УДК 681.3.057.51-7.311.17

© 2011 г. **А.С. Клещев**, д-р физ.-мат. наук,
В.А. Тимченко
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ЗАДАЧА ПРИМЕНЕНИЯ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ РАСШИРЯЕМОЙ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДИАЛЕКТА[1]

Рассмотрена задача применения подстановки для расширяемой модели математического диалекта и приведен алгоритм ее решения. Показано, что повышение уровня языка представления математических знаний, используемого в системах компьютерного доказательства теорем, ведет к заметному усложнению алгоритма применения подстановки.

Ключевые слова: подстановка, математическое утверждение, пропозициональное утверждение, метаматематическое утверждение, предметная переменная, пропозициональная переменная, синтаксическая переменная, модифицированная синтаксическая переменная.

Введение

Одной из базовых операций в системах компьютерного доказательства теорем (автоматических [1] и интерактивных [2, 3]) является применение подстановок к формулам. В случае, когда единственным языком представления математических знаний является язык исчисления предикатов первого порядка, подстановка содержит только предметные переменные, заменяемые термами, а применение подстановки к формуле состоит в текстуальной замене в этой формуле предметных переменных термами [1]. В расширяемой модели математического диалекта [4] математические знания представляются с помощью трех языков – ограниченного языка прикладной логики (языка математических утверждений), а также языка пропозициональной логики и метаязыка (для представления правил вывода). В этом случае подстановка, помимо предметных переменных, может содержать пропозициональные и синтаксические переменные, а результатами применения подстановки не только к математическим, но и к пропозициональным и к метаматематическим утверждениям должны являться математические утверждения. В настоящей работе рассматриваются особенности задачи применения подстановки для этой модели и алгоритм ее решения.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-07-00460-а “Управление сообществами интеллектуальных систем”, и ДВО РАН, проект 09-III-А-01-003 "Разработка операционной модели правильных интуитивных доказательств математических теорем".

Постановка задачи

Способ применения подстановки зависит от вида утверждения, к которому эта подстановка применяется. Формализованные утверждения, к которым может применяться подстановка, могут быть одного из следующих видов:

математическое утверждение – $(v_1: t_1(v_1, \ldots, v_n)) \ldots (v_m: t_m(v_1, \ldots, v_n))$ $(v_{m+1}: t_{m+1}(v_1, \ldots, v_n)) \ldots (v_n: t_n(v_1, \ldots, v_n))\ f(v_1, \ldots, v_n)$, где $f(v_1, \ldots, v_n)$ – математическая формула, содержащая вхождения предметных переменных $v_1, \ldots, v_m$, которые входят в подстановку, а также вхождения предметных переменных $v_{m+1}, \ldots, v_n$, которые не содержатся в подстановке, $(v_i: t_i(v_1, \ldots, v_n))$ ($i = 1, \ldots, n$) – описание предметной переменной v_i, $t_i(v_1, \ldots, v_n)$ – математический терм, значением которого (для $i = m+1, \ldots, n$ – после выполнения подстановки) является множество (область возможных значений переменной v_i);

пропозициональное утверждение – $pf(v_1, \ldots, v_n)$, где $pf(v_1, \ldots, v_n)$ – пропозициональная формула, содержащая вхождения пропозициональных переменных $v_1, \ldots v_n$, каждая из которых входит в подстановку;

метаматематическое утверждение – $(v_1: MT_1(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q})) \ldots (v_m: MT_m(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q}))$ $(v_{m+1}: MT_{m+1}(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q})) \ldots (v_n: MT_n(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q}))\ MF(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q})$, где $MF(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q})$ – метаматематическая формула, содержащая вхождения предметных переменных $v_1, \ldots v_m$, которые входят в подстановку, вхождения предметных переменных $v_{m+1}, \ldots v_n$, которые не содержатся в подстановке, а также вхождения синтаксических переменных $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}$ типа **t**, синтаксических переменных $\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}$ типа **f**, синтаксических переменных $\mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}$ типа **i** и синтаксических переменных $\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q}$ типа **r** (все они входят в подстановку), причем $(v_i: MT_i(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q}))$ ($i = 1, \ldots, n$) – описание предметной переменной v_i, $MT_i(v_1, \ldots, v_n; \mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_k}; \mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s}; \mathbf{i_1}, \ldots, \mathbf{i_p}; \mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_q})$ – метаматематический терм, значением которого (для $i = m+1, \ldots, n$ – после выполнения подстановки) является множество (область возможных значений предметной переменной v_i).

