УДК 681.5:519.6

© 2011 г. **Я.В. Катуева**, канд. техн. наук,
М.Ф. Аноп
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБЛАСТИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО[1]

Обсуждаются процедуры предварительного анализа области работоспособности и уменьшения области поиска как начальные этапы оптимизации параметрической надежности аналоговых технических систем с учетом дрейфа параметров.

Предлагаются рекомендации по выбору стартовой точки поиска на основе метода статистических испытаний.

Ключевые слова: область работоспособности, условия неопределенности, аппроксимация, метод Монте-Карло.

Введение

В различных отраслях техники возникает необходимость решения сложных задач управления, в частности – выбора наилучших альтернатив при проектировании устройств и систем с заданными показателями качества. Существенным фактором, значительно усложняющим поиск оптимального решения, является наличие процессов деградации в самой системе и случайных воздействий на нее, влекущих, в свою очередь, изменение значений параметров системы и качества ее функционирования.

В традиционном понимании задача параметрического синтеза состоит в выборе параметров проектируемой системы заданной структуры, обеспечивающих определенное качество ее функционирования (работоспособность, надежность по постепенным отказам, безопасность, точность и т.д.) [1]. Из-за случайного характера процессов деградации параметров, отсутствия в большинстве случаев какой-либо информации об их характеристиках и большой размерности пространства параметров задача оптимизации параметрической надежности с вычислительной точки зрения является очень затратной. Кроме того, из-за использова-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов ДВО РАН (программа фундаментальных исследований Президиума РАН №14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» и программа фундаментальных исследований №15 ОЭММПУ РАН «Управление движением, теория сложных информационно-управляющих систем»).

ния в задачах параметрического синтеза целевых функций, заданных алгоритмически, невозможно использовать методы оптимизации порядка выше нулевого. Ускорения процесса вычислений при решении таких задач удается достичь за счет уменьшения области поиска, последующего выбора в ней начальных точек и использование области работоспособности.

В статье предлагается предварительная процедура для уменьшения области поиска на основе метода статистических испытаний и анализа полученных данных на начальном этапе оптимизации.

Основные понятия и определения

Предполагаются известными топология (структура) схемы и соответствующая ей математическая модель

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{Q}), \tag{1}$$

связывающая выходные параметры $\mathbf{y}$ с внутренними $\mathbf{x}$ и внешними $\mathbf{Q}$ и определяющая таким образом зависимость выходных параметров от параметров элементов, в которой $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^{m}$ – вектор выходных параметров; $y_j = F_j(x_1, ..., x_n)$, $F_j(\cdot)$ – известный оператор, зависящий от топологии исследуемой системы.

В большинстве случаев зависимость (1) задается не в явной, а в алгоритмической форме, через численное решение систем уравнений. Для выходных параметров задается схема расчета, состоящая из вычислительных блоков, которые описывают математические (или алгоритмические) зависимости.

Возможные вариации значений внутренних параметров задаются из условий их физической реализуемости и представляют собой брус допусков B_T (область допустимых вариаций параметров схемных элементов):

$$B_T = \{a_i^0 \le x_i \le b_i^0, i = \overline{1, n}\}. \tag{2}$$

Показателем качества функционирования системы является выполнение условий работоспособности, задаваемых обычно в виде допусков на выходные параметры

$$\mathbf{A} \le \mathbf{y}(\mathbf{x}) \le \mathbf{B}. \tag{3}$$

В качестве количественного показателя надежности по постепенным отказам (параметрической надежности) будем использовать вероятность безотказной работы, записанную как вероятность удовлетворения условий работоспособности

$$P(T) = P\{\mathbf{A} \le \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \le \mathbf{B} \quad \forall t \in [0, T]\} \tag{4}$$

для заданного времени эксплуатации устройства T.

