$ вида

$$\mathbf{u}\in U(t,\mathbf{z}). \qquad (10)$$

Областью достижимости $D_{\mathbf{z}}$ системы (7) при заданных ограничениях (8), (10) и $t \ge t_0$ называется, согласно [13-14], множество точек $\mathbf{z}\in D$, для каждой из которых существуют начальное состояние $\mathbf{z}_0 \in D$ и управление $\mathbf{u}(\cdot)$, удовлетворяющие (10) и порождающие решение $\mathbf{z}(\cdot)$ системы (7) такое, что $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}$, т.е.

$$D_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}\in D \,\big|\, \mathbf{u}\in U(t,\mathbf{z}), t\in[t_0,T]\}. \qquad (11)$$

В случае нелинейных динамических систем аппроксимация областей достижимости при ограничениях (10) наталкивается на существенные вычислительные трудности, аналогичные тем, которые возникают при численном построении областей работоспособности.

Постановка и анализ задачи

С учетом того, что ограничения (4) и (8) в ортогональной системе координат образуют соответственно n-мерные параллелепипеды допусков B_d из (5), содержащий область работоспособности $D_{\mathbf{x}}$, и D из (9), содержащий область достижимости $D_{\mathbf{z}}$; в дальнейшем будем оперировать только с параллелепипедом B_d и областью $D_{\mathbf{x}}$.

Пусть параллелепипед B_d размерности n, задаваемый выражением (5), содержит область $D_{\mathbf{x}}$ из (6), но не является для нее описанным. Ставится задача его описания на основе алгоритма адаптивного разбиения [10 – 11] для применения при аппроксимации области $D_{\mathbf{x}}$.

Очевидно, что для $D_{\mathbf{x}}$ описанным является параллелепипед B_0, имеющий грани, параллельные соответствующим граням B_d и касающиеся его границ. Его построение, как первый шаг на этапе аппроксимации, позволяет несколько уменьшить пространство поиска. Один из возможных алгоритмов построения B_0 и матричное описание $D_{\mathbf{x}}$ приведены в [3, 6]. Согласно ему для получения такого матричного описания $D_{\mathbf{x}}$ используется наложение n-мерной равномерной сетки на описанный параллелепипед B_0 квантованием области значений каждого i-го параметра. В результате описанный параллелепипед B_o представляется в виде множества непересекающихся параллелепипедов (ячеек)

$$B_o = \bigcup_{k_1=1}^{l_1} \bigcup_{k_2=1}^{l_2} \ldots \bigcup_{k_n=1}^{l_n} B_{k_1,k_2,\ldots k_n}, \qquad (12)$$

где l_i – количество разбиений на координатной оси i-го параметра. Информация об описании B_o (информация о каждой ячейке представления (12)) для последующего использования записывается в массив $A[K]$ в виде координат его границ и количества разбиений l_i на каждой i-й координатной оси. Это позволяет вычислять координаты каждой ячейки $B_{k_1,k_2,\ldots k_n}$ из (12).

Представляет интерес другой подход к использованию равномерной сетки, связанный с разбиением области B_d на n-мерные параллелепипеды на основе адаптивного разбиения [10]. Согласно ему, B_d разбивается на n-мерные параллелепипеды, а внутри каждого из них выбирается центральная точка. При этом важны два момента: надо определить, каким способом проводить разбиение и по каким точкам оценивать качество полученных n-мерных параллелепипедов. Поскольку характеристиками уже выбраны центральные точки, то желательно, чтобы последующее разбиение не изменяло координаты уже полученных центров. Поэтому предпочтительной является стратегия, по которой новые параллелепипеды формируются делением уже имеющихся на три части по различным измерениям, что позволяет, учитывая ранее полученные результаты, проводить вычисления только в центральных точках левой и правой третей.

