ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов К.В.* Региональные эколого-экономические системы. – М.: Изд-во «Магистр», 2009.
2. *Арайс Е.А., Дмитриев В.М.* Моделирование неоднородных цепей на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1982.
3. *Дмитриев В.М.* Редактор виртуальных инструментов и приборов / В.М. Дмитриев, Т.В. Ганджа, Т.Ю. Коротина // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. – 2009. – № 6. – С. 19-24.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Шелупановым.

E-mail:

Дмитриев Вячеслав Михайлович – ofo45@mail.ru;
Ганджа Тарас Викторович – gandgatv@gmail.com;
Затик Ольза Сергеевна – olga_sur@mail.ru.

УДК 519.622

© 2011 г. **Е.А. Новиков**, д-р физ.-мат. наук
(Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск)

МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ[1]

Построен метод первого порядка точности для решения жестких аддитивных задач. Получена оценка ошибки и неравенства для контроля точности вычислений. Приведены результаты расчетов.
Ключевые слова: жесткая аддитивная задача, (m,k)-метод, контроль точности.

Введение

Для численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k \tag{1}$$

обычно применяются A-устойчивые или L-устойчивые методы [1]. Здесь y и f – N-мерные вектор-функции, а t – независимая переменная. Рассмотрение автономной системы не снижает общности, потому что неавтономную задачу введением дополнительной переменной всегда можно привести к автономному виду.

В случае большой размерности задачи для методов с неограниченной областью устойчивости общие вычислительные затраты фактически полностью определяются временем обращения матрицы Якоби-системы (1). При реализации та-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

ких численных схем обычно вместо обращения матрицы Якоби на каждом шаге в зависимости от числа стадий несколько раз решается линейная система алгебраических уравнений с применением LU-разложения с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице.

С целью сокращения вычислительных затрат во многих алгоритмах используется замораживание матрицы Якоби, т.е. применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования. Наиболее естественно это осуществляется в итерационных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений, где данная матрица не влияет на порядок точности численной схемы, а только определяет скорость сходимости итерационного процесса. Такой подход широко применяется при реализации полуявных и неявных методов типа Рунге-Кутта, неявных многошаговых методов типа Адамса и Гира (см., например, [1]). Однако для безытерационных численных схем, к которым относятся методы типа Розенброка [2] и их различные модификации [3 − 4], вопрос об аппроксимации матрицы Якоби значительно более сложен. В таких методах она влияет на порядок точности численной схемы, и поэтому ее возмущения могут приводить к потере порядка.

С другой стороны, задачу (1) можно записать в виде [5 − 8]:

$$y' = [f(y) - By] + By,\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \qquad (2)$$

где B есть некоторая аппроксимация матрицы Якоби. Предполагая, что вся жесткость сосредоточена в слагаемом By, выражение в квадратных скобках можно интерпретировать как нежесткую часть. Если при построении методов учитывать этот факт, то такая постановка задачи позволяет, в частности, использовать в алгоритмах интегрирования замораживание матрицы Якоби, которая может вычисляться как аналитически, так и численно. Для некоторых задач в качестве матрицы B можно использовать симметричную часть матрицы Якоби или иногда применять ее диагональную аппроксимацию.

При численном решении ряда задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, после дискретизации по пространственным переменным методом конечных разностей или конечных элементов, возникает необходимость решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = j\,(t, y) + g(t, y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k,$$

в которой правая часть естественным образом разбивается на жесткую и нежесткую составляющие. При этом разбиении выполняется предположение о том, что большая часть жесткости сосредоточена в функции $g(t,y)$. Например, в некоторых задачах механики сплошной среды жесткая часть появляется после дискретизации дифференциального оператора второго порядка, а нежесткая – после дискретизации дифференциального оператора первого порядка. Кроме того, в некоторых задачах такого вида матрица Якоби функции $g(t,y)$ имеет специальный вид, – например, в задачах механики сплошной среды она симметрична.

Здесь построен двухстадийный метод первого порядка точности, допускающий различные виды аппроксимации матрицы Якоби. Получены оценка ошибки и неравенство для контроля точности вычислений. Приведены расчеты с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби, подтверждающие эффективность построенного алгоритма интегрирования по сравнению с известным методом Рунге-Кутта-Мерсона.