Область пространства параметров элементов $\mathbf{x} \in R^n$, во всех точках которой выполняются одновременно все условия (3), называется областью работоспособности $D_{\mathbf{x}}$:

$$D_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{A} \le \mathbf{y}(\mathbf{x}) \le \mathbf{B}\}. \tag{5}$$

Задача оптимизации надежности технических систем по постепенным отказам состоит в выборе номинальных значений параметров элементов исследуемой системы $\mathbf{x}_{\text{ном}} = (x_{1\text{ном}}, x_{2\text{ном}}, ..., x_{n\text{ном}})$, обеспечивающих максимум вероятности выполнения условий работоспособности (3) в течение заданного времени и может быть сформулирована следующим образом:

$$\mathbf{x}_{\text{ном}} = \arg\max P\{X(\mathbf{x}_{\text{ном}}, t) \in D_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_{ном} \in B_T \cap D_{\mathbf{x}}, \forall t \in [0, T]\}, \qquad (6)$$

где $X(\mathbf{x}_{\text{ном}}, t)$ – случайный процесс изменения параметров; B_T – брус допустимых реализаций значений внутренних параметров; $D_{\mathbf{x}}$ – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации системы.

Задачу параметрического синтеза (6) можно считать классической оптимизационной задачей, где в качестве целевой функции выступает вероятность безотказной работы исследуемого объекта, а ограничениями являются условия работоспособности (3) и область допустимых значений параметров объекта (2). Для решения всякой задачи оптимизации необходимо уметь вычислять критерий и иметь достаточно надежный и эффективный метод поиска экстремума целевой функции (метод оптимизации). Часто необходимая априорная информация о вероятностных свойствах отклонений параметров от расчетных значений отсутствует или является недостаточно полной. В этом случае вместо статистических показателей используются некоторые детерминированные (минимаксные) критерии типа “запасов” (работоспособности, надежности и т.д.) как для внутренних, так и для выходных параметров системы [2, 3]. При этом критерий, стохастический или детерминированный, вычисляется, как правило, численными методами, что делает невозможным использование методов оптимизации с порядком выше нулевого из-за сложности оценки частных производных целевой функции.

Задача построения и анализа области работоспособности

Определенной характеристикой возможности системы удовлетворять требованиям качества функционирования в условиях параметрических возмущений является область работоспособности (ОР) $D_{\mathbf{x}}$, построенная в координатах параметров схемных элементов системы. Совокупность значений внутренних параметров может быть представлена изображающей точкой в n-мерном пространстве этих параметров. Для обеспечения работоспособности системы эта точка должна находиться внутри области $D_{\mathbf{x}}$. Построение тем или иным методом области работоспособности $D_{\mathbf{x}}$ является, по сути, первым этапом решения общей задачи параметрического синтеза системы [1].

Основные трудности при построении ОР связаны с большой размерностью пространства варьируемых параметров, следствием которой являются вычислительная трудоемкость соответствующих алгоритмов, отсутствие априорной информации о конфигурации областей и сложность интерпретации результатов. Для получения конструктивных сведений об ОР необходимо иметь эффективные методы и алгоритмы их построения и представления в виде, позволяющем оценивать особенности их конфигурации и осуществлять оптимальный выбор номиналов параметров и допусков.

Существующие алгоритмы оценивания и приближения ОР основаны на использовании известных фигур – таких как многомерные эллипсоиды, гиперпараллелепипеды (вписанные или описанные), различные комбинации и объединения этих фигур.

Для уменьшения вычислительных затрат на проведение оптимизации надежности по постепенным отказам при проектировании технических устройств и систем предлагается ограничить область поиска с помощью описанного вокруг области работоспособности бруса (параллелепипеда со сторонами, параллельными координатным плоскостям) и провести предварительную процедуру анализа возможных решений. Построение описанного бруса сокращает вычислительные затраты решения задачи, так как при вычислении значения целевой функции для точек, попавших за пределы описанного бруса, нет необходимости проводить дорогостоящий процесс моделирований исследуемой системы и вычисления критерия, поскольку очевидно, что за его пределами условия работоспособности выполнены не будут.

