.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Йоргенсен С.Э.* Управление озерными экосистемами. – М.: Агропромиздат. 1985.
2. *Свирежев Ю.М., Елизаров Е.Я.* Математическое моделирование биологических систем // Проблемы космической биологии. – М.: Наука, 1972.
3. *Абакумов А.И.* Оптимальный сбор урожая в моделях популяций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1. – Вып. 6. – С.834-849.
4. *Abakumov A.I.* Optimal harvesting in populations // Дальневосточный математический сборник. – Владивосток: Дальнаука, 1996. – Вып. 2. – С.5-10
5. *Ainseba B., Anita S., Langlais M.* Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamics model // Electronic journal of differential equations. – 2002. – N 28. – P.1-9. URL: http://ejde.math.unt.edu.
6. *Ouedraogo A., Traore O.* Optimal control for a nonlinear population dynamics problem // Portugaliae mathematica. – 2005. – V. 62. – F.2 – P.217-229.
7. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
8. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
9. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976.
11. *Рикер У.Е.* Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. – М.: Пищевая промышленность, 1979.
12. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука. 1978.

E-mail:
Абакумов Александр Иванович – abakumov@iacp.dvo.ru.

УДК 621.3.01, 519.6

© 2011 г. **Н.В. Киншт**, д-р техн. наук,
Н.Н. Петрунько, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассматривается кванторная интерпретация интервального описания параметров и режимов электрических цепей, основанная на современных тенденциях математической теории интервального анализа.

Ключевые слова: электрические цепи, интервальный анализ, кванторные формализации.

Введение

Адекватное математическое моделирование технического состояния электротехнических устройств и систем является важнейшей компонентой методов его диагностики. Эффективность алгоритмов и программ анализа и диагностики, базирующихся на фундаментальной теории электрических цепей (ЭЦ) и ее раздел – диагностика электрических цепей (ДЭЦ), определяется в заметной мере современными достижениями математической теории интервального анализа. Следует специально подчеркнуть, что, имея дело с реальными задачами теории электрических цепей и диагностикой реальных электротехнических устройств, исследователи и специалисты сталкиваются с ошибками измерений и неточностью другой информации, т.е. интервальными исходными данными, специфическими для конкретной задачи. Одной из характерных задач технической диагностики, в частности диагностики электрических цепей, является интервальная неопределенность в задании численных параметров задачи.

Проблемы интервальной теории цепей

Вопросы интервальной неопределенности анализировались в [1], где задачи ДЭЦ представлены в виде задач линейного (и линейного параметрического) программирования.

Для задач теории электрических цепей обсуждение таких возможностей дано, например, в [2, 3]. Попытки сформулировать общие принципы интервального анализа объектов, исследование которых может производиться в терминах теории электрических цепей, предпринимались как отечественными исследователями, так и за рубежом. Однако на этом пути возникает ряд трудностей, зачастую – пока не преодоленных. Выяснилось, что применение классической интервальной арифметики недостаточно конструктивно и что необходимо искать некие общие подходы к решению таких задач.

Опыт теории ЭЦ свидетельствует, что при всякой новой формализации задачи возникают как новые возможности, так и новые проблемы в схемном представлении ЭЦ идеализированными моделями в применении традиционных методов решения задач.

Применительно к теории ЭЦ, имея в виду ЭЦ постоянного тока или соответствующие схемы замещения, приведенные к алгебраическим уравнениям в действительной области, можно сформулировать в общей матрично-интервальной форме следующую полную систему уравнений ЭЦ как обобщенную задачу анализа:

$$\begin{aligned} &\mathbf{DI} = \mathbf{DJ}, \\ &\mathbf{BU} = \mathbf{BE}, \\ &\mathbf{U} = \mathbf{ZI}, \end{aligned} \tag{1}$$

где **D** и **B** – матрицы сечений и контуров ЭЦ; **E** и **J** – интервальные матрицы источников э.д.с. и источников токов ЭЦ; **U** и **I** – интервальные матрицы напряжений и токов ветвей ЭЦ; **Z** – интервальная матрица пассивных параметров ветвей.

При необходимости нетрудно добавить в модель ЭЦ описание зависимых источников. Теория ЭЦ в значительной степени заключена в использовании идей и способов планомерных преобразований, основанных на приведенной полной системе уравнений. Обращение с интервальными системами линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) имеет свою специфику. Ниже рассмотрим вопросы, касающиеся априорной интерпретации интервальности исходных данных.