Подстановкой назовем пару $\theta = (\sigma, \upsilon)$, в которой σ есть множество пар вида $\sigma = (v_1 \mid d_1, \ldots, v_m \mid d_m)$, где $v_1, \ldots, v_m$ – переменные, а $d_1, \ldots, d_m$ – значения; υ есть множество (возможно, пустое) описаний предметных переменных, входящих в $d_1, \ldots, d_m$ $\upsilon = (w_1: t_1(w_1, \ldots, w_k)) \ldots (w_k: t_k(w_1, \ldots, w_k))$. При этом в подстановке допускаются переменные следующих видов:

предметные переменные, значениями таких переменных в подстановке являются математические термы. При применении подстановки к утверждению считается, что множество предметных переменных $v_1, \ldots, v_n$ в исходном утверждении и множество предметных переменных $w_1, \ldots, w_k$, содержащихся в υ, не пересекаются;

пропозициональные переменные, значениями таких переменных в подстановке являются математические формулы;

немодифицированные синтаксические переменные, значениями таких переменных в подстановке являются: для типа **f** – математические формулы, для типа

t – математические термы, для типа **r** – вещественные нумералы, для типа **i** – целые нумералы;

модифицированные синтаксические переменные **T** $\vdash$**M₁, …, Mₘ**$\dashv$, **F** $\vdash$**M₁, …, Mₘ**$\dashv$, где $\vdash$**M₁, …, Mₘ**$\dashv$ – модификатор, **M₁, …, Mₘ** – элементы модификатора – метаматематические термы или формулы. Значением в подстановке для **T**(**F**) является математический терм $t \vdash \tau_1, \ldots, \tau_i, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_m \dashv$ (математическая формула $f \vdash \tau_1, \ldots, \tau_i, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_m \dashv$), где $\tau_1, \ldots, \tau_i$ – формальные параметры-метатермы, $\varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_m$ – формальные параметры-метаформулы, причем количество и порядок вхождений τ (φ) в терм t (формулу f) соответствует количеству и порядку вхождений элементов модификатора $\vdash$**M₁, …, Mₘ**$\dashv$ типа метаматематический терм (метаматематическая формула) в модификатор синтаксической переменной **T** (**F**).

Модификатор модифицированной синтаксической переменной не может содержать как непосредственных, так и опосредованных вхождений этой же самой синтаксической переменной.

Подстановка в пропозициональное и метаматематическое утверждения должна быть полной, т.е. в результате применения подстановки к утверждению такого вида, все пропозициональные или синтаксические переменные, входящие в утверждение, должны быть заменены.

Результатом применения подстановки всегда является математическое утверждение вида $(w_1: t_1(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)) \ldots (w_k: t_k(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ $(v_{m+1}: t_{m+1}(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)) \ldots (v_n: t_n(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ $g(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)$. Здесь $(w_1: t_1(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)) \ldots (w_k: t_k(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ $(v_{m+1}: t_{m+1}(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)) \ldots (v_n: t_n(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ – множество описаний предметных переменных, представляющее собой объединение множества υ и множества описаний предметных переменных исходного утверждения, не содержащихся в $\sigma - (v_{m+1}: t_{m+1}(v_1, \ldots, v_n)) \ldots (v_n: t_n(v_1, \ldots, v_n))$; $g(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ – математическая формула, в которой все вхождения переменных $v_1, \ldots, v_m$ из подстановки заменены их значениями $d_1, \ldots, d_m$ и содержащая вхождения предметных переменных $w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n$, $(w_i: t_i(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ ($i = 1, \ldots, k$) – описание предметной переменной w_i, $(v_i: t_i(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n))$ ($i = m+1, \ldots, n$) – описание предметной переменной v_i, $t_i(w_1, \ldots, w_k, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ – математический терм.