Применение метода Монте-Карло в качестве предварительной процедуры

Область в пространстве внутренних параметров, задаваемая соотношениями (2), представляет собой n-мерный ортогональный параллелепипед, который будем называть брусом допусков B_T, с объемом

$$V_T = \prod_{i=1,n} (x_{i\max} - x_{i\min}) . \tag{7}$$

Описанным брусом B_0 (описанным параллелепипедом) для области работоспособности $D_\mathbf{x}$ будем называть область в пространстве внутренних параметров, представляющую собой n-мерный ортогональный параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат

$$B_0 = \{\mathbf{x} \in R^n \mid a_i^0 \le x_i \le b_i^0, \, i = \overline{1,n}\}$$

с объемом

$$V_0 = \prod_{i=1,n} (b_i^0 - a_i^0) , \tag{8}$$

где $a_i^0 = \min\limits_{\mathbf{x} \in D_\mathbf{x}} x_i$; $b_i^0 = \max\limits_{\mathbf{x} \in D_\mathbf{x}} x_i$.

Определим точки касания области работоспособности и описанного бруса K_i^-, K_i^+ как точки с минимальными K_i^- и максимальными K_i^+ координатами по каждому i-му координатному направлению, принадлежащие одновременно описанному брусу и области работоспособности. Графическое представление описанного бруса для случая двух переменных дано на рис. 1, точки $K_1^-, K_1^+, K_2^-, K_2^+$ – точки касания области работоспособности и описанного параллелепипеда. Существуют различные алгоритмы построения описанного бруса [2, 4]. Это методы направленного поиска, различные классические методы поиска экстремальных значений функционалов и метод статистических испытаний. С развитием параллельных и распределенных вычислений можно говорить о возрождении многих трудоемких в вычислительном плане численных методов, в том числе и метода Монте-Карло, поскольку он имеет хороший потенциал параллелизма и часто позволяет добиться ускорения, близкого к линейному [5].