Кванторная интерпретация интервальных параметров

Исследователи при формализации своих задач стоят перед проблемой выбора математического аппарата, наиболее, по их мнению, перспективного и приспособленного к отысканию приемлемого решения. Как только мы отдаем себе отчет в том, что задача имеет интервальный характер, сразу же возникает желание использовать формализмы математической теории интервального анализа. В теории решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений, развитой С.П. Шарым [4, 5] (ИВТ СО РАН), существенную роль играют построения формулировок задач, основанные на логике кванторов всеобщности и существования. Обоснованная формулировка соответствующих кванторов закладывается в алгоритм решения задачи. Поскольку интервальность задания параметров ДЭЦ имеет различную физическую, техническую и ситуативную природу, важно отметить, что содержательная постановка задач анализа и диагностики электрических цепей также должна ситуативно опираться на соответствующие предикаты. Сама содержательная природа интервальности исходных данных (например, о режимах работы электрических цепей) может иметь различную природу. Так, если имеется в виду, что ЭЦ должна нормально функционировать при вариации температуры в некоторых пределах изменения, то явно подразумевается использование квантора всеобщности – «для всякого значения параметров», в данном интервале должен сохраняться приемлемый режим. Наоборот, если известно, что эксперимент производился при некоторой неизменной температуре (например, «комнатной»), то следует применить квантор существования – «температура была некоторая – одна около 20^0С». Другой пример: если при экспериментальном исследовании ЭЦ произведено одно измерение напряжения в ней, то речь идет о том, что «найдется одно значение напряжения» в пределах точности измерений, которое реально существовало в момент измерений.

Таким образом, необходимо логически и технически анализировать источники данных, используемых при расчетах ЭЦ, и вырабатывать соответствующие правила формализации практических интервальных задач. В этой связи вводится два вида неопределенности для интервальных переменных. А-неопределенности соответствует выражение $\forall x \in \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, где $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ – интервальная переменная, заданная своими верхней и нижней границами; в данном случае подразумевается, что все математические выражения, в которые входит эта переменная, должны быть справедливы для любого ее значения из этого интервала. Е-неопределенности соответствует выражение $\exists x \in \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$; здесь все математические выражения, в которые входит эта переменная, должны быть справедливы хотя бы для одного ее значения из этого интервала.

Применительно к параметрам режимов и элементов ЭЦ интервальность их можно интерпретировать следующим образом. Выражение

$$\forall E_i \in \mathbf{E}_i \qquad (\forall J_i \in \mathbf{J}_i)$$

означает "для любого значения i-го источника э.д.с. (тока) из интервального множества $\boldsymbol{E}_i$ ($\boldsymbol{J}_i$)", т.е. означает реальную вариацию источников в наблюдаемом процессе (на множестве моментов времени жизни ЭЦ) или же на множестве экземпляров ЭЦ.

Выражение

$\forall U_i \in \mathbf{U}_i \qquad (\forall I_i \in \mathbf{I}_i)$

может означать один из следующих вариантов:

для любого значения измеренного i-го напряжения (тока) из интервального множества $\boldsymbol{U}_i$ ($\boldsymbol{I}_i$) реальное измерение напряжения (тока) произведено с гарантированной ошибкой (неопределенностью), обусловливающей интервальность этого измерения, и нет возможности сузить этот интервал;

имеются реальные ограничения на вариацию i-го напряжения в наблюдаемом процессе (на множестве моментов времени жизни ЭЦ) или на множестве экземпляров ЭЦ, технологически обусловленные электрическим режимом применения ЭЦ, причем допускаются реальные возможности достижения границ этого интервала.

Выражение

$\exists E_i \in \mathbf{E}_i \qquad (\exists J_i \in \mathbf{J}_i)$

означает "для некоторых (хотя бы одного) значений i-го источника из интервального множества $\boldsymbol{E}_i$ ($\boldsymbol{J}_i$)", имевших место в наблюдаемом процессе (на множестве моментов времени жизни ЭЦ).

Выражение

$\exists U_i \in \mathbf{U}_i \qquad (\exists I_i \in \mathbf{I}_i)$

означает, что данное напряжение (ток), в противовес к сказанному выше не измерялось, имеет некоторые естественные априорно заданные границы, наблюдаемый процесс контролировался, и, следовательно, заведомо известно, что оно не вышло за интервальные границы $\boldsymbol{U}_i$ ($\boldsymbol{I}_i$).