Алгоритм выполнения подстановки

<u>Применение подстановки к пропозициональному утверждению.</u> В случае применения подстановки к *пропозициональным утверждениям* при проходе слева направо исходного утверждения:

1. Выполняется обычная текстуальная замена в пропозициональной формуле всех вхождений пропозициональных переменных математическими формулами согласно σ.

2. К результирующему математическому утверждению добавляется множество описаний предметных переменных $\upsilon = (w_1: t_1(w_1, \ldots, w_k)) \ldots (w_k: t_k(w_1, \ldots, w_k))$.

<u>Пример 1.</u> Исходное пропозициональное утверждение, представляющее до-

казательство равносильности [4]:

$(v_1 \Rightarrow v_2)$ & $(v_2 \Rightarrow v_1) \Leftrightarrow (v_1 \Leftrightarrow v_2)$.

Подстановка: $\sigma = (v_1 \mid a \subseteq b \ \&\ b \subseteq a,\ v_2 \mid a = b)$; $\upsilon = (a\colon S)(b\colon S)$.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$(a\colon S)(b\colon S)\ (a \subseteq b \ \&\ b \subseteq a \Rightarrow a = b) \ \&\ (a = b \Rightarrow a \subseteq b \ \&\ b \subseteq a) \Leftrightarrow (a \subseteq b \ \&\ b \subseteq a \Leftrightarrow a = b)$.

Применение подстановки к математическому утверждению. В случае применения подстановки к *математическим утверждениям* простой текстуальной заменой вхождений предметных переменных математическими термами не обойтись. Это связано с тем, что такие утверждения могут содержать множество описаний предметных переменных, а также кванторные конструкции. Алгоритм применения подстановки в данном случае будет следующим.

1. Вначале создается пустой *стек связанных предметных переменных* (*stack*), элементами которого являются *списки предметных переменных*. Каждый такой список переменных (*vars_list*) ставится во взаимно-однозначное соответствие некоторой кванторной конструкции и содержит те переменные, которые присутствуют в описании переменных этой кванторной конструкции. Список переменных добавляется в *stack*, когда встречается очередная кванторная конструкция и удаляется из этого стека, когда обработка этой кванторной конструкции заканчивается.

2. Если в исходном математическом утверждении есть конструкция, представляющая *множество описаний предметных переменных*, то предварительно из этого множества убираются те конструкции, представляющие *описание переменной*, в которых описываемая в ней предметная переменная встречается среди переменных подстановки в σ.

3. Выполняется проход слева направо по исходному утверждению. В процессе прохода:

Если встречается *кванторная конструкция* (*открывающая кванторная скобка*), то

Создается пустой *vars_list*.

Из конструкции, представляющей множество описаний переменных в кванторной конструкции, для каждой конструкции, представляющей описание переменной, извлекается и добавляется в *vars_list* имя описываемой в ней переменной.

После того, как все переменные будут добавлены в *vars_list*, последний помещается в *stack*.

Если встречается *закрывающая кванторная скобка*, то элемент (*vars_list*) удаляется из *stack*.

Если встречается *предметная переменная* (v_i), то

Выполнить поиск v_i во всех списках *vars_list*, содержащихся в *stack*.

Если v_i не найдена ни в одном из этих списков, то

Выполнить поиск v_i среди переменных подстановки в σ.

Если v_i найдена среди переменных σ, то

заменить переменную v_i в исходном утверждении математическим термом (t_i), который сопоставлен найденной в σ переменной.

4. Дополнить множество описаний предметных переменных результирующего утверждения, которое может быть в общем случае пустым, множеством описаний предметных переменных $\upsilon = (w_1: t_1(w_1, \ldots, w_k)) \ldots (w_k: t_k(w_1, \ldots, w_k))$.

Пример 2. Исходное математическое утверждение [5]:

$(v_1: S)(v_2: S)\ v_1 \neq \varnothing\ \&\ v_2 \neq \varnothing \Rightarrow v_1 \to v_2 \neq \varnothing$.

