Моделирование систем
2011. №3(29)

УДК 519.8

© 2011 г. **А.И. Абакумов**, д-р физ.-мат. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОПУЛЯЦИЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ [1]

Рассматривается задача оптимального управления распределенной популяцией. Параметрами распределения могут служить характеристики географического положения, морфологии или физиологии. Предложен метод проверки решения на оптимальность для нелинейных задач с помощью системы оптимальности.
Ключевые слова: математическая модель, оптимальное управление, сбор урожая, динамика биомассы.

Введение

Природные популяции подвергаются антропогенным воздействиям разных видов, среди которых наиболее частыми являются загрязнение [1] и сбор урожая [2 – 3]. Динамика популяций под воздействием управления модельно может описываться задачами оптимального управления над системами дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений разного вида [4 – 6]. Математическая теория оптимального управления развита достаточно сильно [7, 8], в том числе и для дифференциальных уравнений [9]. В применении к биологическим системам подобные задачи чаще всего существенно нелинейны, что создает трудности в применении существующих методов при исследовании проблем допустимых и оптимальных решений. В этой ситуации полезны различные соображения в направлении поиска оптимальных решений. Один из таких вариантов рассматривается в данной работе.

Постановка задачи

Состояние популяции описывается плотностью биомассы (численности) $y(t,x)$ по множеству D изменения пространственной переменной x и по времени t, $t \in \mathrm{T} = [0,T]$. Переменная x означает моделируемые характеристики особей. Это могут быть характеристики пространственного расположения, физиологического состояния организмов и многое другое.

[1] Работа поддержана грантом ДВО РАН по программе №14 фундаментальных исследований Президиума РАН, проект № 09-I-П2-02.

Динамика плотности биомасс описывается уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial t} + div(vy) = \Delta(y) + F(t,x,u,y), \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях

$$y(0,x) = y_0(x), \quad y(t,x)\big|_{x\in\partial D} = y_1(t,x). \tag{2}$$

Дивергенция $div(vy)$ определяет направленный перенос биомасс в множестве D пространственных переменных, вектор $v=v(t,x)$ означает скорость направленного переноса. Оператор Δ описывает диффузионные процессы и имеет вид

$$\Delta(y) = div(k\frac{\partial y}{\partial x}),$$

где $k = k(t,x)$ – диагональная матрица коэффициентов диффузии. Система управляется воздействиями, описываемыми скалярной непрерывной функцией $u = u(t,x)$, $u \in U \subset C(\mathrm{T}\times D;R)$. Полезность управления определяется функцией $\varphi(t,x,u,y)$, в качестве критерия оптимизации выставляется максимизация полезности:

$$\int\limits_{\mathrm{T}\times D} j\,(t,x,u,y)dtdx \to \max_{u\in U}. \tag{3}$$

В целом задача собирается в следующую систему математических соотношений:

$$\int\limits_{\mathrm{T}\times D} j\,(t,x,u,y)dtdx \to \max_{u\in U},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + div(vy) = \Delta(y) + F(t,x,u,y), \tag{4}$$

$$y(0,x) = y_0(x),\ y(t,x)\big|_{x\in\partial D} = y_1(t,x).$$

Задачу (4) в дальнейшем будем называть *основной.*

Условия оптимальности для основной задачи

Определим функцию типа функции Лагранжа [8] в виде

$$L(t,x,u,y,l) = j\,(t,x,u,y) + l\,(t,x)F(t,x,u,y), \tag{5}$$

с некоторой функцией $\lambda(t,x)$, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + v\frac{\partial l}{\partial x} + \Delta(l) = -\frac{\partial \overline{L}(t,x,y,l)}{\partial y}, \tag{6}$$

$$l\,(T,x) = 0,\ l\,(t,x)\big|_{x\in\partial D} = 0.$$

Относительно основной задачи (4) будем предполагать выполненными следующие *условия* (*):

область изменения пространственной переменной предполагается замкнутым и ограниченным односвязным множеством $D \subset R^m$ с гладкой границей ∂D. Множество U возможных функций управления предполагается выпуклым и замкнутым;

все заданные и искомые функции непрерывны и обладают гладкостью необходимого порядка;

для каждого допустимого управления *u* дифференциальное уравнение (1) с условиями (2) имеет единственное решение $y(t,x)$, причем функция *y* локально липшицева по переменной *u*, т.е. в каждой окрестности непрерывной допустимой функции *u* выполняется условие Липшица: $\|dy\| \leq M \cdot \|du\|$ при некоторой константе *M* для этой окрестности. Под δy понимается приращение функции *y*, вызванное заданным допустимым приращением δu функции *u*;

функция φ строго вогнута по *u*, а функция *F* линейна по *u* при всех *t, x, y*.