Численная схема

Рассмотрим задачу Коши следующего вида

$$y' = j\,(y) + g(y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \qquad (3)$$

где y, φ и g – N-мерные вектор-функции; t – независимая переменная. Далее будем полагать, что вся жесткость сосредоточена в функции $g(y)$, а $\varphi(y)$ есть нежесткая часть. Для численного решения (3) рассмотрим двухстадийный метод вида

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2,\ D_n = E - ahg'_n, \\ D_n k_1 = h[j\,(y_n) + g(y_n)],\ Dk_2 = k_2, \end{gathered} \qquad (4)$$

где E – единичная матрица; $g_n'=\partial g(y_n)/\partial y$; k_i – стадии метода; a, p_1 и p_2 – числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (4). Для исследования схемы (4) разложим стадии k_1 и k_2 в ряды Тейлора по степеням h до членов с h^2 включительно. Имеем:

$$\begin{gathered} k_1 = h[j_n + g_n] + ah^2[g'_n j_n + g'_n g_n] + O(h^3), \\ k_2 = h[j_n + g_n] + 2ah^2[g'_n j_n + g'_n g_n] + O(h^3), \end{gathered} \qquad (5)$$

где $\varphi_n=\varphi(y_n)$ и $g_n=g(y_n)$. Подставляя (5) в первую формулу (4), получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2)h[j_n + g_n] + a(p_1 + 2p_2)h^2[g'_n j_n + g'_n g_n] + O(h^3), \qquad (6)$$

где элементарные дифференциалы вычислены на приближенном решении y_n. Представление точного решения $y(t_{n+1})$ в окрестности точки t_n в виде ряда Тейлора по степеням h имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h(j + g) + \frac{1}{2}h^2(j'j + j'g + g'j + g'g) + O(h^3)\,, \qquad (7)$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном решении $y(t_n)$, $\varphi'=\partial\varphi/\partial y$. Сравнивая (6) и (7) при условии $y_n=y(t_n)$, получим условия первого порядка точности схемы (4), т.е.:

$$p_1 + p_2 = 1. \qquad (8)$$

Устойчивость метода

Исследуем устойчивость численной формулы (4). Применение традиционной тестовой задачи

$$y' = l\,y,\ y(0) = y_0,\ t \ge 0$$

с комплексным параметром λ, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ в данном случае неправомерно, поскольку в этом случае теряется смысл в разделении правой части системы дифференциальных уравнений (3) на жесткую и нежесткую части [5 – 6, 9]. Поэтому в задаче (3) положим $\varphi(y) = \lambda_1 y$ и $g(y) = \lambda_2 y$ [6], где λ_1 и λ_2 есть произвольные комплексные числа, причем $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$. Смысл λ_1 и λ_2 – некоторые собственные числа матриц Якоби функций $\varphi(y)$ и $g(y)$ соответственно. Применяя (4) для решения задачи

$$y' = l_1 y + l_2 y,\ y(0) = y_0,\ t \ge 0, \qquad (9)$$

и обозначая $x = h\lambda_1$ и $z = h\lambda_2$, имеем:

$$k_1 = \frac{x+z}{1-az} y_n,\ k_2 = \frac{x+z}{(1-az)^2} y_n .$$

Учитывая (8), подставим полученные соотношения в первую формулу (4). Получим $y_{n+1} = Q(x,z)y_n$, где функция устойчивости $Q(x,z)$ имеет вид

$$Q(x,z) = \frac{1+(1-2a)z + x - ap_1xz + a(a-p_1)z^2}{(1-az)^2}.$$

Необходимым условием L-устойчивости численной формулы (4) относительно функции $g(y) = \lambda_2 y$ является выполнение соотношения $Q(x,z) \to 0$ при $z \to -\infty$ [9 – 10]. Из вида $Q(x,z)$ следует, что это требование будет выполнено, если $p_1 = a$. Учитывая (8), получим набор коэффициентов схемы (4) первого порядка точности, т.е.

$$p_1 = a,\ p_2 = 1-a, \tag{10}$$

где a – свободный параметр.