Подстановка: $\sigma = (v_1 \mid I[1, \infty), v_2 \mid R)$; $\upsilon = \varnothing$.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$I[1, \infty) \neq \varnothing\ \&\ R \neq \varnothing \Rightarrow I[1, \infty) \to R \neq \varnothing$.

Пример 3. Исходное математическое утверждение, содержащее кванторную конструкцию [4]:

$(v: I)(\mathring{a}\ (i: I[v, v])\ i) = v$.

Подстановка: $\sigma = (v \mid 0)$; $\upsilon = \varnothing$.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$(\mathring{a}\ (i: I[0, 0])\ i) = 0$.

Применение подстановки к метаматематическому утверждению. Алгоритм применения подстановки к *метаматематическим утверждениям* представляет собой расширение предыдущего алгоритма рассмотрением случаев вхождений немодифицированных и модифицированных синтаксических переменных в исходное утверждение. Опишем далее сам алгоритм, ссылаясь, где это необходимо, на соответствующие пункты алгоритма применения подстановки к математическим утверждениям.

Пункты 1 и 2 совпадают с аналогичными пунктами алгоритма применения подстановки к математическим утверждениям.

3. Выполняется проход слева направо по исходному утверждению. В процессе прохода:

Если встречается *кванторная конструкция* или *предметная переменная*, то выполняются действия, описанные в алгоритме применения подстановки к математическим утверждениям, которые выполняются в аналогичных случаях.

Если встречается *немодифицированная синтаксическая переменная* ($\boldsymbol{v_i}$ типа **f**, **t**, **i** или **r**), то

Получить значение, сопоставленное переменной $\boldsymbol{v_i}$ в σ.

Заменить переменную $\boldsymbol{v_i}$ в исходном утверждении полученным из σ значением – математическим термом t_i (если $\boldsymbol{v_i}$ имеет тип **t**), математической формулой f_i (если $\boldsymbol{v_i}$ имеет тип **f**), целым ($\boldsymbol{v_i}$ имеет тип **i**) или вещественным ($\boldsymbol{v_i}$ имеет тип **r**) нумералом.

Если встречается *модифицированная синтаксическая переменная* (МСП – $\mathbf{T_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$ ($\mathbf{F_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$)), то

3.1. Выполняется *процедура* ***анализа МСП***, осуществляющая построение древовидного представления модифицированной синтаксической переменной $\mathbf{T_i}$ ($\mathbf{F_i}$), т.е. иерархической структуры, описывающей порядок вхождений элементов модификатора в $\mathbf{T_i}$ ($\mathbf{F_i}$) вплоть до вхождений метатермов/метаформул, не содержащих, в свою очередь, вхождений модифицированных синтаксических переменных, а значит являющихся терминальными вершинами формируемого дерева.

Текстовое и соответствующее ему структурное представления модифицированной синтаксической переменной продемонстрированы далее (см. пример 5).

3.2. Выполняется *процедура* ***синтеза значения МСП***, осуществляющая обход построенного древовидного представления, начиная с корневой вершины, переданной ей в качестве аргумента, и формирование в процессе обхода результирующей строки, представляющей математический терм или формулу, которая должна быть подставлена в исходное утверждение вместо $\mathbf{T_i}$ ($\mathbf{F_i}$).

Заменить переменную $\mathbf{T_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$ ($\mathbf{F_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$) в исходном утверждении значением, полученным в результате выполнения *процедуры* ***синтеза значения МСП***.

Пункт 4 совпадает с аналогичным пунктом алгоритма применения подстановки к математическим утверждениям.

Приведем описание двух процедур, упомянутых в алгоритме.

Процедура ***анализа МСП***

Вход:

текстовое представление МСП.

Выход:

структурное представление МСП.

Описание работы:

начало

Создается пустой *стек*, элементами которого являются модифицированные синтаксические переменные. Переменная добавляется в *стек*, когда встречается *открывающая скобка модификатора* и удаляется из *стека*, когда встречается *закрывающая скобка модификатора*.

Выполняется проход слева направо по текстовому представлению модифицированной синтаксической переменной. В процессе прохода:

Если встречается *МСП* – $\mathbf{T_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$ ($\mathbf{F_i} \vdash \mathbf{M_1, \ldots, M_m} \dashv$), то

начало

Если *стек* не *пуст*, то сделать $\mathbf{T_i}$ ($\mathbf{F_i}$) значением нетерминальной вершины в структурном представлении МСП и добавить вершину к прямым потомкам МСП, находящейся на вершине *стека*.