Выражение

$\forall Z_i \in \mathbf{Z}_i$

означает, что значения параметра Z_i реально изменялись (или могли измениться) в наблюдаемом процессе вплоть до интервальных границ и что речь об уточнении их значений не идет.

Выражение

$\exists Z_i \in \mathbf{Z}_i$

означает, что значения параметра Z_i реально не могли выйти за пределы, обусловленные интервальными границами, эти интервальные границы Z_i являются лишь априорными ограничениями. При этом в контексте диагностики ЭЦ реально может ставиться задача уточнения этих значений, т.е. может формулироваться задача диагностики параметра Z_i или, по крайней мере, исследоваться задача об уточнении взаимосвязей U_i и I_i.

В этой связи современными математиками разработаны соответствующие теоретико-множественные и кванторные формализации, исследованы математические свойства решений интервальных систем алгебраических уравнений (ИСЛАУ) как минимаксных (максиминных) задач.

Разработаны алгоритмы решения ИСЛАУ. Показано, что при некоторых вариантах кванторного описания задач ИСЛАУ эти описания соответствуют различным формализациям описания технических задач (например, формализации описания вписанного в множество решений или же описанного вокруг множества решений гиперпараллепипеда).

Кванторное описание множества решений

В теории интервального анализа сформулированы различные кванторные описания множества решений интервальных задач [4, 5]. Перечислим некоторые из них.

Объединенное множество решений (united solution set) образовано решениями всех точечных систем

$$F(a,b) = b, a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b},$$

$$\Sigma_{\exists\exists}(F,\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a,x) = b)\}.$$

Проиллюстрируем это выражение с помощью линейного уравнения 1-го порядка **A**x = **b** (рис. 1а).