Перейдем к выводу условий оптимальности основной задачи. Обозначим целевой функционал через

$$J(u,y) = \int\limits_{\mathrm{T}\times D} j\,(t,x,u,y)dtdx\,. \qquad (7)$$

Придадим некоторой функции $u(t, x)$ приращение $\delta u(t, x)$. В соответствии с изменением управления согласно уравнению (1) изменится решение с$y(t,x)$ на $y(t, x) + \delta y(t,x)$. Пусть существует функция $\lambda(t,x)$, являющаяся решением задачи (6). Тогда функционал (7) приобретет приращение, которое мы представим в следующем виде:

$$dJ(u,y) = \int\limits_{\mathrm{T}\times D} [dL(t,x,u,y,l\,) - l\,(t,x)dF(t,x,u,y)]dtdx\,. \qquad (8)$$

При этом

$$dy(0,x) = 0, dy(t,x)\big|_{x\in\partial D} = 0\,. \qquad (9)$$

Представим приращение функции (5) в виде:

$$dL(t,x,u,y,l\,) = d_y L(t,x,u+du,y,l\,) + d_u L(t,x,u,y,l\,)\,. \qquad (10)$$

Из условий (*) гладкости функций следует:

$$\begin{aligned} d_y L(t,x,u+du,y,l\,) &= \frac{\partial L(t,x,u+du,y,l\,)}{\partial y} + o(\|dy\|) = \\ &= \frac{\partial L(t,x,u,y,l\,)}{\partial y} + o(\|du\|). \end{aligned} \qquad (11)$$

Последнее равенство получается с использованием третьего условия (*).

Далее из уравнения (1) получаем

$$dF(t,x,u,y) = \frac{\partial(dy)}{\partial t} + div(vdy) - \Delta(dy)\,, \qquad (12)$$

откуда следует

$$\int\limits_{\mathrm{T}\times D} l\,dF(t,x,u,y)dtdx = \int\limits_{\mathrm{T}\times D} [\,l\,\frac{\partial(dy)}{\partial t} + l\,div(vdy) - l\,\Delta(dy)]dtdx\,. \qquad (13)$$

Преобразуем интегралы в последнем выражении. Для первого интеграла с применением условий (6) и (9) получаем:

$$\int\limits_{\mathrm{T}} l\,\frac{\partial(dy)}{\partial t}dt = (\,l\,(dy))\big|_0^T - \int\limits_{\mathrm{T}} \frac{\partial\,l}{\partial t}dydt = -\int\limits_{\mathrm{T}} \frac{\partial\,l}{\partial t}dydt\,\,. \qquad (14)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулой Остроградского [10]:

$$\int_D div(vdy)dx = \int_{\partial D} (vdy)\big|_h \, ds \ .$$

Последнее подынтегральное выражение – это проекция $(v\delta y)$ на внешнюю нормаль η к ∂D, $d\sigma$ – дифференциальный элемент поверхности ∂D. Отсюда по условиям (9) получаем:

$$\int_D div(vdy)dx = 0 .$$

При этом (здесь и далее в необходимых случаях используется скалярное произведение и умножение матриц)

$$div(\, l\,(vdy)) = (v\frac{\partial l}{\partial x})dy + \, l \; div\,(vdy) .$$

Отсюда следует:

$$\int_D div(vdy)dx = -\int_D (v\frac{\partial l}{\partial x})dydx. \qquad (15)$$

Аналогично преобразуем слагаемое с диффузией. Из условий (6) следует:

$$\int_D div\left(\; l\,k\frac{\partial(dy)}{\partial x} \right)dx = 0 .$$

Вместе с тем справедливо следующее равенство:

$$div(\, l\,k\frac{\partial(dy)}{\partial x}) = \frac{\partial l}{\partial x}\cdot(k\frac{\partial(dy)}{\partial x}) + \, l \; div(k\frac{\partial(dy)}{\partial x}) .$$