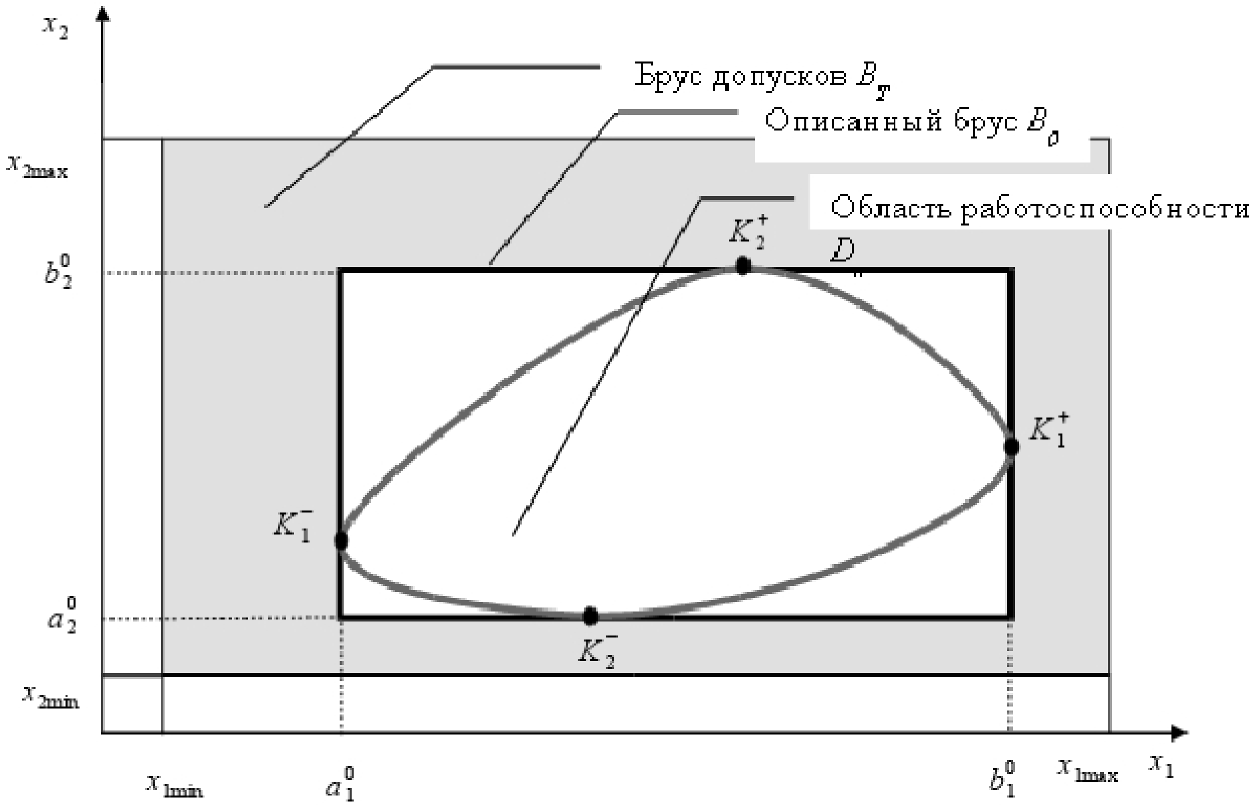

Рис.1. Аппроксимация области работоспособности D_x описанным брусом.

Использование метода статистических испытаний для построения описанного бруса имеет ряд преимуществ. Число испытаний N не зависит от размерности пространства параметров (по аналогии с кратностью интеграла), поэтому метод Монте-Карло выгодно применять для построения описанных параллелепипедов большой размерности [6, 7], получая характеристику области работоспособности через оценку ее объема V_g. Такая оценка позволяет судить о соотношении объемов бруса допусков, описанного бруса и непосредственно области работоспособности.

Алгоритм построения описанного бруса методом статистических испытаний сводится к следующему.

Пусть известны границы бруса допусков (2) и условия работоспособности (3). Для нахождения значений векторов $\mathbf{a}^0$, $\mathbf{b}^0$ устанавливаем начальные значения:

$a_i^0 = x_{imax}$ и $b_i^0 = x_{imin}$, $i=\overline{1,n}$,

устанавливаем число успешных испытаний (попаданий в область работоспособности) – N_g=0.

Брус допусков равномерно покрывается пробными точками и проверяется выполнение условий работоспособности (3) для каждой из них. Координаты случайной точки в брусе допусков являются совокупностью n случайных чисел $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, равномерно распределенных в интервалах

$$x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Число испытаний N (количество пробных точек) задается, исходя из необходимого доверия к результатам метода статистических испытаний [6, 7].

Алгоритм 1. Построение описанного бруса методом Монте-Карло.

01. Цикл по количеству точек метода статистических испытаний k=1 до N.
02. Цикл по количеству координат i=1 до n.
03. Генерация x_i - случайной i-й координаты в пределах допуска на i-й параметр.
04. Вычисление выходных параметров модели в полученной точке $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.
05. Если в данной точке выполнено условие работоспособности (2), то
06. $N_g=N_g+1$.
07. Цикл по количеству координат i=1 до n.
08. Если $x_i < a_i^0$ то
09. $a_i^0 = x_i$
10. Запоминание новой точки касания $K_i^- = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$.
11. Если $x_i > b_i^0$, то
12. $b_i^0 = x_i$
13. Запоминание новой точки касания $K_i^+ = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$.

Конец алгоритма 1.

После проведения N испытаний в брусе допусков вычисляется оценка объема области работоспособности:

$$\tilde{V}_g = V_T N_g / N, \tag{9}$$

где V_T – объем бруса допусков, полученный согласно (7); N_g – число точек, попавших в область работоспособности, N – число испытаний.

Соотношение полученной оценки объема области работоспособности и объема описанного параллелепипеда

$$K_V = \tilde{V}_g / V_0$$

позволяет судить о степени «заполненности» описанного параллелепипеда находящейся внутри него областью работоспособности.