Иначе сделать $\mathbf{T_i}$ ($\mathbf{F_i}$) корневой вершиной в структурном представлении МСП.

конец

Если встречается *открывающая скобка модификатора*, то начало

Поместить стоящую перед этой скобкой МСП в *стек*.

Если за *открывающей скобкой модификатора* следует *не* МСП, то

начало

Взять подстроку от *открывающей скобки модификатора* до *закрывающей скобки модификатора* или *разделителя элементов модификатора*.

Сделать эту подстроку значением терминальной вершины в структурном представлении МСП и добавить вершину к прямым потомкам МСП, находящейся на вершине *стека*.

конец

конец

Если встречается *разделитель элементов модификатора*, то

начало

Если за *разделителем элементов модификатора* следует *не* МСП, то

начало

Взять подстроку от *разделителя элементов модификатора* до *закрывающей скобки модификатора* или следующего *разделителя элементов модификатора*.

Сделать эту подстроку значением терминальной вершины в структурном представлении МСП и добавить вершину к прямым потомкам МСП, находящейся на вершине *стека*.

конец

конец

Если встречается *закрывающая скобка модификатора*, то извлечь МСП из *стека*.

конец (процедуры *анализа МСП*)

Процедура ***синтеза значения МСП***

Вход:

vertex – вершина в структурном представлении МСП (при первом вызове это корневая вершина).

number – порядковый номер вершины *vertex* как потомка некоторой родительской вершины (он совпадает с номером элемента модификатора МСП) – целое неотрицательное число (при первом вызове 0).

Выход:

value – значение МСП – текстовое представление математической формулы (математического терма).

Описание работы:

начало

Если *vertex* является *нетерминальной* вершиной, то

начало

Получить из σ значение (*value*), сопоставленное МСП (***v***), представленной вершиной *vertex* – математический терм *t* (если ***v*** имеет тип **t**) или математическую формулу *f* (если ***v*** имеет тип **f**).

Цикл по потомкам вершины *vertex*

начало

curr_vertex = текущий потомок вершины *vertex*.

number = порядковый номер *curr_vertex*.

new_value = вызов *процедуры* ***синтеза значения МСП*** с аргументами *curr_vertex* и *number*.

Заменить в *value* все вхождения формального параметра τ_i (φ_i), индекс i которого совпадает с *number*, на *new_value*.

конец (цикла по потомкам вершины *vertex*)

Выйти из *процедуры*, вернув *value*.

конец (*vertex* является *нетерминальной* вершиной)

Иначе (*vertex* является *терминальной* вершиной)

начало

Значением такой вершины является строка, представляющая метатерм/метаформулу, которая не содержит вхождений модифицированных синтаксических переменных.

Выполняется проход слева направо по метатерму/метаформуле. В процессе прохода:

Если встречается *кванторная конструкция*, *предметная переменная* или *немодифицированная синтаксическая переменная* (типа **f**, **t**, **i** или **r**) то выполняются действия, описанные выше в алгоритме применения подстановки к метаматематическим утверждениям, которые выполняются в аналогичных случаях.

new_value = результирующая модифицированная строка, представляющую математической формулу (математический терм).

Выйти из *процедуры*, вернув *new_value*.

конец (*vertex* является *терминальной* вершиной)

конец (процедуры *синтеза значения МСП*)

Пример 4. Исходное утверждение – метаматематическая аксиома:

$\boldsymbol{i} \in I$ [5].

Подстановка: $\sigma = (\boldsymbol{i} \mid 1)$; $\upsilon = \varnothing$.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$1 \in I$.

Пример 5. Исходное утверждение – метаматематическая аксиома, представляющая принцип замены равных термов в формулах (данный пример взят из работы [5]):

$\boldsymbol{t_1} = \boldsymbol{t_2}\ \&\ \boldsymbol{f} \vdash \boldsymbol{t_1} \dashv\ \Rightarrow \boldsymbol{f} \vdash \boldsymbol{t_2} \dashv$.