При $\varphi(y) \equiv 0$ потребуем, чтобы численная формула (4) имела второй порядок точности. Из сравнения (6) и (7) следует, что это требование будет выполнено, если $a(p_1 + 2p_2) = 0.5$. Подставляя в это соотношение p_1 и p_2 из (10), получим, что коэффициент a есть корень квадратного уравнения

$$a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0. \tag{11}$$

Тогда функция устойчивости $Q(x,z)$ схемы (4) имеет вид

$$Q(x,z) = \frac{1+(1-2a)z + x - a^2xz}{(1-az)^2}.$$

Заметим, что если $\varphi(y) \equiv 0$, то схема (4) с коэффициентами (10) и (11) совпадает с L-устойчивым (2,1)-методом второго порядка точности, который можно записать следующим образом [11]:

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + p_1k_1 + p_2k_2,\ D_n = E - ah\frac{\partial g(y_n)}{\partial y}, \\ D_nk_1 = hg(y_n),\ D_nk_3 = k_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Функция устойчивости $Q(0,z)$ численной формулы (12) имеет вид

$$Q(0,z) = \frac{1+(1-2a)z}{(1-az)^2},$$

а локальная ошибка $\delta_{n,2}$ – следующий:

$$d_{n,2} = h^3[(a-\frac{1}{3})g'^2g + \frac{1}{6}g''g^2] + O(h^4).$$

Уравнение (11) имеет два вещественных корня: $a = 1 - 0.5\sqrt{2}$ и $a = 1 + 0.5\sqrt{2}$. Выберем $a = 1 - 0.5\sqrt{2}$, потому что в этом случае меньше коэффициент в главном члене локальной ошибки $\delta_{n,2}$ численной схемы (12).

Жесткие задачи называют еще задачами с большими константами Липшица [9]. Поэтому в неравенстве для контроля точности вычислений метода (4) будем использовать оценку ошибки жесткой части задачи (2), так как основной вклад в общую ошибку дают слагаемые $g'g$ и $g'\varphi$ [10]. С применением (5) нетрудно видеть, что имеет место соотношение $k_2 - k_1 = ah^2[g'_n j_n + g'_n g_n] + O(h^3)$.

В результате для контроля точности будем применять неравенство

$$\| k_2 - k_1 \| \le e\,, \qquad (13)$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N, ε – требуемая точность интегрирования.

Замораживание матрицы Якоби, т.е. применение матрицы $D_n = E - ahg_n'$ на нескольких шагах интегрирования, можно проводить по следующему правилу [12]. Если матрица Якоби не пересчитывалась, то для сохранения устойчивости численной схемы величину шага интегрирования менять тоже не следует. Попытка применения старой матрицы осуществляется после каждого успешного шага интегрирования. Три причины приводят к размораживанию: 1) нарушение неравенства для контроля точности вычислений, 2) превышение количества шагов с замороженной матрицей числа q_f, 3) превышение прогнозируемого шага интегрирования последнего успешного шага в q_h раз.

Параметры q_f и q_h можно использовать для настройки метода на решение конкретных задач. Если $q_f \to \infty$ и $q_h \to \infty$, то число шагов с одной матрицей Якоби возрастает. Если $q_f = 0$ и $q_h = 0$, то замораживания матрицы не происходит. Поэтому в случае большой размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет смысл выбирать параметры q_f и q_h достаточно большими.

Результаты расчетов

Далее построенный алгоритм будем называть ASODE_1. Все рассматриваемые ниже примеры приводились к виду (2). Расчеты проводились с требуемой точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ на IBM PC Intel Core 2 Quad CPU с двойной точностью. Схема (4) имеет первый порядок точности, и поэтому проводить с ее помощью расчеты с более высокой точностью нецелесообразно. В конкретных расчетах норма $\|k_2 - k_1\|$ в неравенстве (13) вычислялась по формуле

$$\| k_2 - k_1 \| = \max_{1 \le i \le N} \frac{| k_2^i - k_1^i |}{| y_n^i | + r},$$

где i – номер компоненты; r – положительный параметр. Если по i-й компоненте решения выполняется неравенство $|y_n^i| < r$, то контролируется абсолютная ошибка εr, в противном случае – относительная ошибка ε. В расчетах параметр r выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность была не хуже задаваемой.