Это приводит к формуле:

$$\int_D l\; \Delta(dy)dx = \int_D l\; div(k\frac{\partial(dy)}{\partial x})dx = -\int_D [\frac{\partial l}{\partial x}\cdot(k\frac{\partial(dy)}{\partial x})]dx .$$

Далее по формуле Остроградского с использованием условий (9) получаем:

$$\int_D div(\frac{\partial l}{\partial x}kdy)dx = \int_{\partial D} (\frac{\partial l}{\partial x}kdy)\bigg|_h \; ds \; = 0 .$$

Учитывая диагональность матрицы k, аналогично предыдущему получаем формулу:

$$div(\frac{\partial l}{\partial x}kdy) = (\frac{\partial l}{\partial x}k\frac{\partial(dy)}{\partial x}) + div(\frac{\partial l}{\partial x}k)dy .$$

Отсюда следует соотношение

$$\int_D [\frac{\partial l}{\partial x}\cdot(k\frac{\partial(dy)}{\partial x})]dx = -\int_D div(\frac{\partial l}{\partial x}k)dydx .$$

С учетом диагональности матрицы k это означает выполнение равенства

$$\int_D l\; \Delta(dy)dx = \int_D \Delta(\, l\,)dydx . \qquad (16)$$

Подставляем формулы (14) – (16) в формулу (13) и получаем окончательное соотношение для начальных интегралов

$$\int_{T\times D} l\,dF(t,x,u,y)dtdx = -\int_{T\times D} [\frac{\partial l}{\partial t} + v\frac{\partial l}{\partial x} + \Delta(\, l\,)]dydtdx . \qquad (17)$$

Тогда соотношение (8) с учетом условий (6), преобразования (11) и формулы (17) принимает вид:

$$dJ(y,u) = \int\limits_{\mathrm{T}\times D}[d_u L(t,x,u,y,l) + o(\|du\|)]dtdx. \qquad (18)$$

Отсюда следует, что для максимизации функционала (3) достаточно максимизировать функцию (5) Лагранжа по переменной *u*.

Теорема. Пусть для основной задачи (4) выполняются *условия* (*). Если для пары функций $(\bar{u},\bar{y})$ существует функция $l(t,x)$, которая вместе с функциями $(\bar{u},\bar{y})$ выполняет следующую систему оптимальности

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + div(v\bar{y}) = \Delta(\bar{y}) + F(t,x,\bar{u},\bar{y}),\\
&\frac{\partial l}{\partial t} + v\frac{\partial l}{\partial x} + \Delta(l) = -\frac{\partial L(t,x,\bar{u},\bar{y},l)}{\partial y},\\
&\bar{y}(0,x) = y_0(x), \quad \bar{y}(t,x)\Big|_{x\in\partial D} = y_1(t,x),\\
&l(T,x) = 0, \quad l(t,x)\Big|_{x\in\partial D} = 0,\\
&\bar{u}(t,x) = \arg\max_{u\in U} L(t,x,u,\bar{y},l),
\end{aligned} \qquad (19)$$

то найденная пара функций $(\bar{u},\bar{y})$ является оптимальным решением задачи (4).

Следует отметить, что эта теорема не указывает на существование и способ поиска кандидата в оптимальные решения и, тем более, не указывает способа поиска решения системы оптимальности (19).

В частном случае отсутствия диффузии задача принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathrm{T}\times D} j(t,x,u,y)dtdx \to \sup_{u\in U},\\
&\frac{\partial y}{\partial t} + div(vy) = F(t,x,y,u),\\
&y(0,x) = y_0(x).
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему получаем достаточные условия оптимальности как частный случай системы оптимальности (19):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + div(v\bar{y}) = F(t,x,\bar{u},\bar{y}),\\
&\frac{\partial l}{\partial t} + v\frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{\partial L(t,x,\bar{u},\bar{y},l)}{\partial y},\\
&\bar{y}(0,x) = y_0(x),\\
&l(T,x) = 0,\\
&\bar{u}(t,x) = \arg\max_{u\in U} L(t,x,u,\bar{y},l).
\end{aligned}$$

Поиск оптимального решения сводится к системе двух квазилинейных уравнений первого порядка.