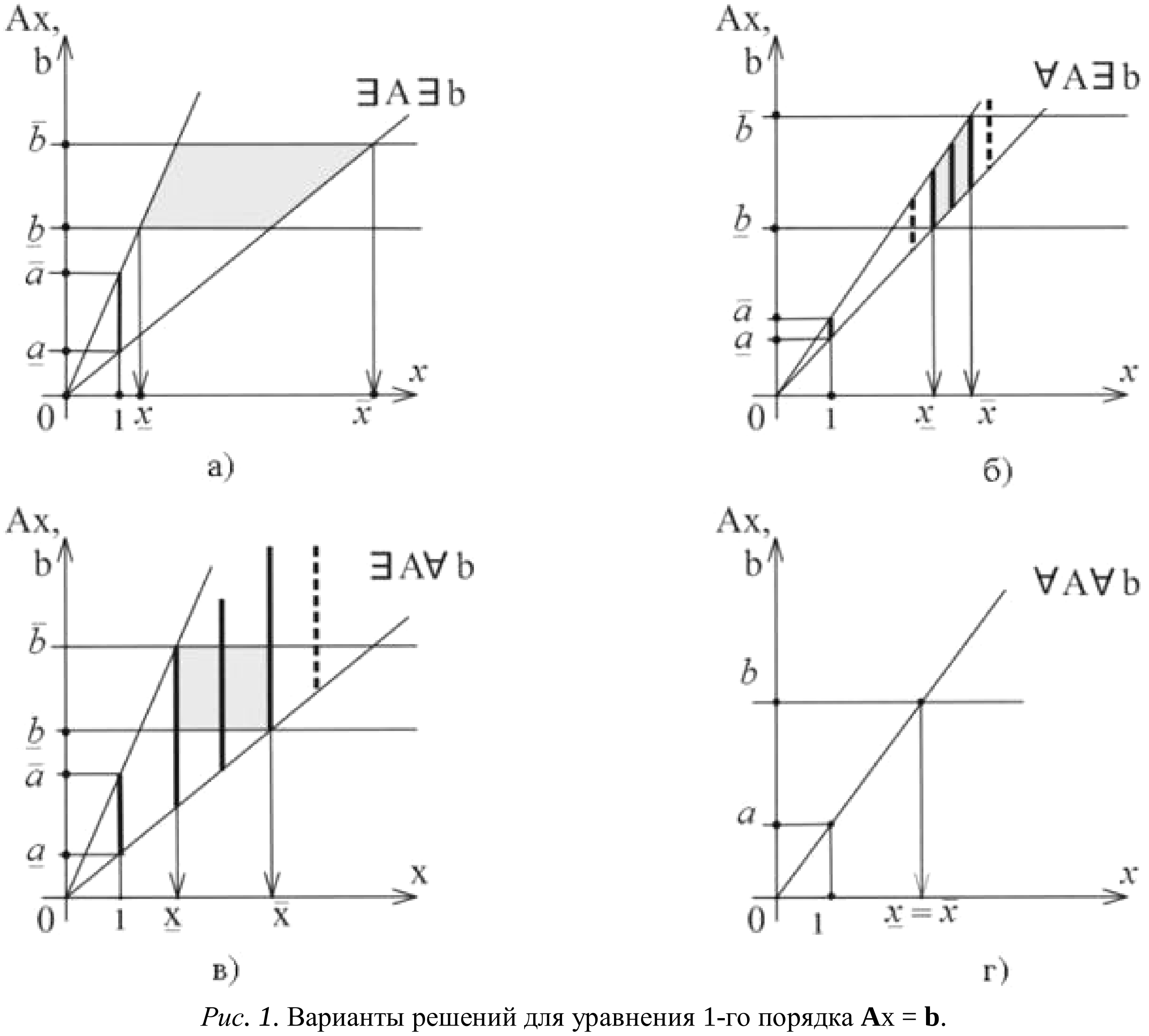

Рис. 1. Варианты решений для уравнения 1-го порядка **A**x = **b**.

Интервальная матрица 1-го порядка $\mathbf{A} = [\underline{a}, \overline{a}]$ задает ограничения в виде сектора возможных решений, а интервальный вектор 1-го порядка правых частей $\mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ задает ограничения в виде горизонтальной полосы. Поэтому множество возможных решений $[\underline{x}, \overline{x}]$ представляет собой проекцию пересечения этих ограничений. Если уравнение **A**x = **b** ассоциируется с ограничениями вида $(\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})$, можно говорить о ЕЕ-типе уравнения.

Допустимое решение (tolerable solution set) системы **A**x=**b** образовано всеми такими векторами $x \in \mathrm{R}^n$, что $F(a,x) \in \mathbf{b}$ для любого $a \in \mathbf{a}$, т.е. множество

$$\sum\nolimits_{\forall\exists}(F, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ x \in \mathrm{R}^n \middle| (\forall a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a,x) = b) \right\},$$

изображенное на рис. 1б.

Иначе говоря, решениями уравнения могут быть только такие значения x, чтобы для любого a нашлось подходящее значение правой части b. (Пунктиром на рис. 1б. показаны множества решений для значений x, которые не обеспечивают удовлетворения уравнения для всех a). В данной ситуации говорят о АЕ-типе уравнения.

Управляемое множество решений (controllable solution set) системы **A**x = **b**:

$$\sum\nolimits_{\exists\forall}(F, \mathbf{a}, \mathrm{b}) = \left\{ x \in R^n \middle| (\forall b \in \mathrm{b})(\exists a \in \mathbf{a})(F(a,x) = b) \right\}$$

(рис 1в), образованное всеми такими $x \in \mathrm{R}^n$, что для любого желаемого $b \in \mathbf{b}$ можно подобрать соответствующий $a \in \mathbf{a}$ со свойством $F(a,x) \in b$. Здесь говорят о ЕА-типе уравнения.

Формальное решение. Интервальный вектор **X** называется формальным решением системы **A**x=**b**, если его подстановка в систему и выполнение всех операций по правилам интервальной арифметики приводит к верному результату. Вектор **X** является *точечным* формальным решением тогда и только тогда, когда он является и допустимым, и управляемым решением (рис. 1г). Здесь говорят о АА-типе уравнения.

Ясно, что в общем случае для ИСЛАУ порядка n, описанной с помощью (n^2+n) чисел, существует соответственно 2^{n^2+n} кванторных интерпретаций. Заранее можно сказать, что, по-видимому, многие из них имеют пустые множества возможных решений. Задача диагностики ЭЦ не вписывается полностью в известные математические формализации ИСЛАУ и требует специальных теоретических исследований.