Использование метода статистических испытаний для построения описанного вокруг области работоспособности параллелепипеда позволяет получить:

1) границы $\mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0$ описанного бруса B_0;

2) оценку объема $\tilde{V}_g$ области работоспособности и коэффициент K_V степени заполненности областью работоспособности описанного параллелепипеда B_0;

3) точки касания $K_i^-, K_i^+, i=\overline{1,n}$ области работоспособности и описанного бруса, через которые проходят границы описанного бруса.

Построение n-полиэдра по точкам касания и вычисление его объема

По точкам касания $K_i^+, K_i^-, i = \overline{1,n}$ можно построить многогранник (выпуклую оболочку данного множества точек, вписанный в B_0 политоп S), аппроксимирующий область работоспособности. Найдя объем V_p этого многогранника, можно посчитать соотношение его объема и объема области работоспособности $\tilde{V}_g$.

В случае большого числа измерений многогранник S уже не является таким простым геометрическим объектом, как его двумерный аналог, – выпуклый многоугольник [8].

Для нахождения его объема берется произвольная точка K_0, лежащая внутри S, и соединяется с вершинами $K_1^+ ... K_n^+, K_1^- ... K_1^+$. В результате получим $2n$ n-симплексов, объемы которых можно легко вычислить, используя соотношение

$$V_n = \frac{1}{n!}\tilde{V}_n \tag{10}$$

между объемами n-симплекса V_n и соответствующего n-параллелепипеда $\tilde{V}_n$.

Тогда объем V_S вычисляется по формуле:

$$V_S = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{2n}\tilde{V}_i \tag{11}$$

Алгоритм нахождения объема полиэдра V_S содержит несколько этапов, которые ниже будут описаны более подробно.

Шаг 1. Выбор точки K_0.

Шаг 2. Вычисление объема по формуле (10).

Рассмотрим каждую из указанных операций отдельно и оценим их сложность.

Шаг 1. В качестве точки K_0 можно взять центр масс (центроид) множества точек касания. Центроид множества из N точек в k-мерном пространстве может быть тривиально вычислен за $O(Nk)$ арифметических операций по формуле:

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} x_j^i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Но для нашей задачи достаточно будет взять центроид любых трех некомпланарных точек.

Шаг 2. Объем n-параллелепипеда $\tilde{V}_n$ можно вычислить как модуль смешанного произведения векторов, его образующих. Так как в нашем случае параллелепипед задается координатами вершин, то удобнее воспользоваться формулой:

$$V = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & & \vdots \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \ldots & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Определитель квадратных $m \times m$ матриц можно вычислить, например, используя метод Гаусса или LU-разложение. Сложность этих методов составляет

O(m³).

Остался нерассмотренным вопрос о формировании *n*-симплексов из точек множества *K*. Один из способов – порождать все возможные сочетания длины *n* из *2n* точек и отсеивать те подмножества, которые не образуют симплекс. Но нетрудно заметить, что все искомые многогранники можно получить, генерируя все возможные двоичные наборы длины *n*. Такие наборы иначе называют бинарными кодами Грея длины *n*.

Для примера рассмотрим двумерные и трехмерные случаи. Для двумерного случая, представленного на рис. 2, имеем четыре многогранника: $K_0K_1^+K_2^+, K_0K_1^-K_2^+, K_0K_1^+K_2^-, K_0K_1^-K_2^-$.