Подстановка: $\sigma = (\boldsymbol{t_1} \mid I[1, \infty) \to R,\ \boldsymbol{t_2} \mid$ *последовательности*, $\boldsymbol{f} \mid t_1 \neq \varnothing)$; $\upsilon = \varnothing$.

Результат применения подстановки – математическое утверждение:

$I[1, \infty) \to R =$ *последовательности* $\&\ I[1, \infty) \to R \neq \varnothing \Rightarrow$ *последовательности* $\neq \varnothing$.

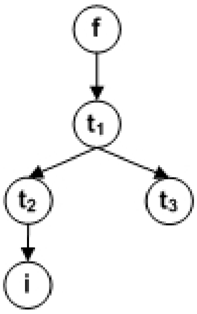
Пример 6. Исходное утверждение – метаматематическая аксиома, описывающая свойство квантора *å* – сумма с одним слагаемым (пример с точностью до обозначений переменных взят из работы [4]):

$(v_1\!: I)(\mathring{a}\ (\boldsymbol{v_2}\!: I[v_1, v_1])\ \boldsymbol{t} \vdash \boldsymbol{v_2} \dashv\ ) = \boldsymbol{t} \vdash v_1 \dashv$.

Подстановка: $\sigma = (v_1 \mid v,\ \boldsymbol{v_2} \mid i,\ \boldsymbol{t} \mid t_1)$; $\upsilon = (v\!: I)$.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$(v\!: I)(\mathring{a}\ (i\!: I[v, v])\ i) = v$.



Пример 7. Исходное метаматематической утверждение:

$\boldsymbol{f} \vdash \boldsymbol{t_1} \vdash \boldsymbol{t_2} \vdash \boldsymbol{i} \dashv,\ \boldsymbol{t_3} \dashv \dashv$.

Данный пример заимствован из работы [5] с точностью до обозначений переменных. На рисунке показано структурное модифицированной синтаксической переменной $\boldsymbol{f}$.

Подстановка: $\sigma = (\boldsymbol{f} \mid t_1 \neq \varnothing,\ \boldsymbol{t_1} \mid t_1 \rightarrow t_2,\ \boldsymbol{t_2} \mid I[t_1, \infty),\ \boldsymbol{t_3} \mid R,\ \boldsymbol{i} \mid 1)$; $\upsilon = \varnothing$.

Через t_1 и t_2 в σ обозначены формальные параметры-метатермы, причем индексы означают порядковые номера их вхождений в соответствующий терм из σ и совпадают с порядковыми номерами вхождений элементов модификатора типа метаматематический терм в модификатор соответствующей синтаксической переменной из σ.

Результатом применения подстановки является математическое утверждение:

$I[1, \infty) \rightarrow R \neq \varnothing$.

Заключение

В настоящей работе представлен алгоритм решения задачи применения подстановки для расширяемой модели математического диалекта. Полученные результаты показывают, что при повышении уровня языка представления математических утверждений, используемого в системах доказательств теорем, сложность алгоритма применения подстановки заметно возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983.
2. Interactive Theorem Proving with Tasks / M. Hubner, S. Autexier, C. Benzmuller, A. Meier // Electronic Notes in Theoretical Computer Science (ENTCS). – 2004. – Vol. 103. – P.161–181.
3. *Asperti A.* A Survey on Interactive Theorem Proving. 2009. – URL: http://www.cs.unibo.it/~asperti/SLIDES/itp.pdf (дата обращения 20.05.11).
4. *Гаврилова Т.Л., Клещев А.С.* Внутренняя модель математической практики для систем автоматизированного конструирования доказательств теорем // Проблемы управления. – 2006. – № 4. – Ч. 1. – С. 32–35; № 5. – Ч. 2. – С. 68–73; № 6. – Ч. 3. – С. 68–71.
5. *Клещев А.С.* Модель аналогии между математическими доказательствами // Проблемы управления. – 2007. – № 1. – С.20–24.

E-mail:
Клещев А.С. – kleschev@iacp.dvo.ru;
Тимченко В.А. – rakot2k@mail.ru.