Обратим внимание на одну особенность сформулированных выше задач. При интерпретации ИСЛАУ **A**x = **b** как модели линейной системы в теории управления подразумевается, что ***x*** – это входное воздействие, **A** – матрица преобразования входного воздействия, а **b** – сигнал на выходе системы. В то же время при записи уравнений ЭЦ, подлежащей анализу, подразумевается, что в правой части фигурируют источники, т.е. входные воздействия для ЭЦ (источники э.д.с. ***E*** и тока ***J***), **A** – матрица параметров ЭЦ, а ***x*** – это параметры режима (токи ***I*** и напряжения ***U***). Поэтому применительно к анализу интервальной ЭЦ приведенные выше ситуации, иллюстрированные рис.1.(а-г) следует рассматривать скорее как графические пояснения к решению ИСЛАУ

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

Арифметика Каухера

Как было отмечено выше, классическая интервальная арифметика обладает рядом недостатков. Один из них – ее неполнота, т.е. в результате формального выполнения арифметических действий может быть получен ответ, не имеющий смысла. Другим является наличие ограничений на само выполнение арифметических действий. Исследователями предпринимались попытки модифицировать классическую интервальную арифметику. По-видимому, наиболее плодотворным оказалось обращение к интервальной арифметике Каухера [4, 5]. Не приводя ее в данном контексте, отметим, что основная ее особенность (и привлекательность) заключается в том, что она включает в себя классическую интервальную арифметику как подмножество, позволяя выполнять все 4 арифметические действия. В этом контексте несомненный интерес представляет исследование применимости современных методов решения ИСЛАУ, основанных на арифметике Каухера, к решению практических задач теории цепей. Таких планомерных исследований до настоящего времени не проводилось. Ситуация с современными методами интервального анализа складывается в чем-то аналогично той, когда было изобретено операционное исчисление (преобразование Лапласа). Использование методов преобразования Лапласа дало мощный толчок развитию теории электрических цепей. Здесь имеются в виду, например, такие инструменты теории как операторные схемы замещения, приведение к нулевым начальным условиям и другие. Следует обратить внимание также на то, что инженер Карсон операционное исчисление применял весьма формально, не обращая специального внимания на теоретическое обоснование, однако при этом было сформулировано и решено достаточное количество практических задач, подтвердивших эффективность теории. В этом смысле Карсон пошел формально-экспериментальным путем, очерчивая (нащупывая) круг задач, которые могут быть реально решены с помощью данного математического аппарата.

Представляется, что, опираясь на современные достижения в области интервального анализа, и сегодня можно очертить достаточно конкретный круг новых, интересных и важных задач.

Во-первых, поскольку классическая интервальная арифметика является подмножеством арифметики Каухера, то встает вопрос о границах использования и эффективности последней применительно к реальным интервальным задачам.

Во-вторых, арифметика Каухера оперирует с неправильными интервалами, переходы от неправильных интервалов к правильным используются при различных интерпретациях и критериях решения задач ИСЛАУ, а также в алгоритмах решения ИСЛАУ. Важно выяснить, имеется ли осмысленная интерпретация этих неправильных интервалов применительно к практическим задачам теории цепей либо такие интервалы можно признать лишь вынужденной «технической» добавкой на промежуточных стадиях решения задачи. При предварительном анализе намечаются различные варианты ответа на поставленный вопрос.

Пример

Проиллюстрируем некоторые из изложенных выше положений на примере. Рассмотрим интервальную активную ЭЦ, изображенную на рис. 2.

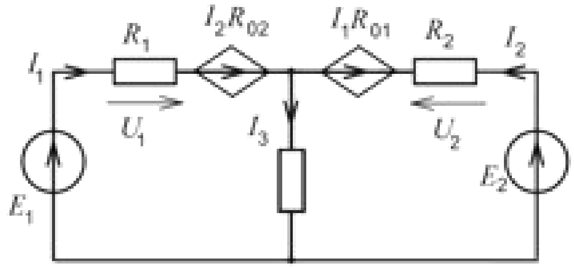

Рис. 2. Пример электрической цепи.

Численные значения параметров ЭЦ (в безразмерных единицах) заданы со следующими значениями:

интервальные резисторы – $R_1 = [1.5, 2]$, $R_2 = [1.5, 2]$, $R_3 = [0.5, 1]$;

интервальные источники э.д.с. – $E_1 = [0, 12]$, $E_2 = [6, 24]$;

параметры интервальных зависимых источников напряжения, управляемых током, – $R_{01} = [0.5, 1]$, $R_{02}= [0, 0.5]$.

Запишем систему уравнений ЭЦ, считая, например, токи I_1 и I_2 контурными:

$$I_1(R_1 + R_3) + I_2(R_3 - R_{02}) = E_1,$$

$$I_1(R_{01} + R_3) + I_2(R_2 + R_3) = E_2.$$

Подставив численные значения, имеем систему уравнений (ИСЛАУ) в виде:

$I_1[2, 3] + I_2[0, 1] = [0, 12]$,

$I_1[1, 2] + I_2[2, 3] = [6, 24]$.