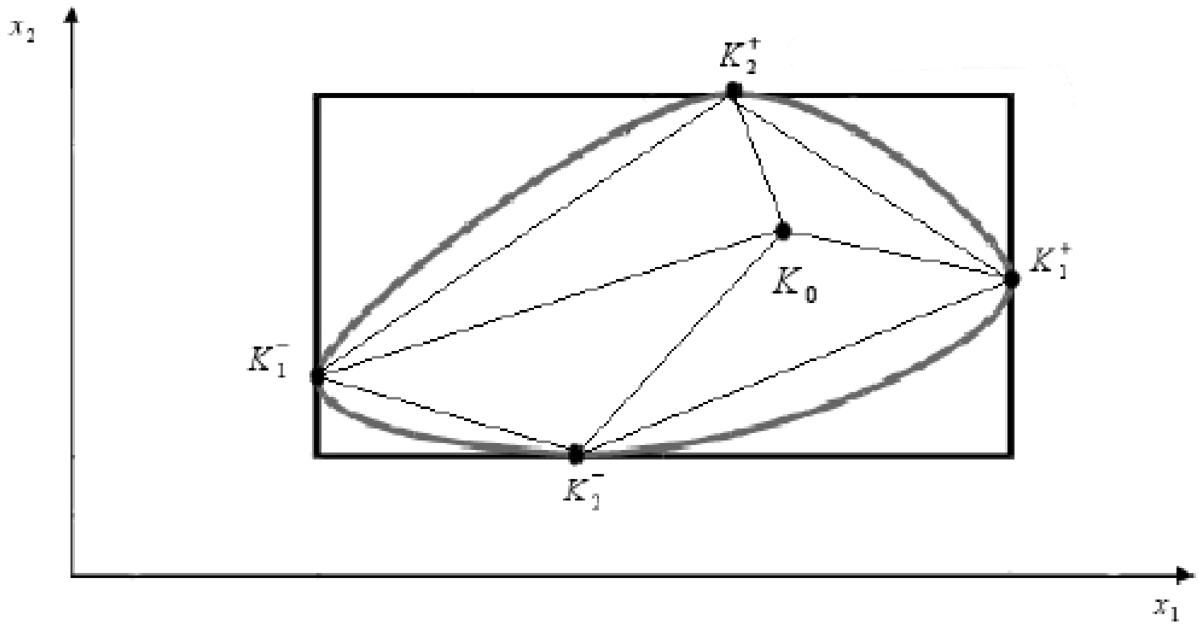

Рис. 2. Вычисление объема многогранника в двумерном случае.

Эти наборы точек отличаются лишь последовательностью плюсов (+) и минусов (–). Если закодировать + как 1, а – как 0, получим 2-битный код Грея: 00, 01,10, 11, соответствующий искомым многогранникам.

В трехмерном случае (рис. 3) 8 многогранников аналогично представляются 3-битным кодом 000,001, 010,...,111.

В общем случае нужно генерировать все бинарные последовательности длины *n*, применяя рекуррентные или нерекуррентные алгоритмы [9, 10].

Опишем процедуру вычисления объема многогранника *S*.

<u>Алгоритм 2. Вычисление объема многогранника, заданного координатами своих вершин.</u>

01. *вычисление точки* K_0; // *формула (12)*
02. ***for*** *i*:=0 ***to*** *n* ***do*** b_i:=0 // *начальный двоичный набор;*
03. ***while*** b_n <>1 ***do***
04. *вычисление* V_k *- объема симплекса* $K_0K_1^{b_1}K_2^{b_2}...K_n^{b_n}$ *по формуле (10);*
05. *i:=0;*

```
        while b_i=1 do
              b_i=0;
              i:=i+1;
        b_i:=1;
```

$V_S = \sum_{k=1}^{2n} V_k$.