Для применения описания параллелепипеда B_d, полученного с помощью этого подхода, при аппроксимации области $D_{\mathbf{x}}$ должно обеспечиваться компактное и доступное хранение информации о требуемых его характеристиках. К ним относятся координаты границ и количество разбиений на каждой координатной оси, обеспечивающих вычисление координат границ каждой ячейки, координаты центров ячеек как показателей качества этих ячеек (ячейка считается хорошей, если ее центр принадлежит $D_{\mathbf{x}}$, и плохой в противном случае). Эти характеристики, являющиеся сеточным представлением B_d, удобно хранить в виде n-мерного массива размерности, совпадающей с числом внутренних параметров исследуемой системы.

Адаптивное разбиение параллелепипеда допусков

Для решения поставленной задачи параллелепипед B_d разбивается на n-мерные параллелепипеды (ячейки) с помощью равномерной сетки. Внутри каждой ячейки выбирается центральная точка. Процесс вычислений ускоряется за счет формирования новых параллелепипедов делением уже имеющихся на три части по различным измерениям. Это позволяет проводить вычисления только в центральных точках левой и правой третей, учитывая ранее полученные результаты. Предполагается, что каждая компонента x_i вектора $\mathbf{x}$ в параллелепипеде допусков B_d из (5) имеет нижнюю границу 0 и верхнюю границу 1, т.е. B_d всегда является n-мерным единичным кубом (этого без потери общности всегда можно добиться с помощью линейного преобразования заданных ограничений). Тогда разбиение начинается с единственного n-мерного параллелепипеда, единичного n-мерного куба, каждая сторона которого имеет длину, равную 1.

Характеристикой получаемого разбиения B_d является информация в виде координат его границ и количества разбиений l_i на каждой i-й координатной оси, обеспечивающая вычисление координат границ каждой ячейки и ее центра как характеристики качества (ячейка считается хорошей, если ее центр принадлежит $D_{\mathbf{x}}$, и плохой в противном случае). Для ее хранения заводится массив $A[K]$ длины $K = \prod_{i=1}^{n} l_i$, элементы которого принимают значения 0 (ячейка плохая) или 1 (ячейка хорошая). Поскольку новые параллелепипеды формируются разделением существующих параллелепипедов по различным измерениям на три, то длины сторон для параллелепипеда описываются величинами $3^{-k}, k = 0,1,2,\ldots$. При этом каждый полученный n-мерный параллелепипед всегда разделяется по своей самой длинной стороне и никакая из его сторон длиной $3^{-(k+1)}$ не может быть разделена, пока не будут разделены все его стороны длиной 3^{-k}.

После проведения r разделений в параллелепипеде B_d будет получено $j = \mathrm{mod}(r,n)$ сторон размера $3^{-(k+1)}$ и $(n-j)$ сторон размера 3^{-k}, где $k = (r-j)/n$, а, следовательно, расстояние от его центра до вершин вычисляется по формуле $d = [j3^{-2(k+1)} + (n-j)3^{-2k}]^{0.5}/2$. Описанный процесс адаптивного разбиения прекращается, когда для заданной величины $e > 0$ выполняется неравенство $3^{-(k+1)} < e$.

В результате такого разбиения параллелепипед B_d покрывается n-мерной равномерной сеткой, каждая ячейка которой имеет свою характеристику в терминах «хорошая – плохая» относительно соответствующей центральной точки. Полученному сеточному представлению соответствует матричный аналог в виде n-мерного массива $C[l_1,l_2,\ldots,l_n]$, размерность которого совпадает с размерностью вектора $\mathbf{x}$.

Возможности сокращения пространства поиска

Содержащаяся в массиве $C[l_1,l_2,\ldots,l_n]$ информация о параллелепипеде B_d позволяет уменьшить пространство поиска при описании области $D_{\mathbf{x}}$ путем перехода от параллелепипеда B_d к описанному вокруг нее параллелепипеду B_0. Для этого анализируется информация из массива $A[K]$ о качестве ячеек, полученных в процессе разбиения. При фиксированном значении координаты $x_n = 0$ проверяется, есть ли среди ячеек этого слоя хорошие (соответствующий элемент массива $A[K]$ равен 1). Если да, то осуществляется переход к слою ячеек, в котором выполняется $x_n = 1$. В противном случае этот слой исключается из дальнейшего рассмотрения и осуществляется переход к анализу следующего слоя. Процесс продолжается до тех пор, пока не появится хотя бы одна хорошая ячейка в проверяемом слое.