Исследуем области возможных решений этой задачи при различных предположениях относительно кванторных свойств интервальных констант задачи. Теоретически здесь возможны $2^6 = 64$ варианта; рассмотрим 7 из них, сведя эту информацию в таблицу.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7
Кванторное описание системы уравнений	EE E EE E	AE E EE E	EA E EE E	EA E EA E	EA E AA E	EE A EE E	EE E EE A
Границы множества режимов	(1) на рис. 6	(2) на рис. 6	(3) на рис. 6	(4) на рис. 6	(5) на рис. 6	Единств. точка (0,12)	$\varnothing$

Кстати, варианту 1 соответствует *объединенное множество решений*. Решения этих задач и их графическую интерпретацию произведем с помощью программы AEsolset, любезно предоставленной И. Шарой. Вариант 7 не имеет решения, в варианте 6 область решений определяется единственной точкой (0, 12). Для вариантов 1-5 множества решений представлены на рис. 3. Все эти множества изображены в одном и том же масштабе на плоскости (I_1, I_2). Границы множеств (1) и (2) изображены слева, причем копия множества (2) для наглядности вынесена влево за пределы координатной сетки; аналогично, справа на рис. 3 изображены границы множеств (3), (4), (5), а копии множеств (4) и (5) для наглядности вынесены вправо за пределы координатной сетки.

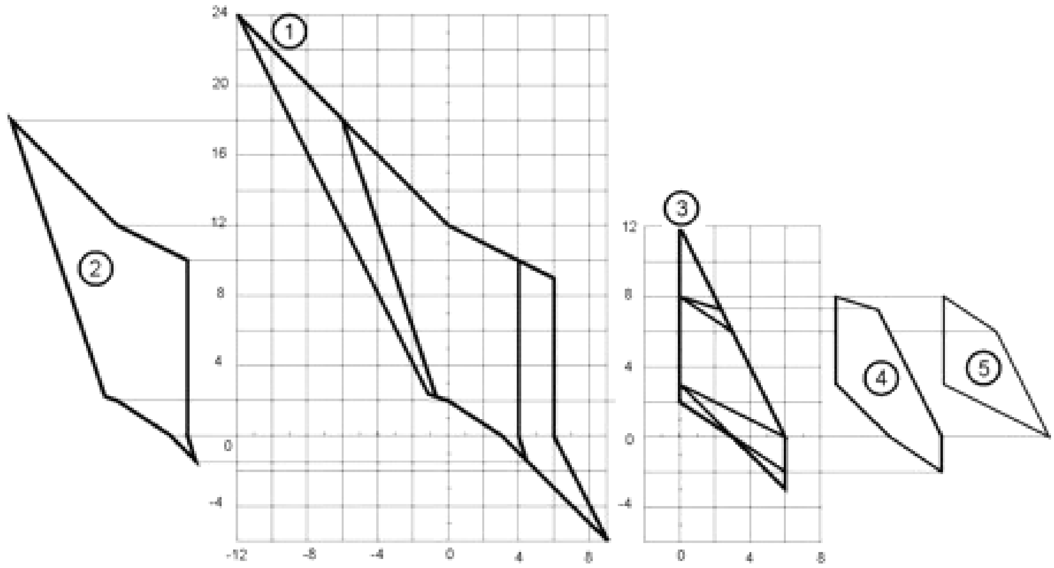

Рис. 3. Множество решений к примеру при различных кванторных формализациях ИСЛАУ.

Заключение

Развитие кванторных формализаций в математической теории интервального анализа открывает новый взгляд на решение задач теории ЭЦ при неопределенности данных. Необходимо логически и технически анализировать источники данных, используемых при расчетах ЭЦ, и вырабатывать соответствующие правила формализации практических интервальных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кинш Н.В., Герасимова Г.Н., Кац М.А.* Диагностика электрических цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
2. *Кинш Н.В., Кац М.А.* Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей // Электричествою. – 1999. – № 10. – С.45-57.
3. *Кинш Н.В., Петрунько Н.Н.* Некоторые особенности анализа электрической цепи с интервально заданными параметрами // Электричество. – 2006. – № 1. – С.49-52.
4. *Шарый С.П.* Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // Вычислительные технологии. – 1997. – Т.2. – № 1.
5. *Shary S.P.* A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity // Reliability Computing. – 2002. – Vol. 8. – № 5. – P.321-418.

E-mail:
Кинш Николай Владимирович – kin@dvo.ru;
Петрунько Наталья Николаевна – pnn@dvo.ru.