<u>Конец алгоритма 2.</u>

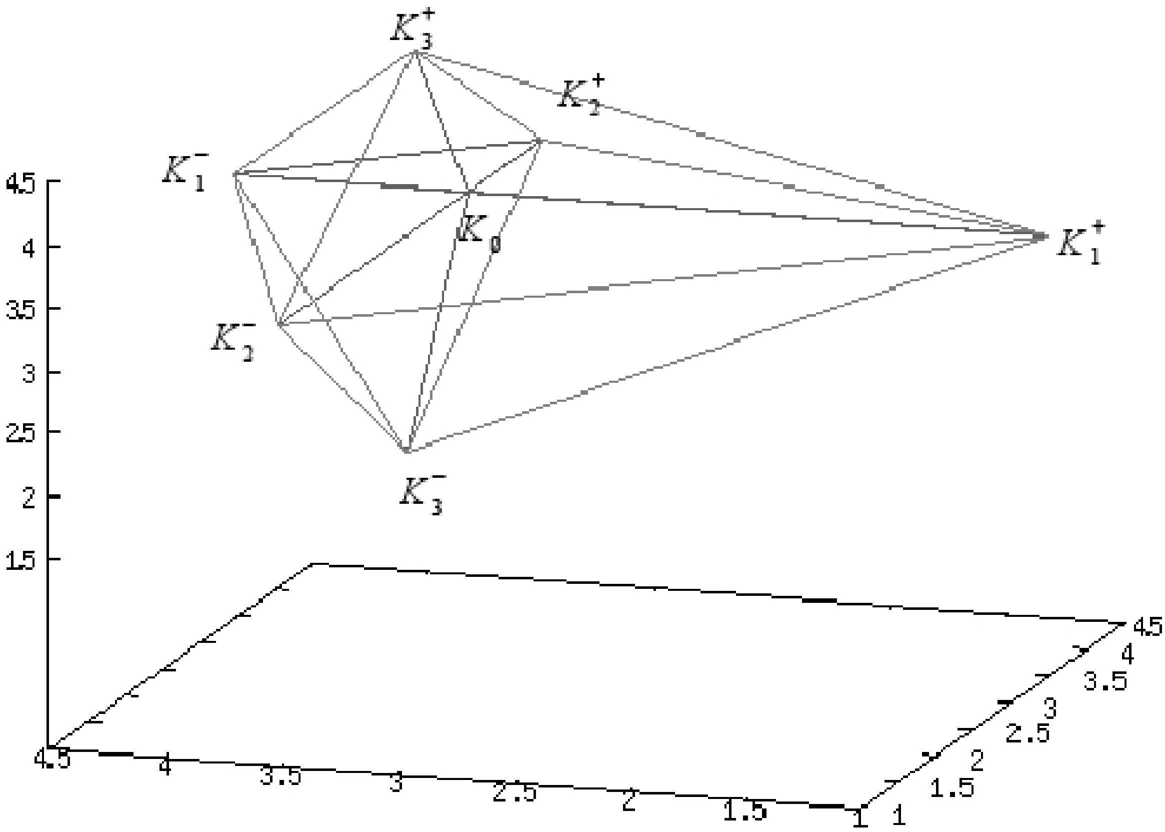

Рис. 3. Вычисление объема многогранника в трехмерном случае.

Анализ объема, конфигурации и положения области работоспособности по данным, полученным методом статистических испытаний

Несмотря на высокую вычислительную трудоемкость, метод статистических испытаний имеет ряд преимуществ. Так, число испытаний не зависит от размерности пространства внутренних параметров, а кроме границ описанного бруса, с его помощью удается получать дополнительные сведения об области работоспособности и проводить предварительный анализ возможности получения решения задачи (6).

Описанный брус может быть построен данным методом в следующих случаях.

1. Область работоспособности $D_{\mathbf{x}}$ не является односвязной.

2. Область работоспособности $D_{\mathbf{x}}$ включает в себя брус допусков B_T ($B_T \in D_{\mathbf{x}}$, $N_g = N$, $B_0 = B_T$).

3. Область работоспособности $D_{\mathbf{x}}$ и брус допусков B_T не имеют общих точек

($D_{\mathbf{x}} \cap B_T = 0$, $N_g = 0$).

Исключим из рассмотрения два последних случая. Если область работоспособности включает в себя брус допусков, решением задачи (6) будет являться точка пересечения диагоналей бруса допусков. В случае, если число попаданий в область работоспособности равно нулю, можно сделать вывод, что задача оптимизации надежности по постепенным отказам для данного устройства при таких требованиях к возможным реализациям внутренних параметров не имеет решения.