Аналогичный анализ проводится и для остальных (n-1) переменных. В результате, с точностью до заданного значения e, находится n-мерный параллелепипед, описанный вокруг области $D_{\mathbf{x}}$:

$$B_0 = \{\mathbf{x} \in R^n \mid 0 \le c_i \le x_i \le d_i \le 1, i = 1,...,n\}, \qquad (13)$$

имеющий свое матричное представление $\breve{C}[\breve{l}_1, \breve{l}_2, ..., \breve{l}_n]$, соответствующий массив качества ячеек $\breve{A}[\breve{K}]$ длины $\breve{K} = \prod_{i=1}^{n} \breve{l}_i$. Эта информация обеспечивает более точное описание $D_{\mathbf{x}}$, которое, в свою очередь, может быть аппроксимировано геометрическими фигурами, такими как вписанный n-мерный параллелепипед, вписанный – описанный эллипсоиды и т.д. [1, 2, 8].

Заключение

Проведенный анализ возможности использования адаптивного подхода к разбиению параллелепипеда допусков при аппроксимации областей достижимости и работоспособности позволяет сделать следующие выводы:

обеспечивается описание исследуемых областей набором ячеек с размерами заданной точности, полученных на основе их равномерного сеточного покрытия;

получаемое сеточное представление параллелепипеда допусков компактно, а его хранение в виде n-мерного массива размерности, совпадающей с размерностью вектора состояний или вектора внутренних параметров исследуемой системы, доступно для последующего использования;

в задачах параметрического синтеза на этапе предварительного анализа области работоспособности в условиях неопределенности такой подход позволяет добиваться разбиения на ячейки с размерами заданной точности и дает возможность отслеживать ее неизвестные границы с большей точностью;

при построении областей достижимости динамических систем численными методами такой подход позволяет сократить вычислительные затраты;

при дефиците информации о случайных процессах изменения параметров системы выбор направления, основанного на идее равномерного сеточного покрытия параллелепипеда допусков и адаптивного разбиения, обеспечивает расширение возможностей использования высокопроизводительных ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988..
2. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.
3. *Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Алгоритмы анализа области работоспособности, заданной в матричной форме // Информатика и системы управления. – 2005. – №2(10). – С.118–128.
4. *Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.* Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т.62, №2. – С.179-187.

5. *Евсеев Н.В., Усачов В.Е.* Об одном методе аппроксимации областей достижимости управляемой стохастической нелинейной динамической системы http://www.mipt.ru/nauka/conf_mipt/conf2001/faki/physmech/.
6. *Абрамов О.В., Диго Г.Б., Диго Н.Б., Катуева Я.В.* Параллельные алгоритмы построения области работоспособности // Информатика и системы управления. – 2004. – №2(8). – С.121-133.
8. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Реализация параллельного алгоритма аппроксимации области работоспособности выпуклым многогранником // Информатика и системы управления. – 2006. – №1(11). – С.167-174.
9. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Использование эллипсоидов для описания области работоспособности // Информатика и системы управления. – 2008. – №1(15). – С. 22-28.
10. *Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г.* Методы поиска глобального экстремума. – М.: Наука, 1991.
11. *Jones D.R., Perttunen C.D., and Stuckman B.E.* Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1993. – Vol. 79, No 1. – P.157-181.
12. *Sergeyev Yaroslav D. and Kvasov Dmitri E.* Global Search Based on Efficient Diagonal Partitions and a Set of Lipschitz Constants // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2006. – Vol.16, No 3. – P.910-937.
13. *Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е.* Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: Физматлит. 2008.
14. *Костоусова Е.К.* Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. – 1998. – Т.3, №2. – С.11-20.
15. *Бобылева О.Н.* Области достижимости управляемых систем в задачах с фазовыми ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т.38, №11. – С1563-1564.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:
Диго Галина Борисовна – bernatsk@iacp.dvo.ru;
Диго Наталья Борисовна – digo@iacp.dvo.ru.