Управление популяцией с дифференциацией особей по линейному размеру

Изложенный метод решения задачи оптимального управления можно приложить к оптимизации рыбного промысла. Для рыб одной из важных и легко определяемых характеристик является линейный размер особи. Примем x за такой размер. В этом случае множество D представляет собой промежуток $D=[0,\bar{x}]\subset R$. Функция v характеризует скорость роста, вид такой функции постулируется ихтиологами в рамках теории рыболовства [11]. Коэффициент диффузии определяет разброс при росте особи, его можно принять равным константе. Функция F определяет локальное изменение биомассы, соответствующие функции предлагает математическая экология [12]. Если речь идет о задаче оптимизации промысла по объему собираемой биомассы, то функция φ полезности промысла является строго вогнутой по функции интенсивности промысла, которая и является управляющей функцией u. Тогда задача принимает вид:

$$\int_{\mathrm{T}\times D} j\,(t,x,u,y)dtdx \to \sup_{u\in U},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial (vy)}{\partial x}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+F(t,x,u,y),$$

$$y(0,x)=y_0(x),$$

$$y(t,0)=y_1(t),$$

$$y(t,\bar{x})=y_2(t).$$

Наши расчеты показывают, что применение системы оптимальности (19) в этом случае позволяет вычислительно найти оптимальный режим сбора урожая. Решение этой задачи определяет оптимальные стратегии промысла как во времени, так и по размерам промышляемых рыб. Дальнейшая детализация этой задачи позволит найти оптимальные технические характеристики орудий лова и технологические характеристики стратегии промысла. К сожалению, в настоящее время рыбный промысел в России находится в таком состоянии, что подобные проблемы не пользуются вниманием специалистов по рыбному промыслу.

Заключение

Система оптимальности (19) позволяет проверять решения основной задачи на оптимальность, но оставляет «за кадром» поиск кандидатов в оптимальные решения. В то же время система оптимальности работает достаточно эффективно в сравнительно простых случаях. Например, решение задач оптимизации рыбного промысла показало эффективность использования предложенной системы оптимальности.

Создание системы оптимальности подобным способом может быть реализовано и для многомерных биосистем, т.е. биологических сообществ. Управление в сообществах более разнообразно, математические описания процессов управления сложнее, интереснее в исследовании и применении. Решение задач оптимального управления в сообществах и экосистемах осуществляется при разработке стратегий рационального природопользования.

.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Йоргенсен С.Э.* Управление озерными экосистемами. – М.: Агропромиздат. 1985.
2. *Свирежев Ю.М., Елизаров Е.Я.* Математическое моделирование биологических систем // Проблемы космической биологии. – М.: Наука, 1972.
3. *Абакумов А.И.* Оптимальный сбор урожая в моделях популяций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1. – Вып. 6. – С.834-849.
4. *Abakumov A.I.* Optimal harvesting in populations // Дальневосточный математический сборник. – Владивосток: Дальнаука, 1996. – Вып. 2. – С.5-10
5. *Ainseba B., Anita S., Langlais M.* Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamics model // Electronic journal of differential equations. – 2002. – N 28. – P.1-9. URL: http://ejde.math.unt.edu.
6. *Ouedraogo A., Traore O.* Optimal control for a nonlinear population dynamics problem // Portugaliae mathematica. – 2005. – V. 62. – F.2 – P.217-229.
7. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
8. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
9. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976.
11. *Рикер У.Е.* Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. – М.: Пищевая промышленность, 1979.
12. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука. 1978.

E-mail:
Абакумов Александр Иванович – abakumov@iacp.dvo.ru.

УДК 621.3.01, 519.6

© 2011 г. **Н.В. Киншт**, д-р техн. наук,
Н.Н. Петрунько, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассматривается кванторная интерпретация интервального описания параметров и режимов электрических цепей, основанная на современных тенденциях математической теории интервального анализа.

Ключевые слова: электрические цепи, интервальный анализ, кванторные формализации.

Введение

Адекватное математическое моделирование технического состояния электротехнических устройств и систем является важнейшей компонентой методов его диагностики. Эффективность алгоритмов и программ анализа и диагностики,