Построение описанного бруса методом статистических испытаний позволяет получать такие специальные точки как точки касания области работоспособности и описанного бруса $K_i^-, K_i^+, i = \overline{1,n}$, точка пересечения диагоналей описанного бруса

$$C_0 = ((b_1^0 - a_1^0)/2, \ldots, (b_i^0 - a_i^0)/2, \ldots, (b_n^0 - a_n^0)/2),$$

на основе которых предлагается проводить геометрический анализ области работоспособности.

Точки касания $K_i^-, K_i^+, i = \overline{1,n}$, могут:

быть стартовыми при использовании алгоритмов направленного поиска для нахождения точек, максимально удаленных от границ области работоспособности;

служить стартовыми точками при построении дискретного аналога области работоспособности [11];

обеспечивать предварительные выводы об ориентации области работоспособности в пространстве параметров.

Точка C_0 пересечения диагоналей описанного бруса при выполнении в ней условий работоспособности (3) может служить стартовой точкой для поисковой оптимизации.

По соотношению объемов области работоспособности и описанного бруса K_V можно судить о качестве решения при дискретной аппроксимации области работоспособности [11]. Если соотношение K_V достаточно мало, это свидетельствует о неодносвязности или вытянутости геометрической конфигурации области. Напротив, при достаточно высоком заполнении областью работоспособности описанного бруса в качестве стартовой точки поиска следует принимать точку пересечения диагоналей описанного бруса C_0.

По точкам касания $K_i^-, K_i^+, i = \overline{1,n}$ можно строить политоп S, вписанный в B_0 и аппроксимирующий область работоспособности $D_{\mathbf{x}}$.

Если объем V_S политопа S больше объема $\tilde{V}_g$ области работоспособности $D_{\mathbf{x}}$, то можно сделать вывод о невыпуклости либо неодносвязности $D_{\mathbf{x}}$. В этом случае многие классические методы решения задачи оптимизации надежности по постепенным отказам, основанные на допущении выпуклости и односвязности области работоспособности, применять в условиях неопределенности при решении задачи (6) нельзя.

Заключение

Применение основанной на методе статистических испытаний предварительной процедуры уменьшения области поиска и аппроксимации области работоспособности позволяет оценить возможность получения решения задачи параметрического синтеза. Метод Монте-Карло имеет хороший потенциал распараллеливания, важный момент которого состоит в том, что процессоры и станции локальной сети могут быть как однотипными, так и отличающимися друг от друга по своим вычислительным характеристикам.

Проведение анализа полученных данных позволяет выявлять случаи, в которых дальнейшее использование процедур решения задачи параметрического синтеза с предложенной структурой (моделью устройства, задаваемой функционалом (1)) не имеет смысла. Это связано с тем, что при данных допустимых вариациях внутренних параметров либо нет решения, либо допустимое решение очень узкое в плане возможного дрейфа параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.
2. *Антушев Г.С.* Методы параметрического синтеза сложных технических систем. – М.: Наука, 1989.
3. *Абрамов О.В., Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Оптимальный параметрический синтез по критерию запаса работоспособности // Проблемы управления. – 2007. – № 6. – С.64-69.
4. *Абрамов О.В., Здор В.В., Супоня А.А.* Допуски и номиналы систем управления. – М.: Наука, 1976.
5. *Абрамов О.В., Катуева Я.В.* Использование технологии параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации // Проблемы управления. – 2003. – №4. – С.11–15.
6. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973.
7. *Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А.* Метод статистических испытаний. – М.: Наука, 1961.
8. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение/пер. с англ. – М.: Мир, 1989.
9. *Липский В.* Комбинаторика для программистов/пер. с польского. – М.: Мир, 1988.
10. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003.
11. *Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Алгоритмы анализа области работоспособности, заданной в матричной форме // Информатика и системы управления. – 2005. – №2(10). – С.118–128.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:
Катуева Ярослава Владимировна – gloria@iacp.dvo.ru;
Аноп Михаил Федорович – krondor@gmail.com.