Расчеты тестовых примеров из работы [13] осуществлялись с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби. Все рассмотренные задачи жесткие, и они взяты из области химической кинетики. В каждой тестовой задаче содержится определенная «неприятность» для метода интегрирования: близкие к стационарному решению начальные условия, большая жесткость, вычисления вблизи границы разрядной сетки и др. При диагональной аппроксимации нет необходимости в декомпозиции матрицы Якоби в схеме (4), т.е. вычислительные затраты на шаг интегрирования в построенном алгоритме и явных методах различаются незначительно. Поэтому сравнение эффективности проводилось с явным методом Рунге-Кутта-Мерсона [14] по числу вычислений правой части if задачи (3) на интервале интегрирования. Время интегрирования не приводится, потому что для некоторых примеров оно настолько мало, что не может служить объективной характеристикой эффективности алгоритмов интегрирования. Дополнительные временные затраты связаны с личным временем вычислителя на определение и программирование диагональных элементов матрицы Якоби – обычно это несложная задача.

Пример 1.

$$y_1' = -4\cdot 10^{-2} y_1 + 10^{-2} y_2 y_3,$$
$$y_2' = 4\cdot 10^{2} y_1 - 10^{2} y_2 y_3 - 3\cdot 10^{3} y_2^2,$$
$$y_3' = 30 y_2^2,$$
$$t \in [0,40],\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = y_3(0) = 0,\ h_0 = 10^{-5}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам

$$b_{11} = -4\cdot 10^{-2},\ b_{22} = \ -10^{2} y_3 - 6\cdot 10^{3} y_2,\ b_{33} = 0.$$

Для решения данной задачи алгоритму ASODE_1 потребовалось 129 вычислений правой части, для метода Мерсона вычислительные затраты if = 10 237.

Пример 2.

$$y_1' = y_3 - 10^{2} y_1 y_2,$$
$$y_2' = y_3 + 2 y_4 - 10^{2} y_1 y_2 - 2\cdot 10^{4} y_2^2,$$
$$y_3' = -y_3 + 10^{2} y_1 y_2,$$
$$y_4' = -y_4 + 10^{4} y_2^2,$$
$$t \in [0,20],\ y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_3(0) = y_4(0) = 0,\ h_0 = 2.5\cdot 10^{-5}.$$

В расчетах использовалась диагональная матрица B_n с элементами b_{ii} на диагонали вида

$$b_{11} = -10^{2} y_2,\ b_{22} = -10^{2} y_1 - 4\cdot 10^{4} y_2,\ b_{33} = b_{44} = -1.$$

Для решения данной задачи построенному методу потребовалось 353 вычисления правой части, в то время как для метода Мерсона вычислительные затраты составляют if = 206 618.

Пример 3.

$$y_1' = -1.3\cdot 10^{-2} y_1 - 10^{3} y_1 y_3,$$
$$y_2' = -2.5\cdot 10^{3} y_2 y_3,$$
$$y_3' = -1.3\cdot 10^{-2} y_1 - 10^{3} y_1 y_3 - 2.5\cdot 10^{3} y_2 y_3,,$$
$$t \in [0,50],\ y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 0,\ h_0 = 2.9\cdot 10^{-4}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам

$$b_{11} = -1.3\cdot 10^{-2} - 10^{3} y_3,\ b_{22} = -2.5\cdot 10^{3} y_3,\ b_{33} = -10^{3} y_1 - 2.5\cdot 10^{3} y_2.$$

Для решения данной задачи алгоритму ASODE_1 потребовалось 17 вычислений правой части, для метода Мерсона вычислительные затраты if = 346 316.

Пример 4.

$$y_1' = 0.01 - [1 + (y_1 + 10^{3})(y_1 + 1)](0.01 + y_1 + y_2),$$

$$y_2' = 0.01 - (1 + y_2^2)(0.01 + y_1 + y_2),$$

$$t \in [0,100],\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ h_0 = 10^{-4}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам

$$b_{11} = -\left(2y_1 + 1001\right)\left(0.01 + y_1 + y_2\right) - [1 + (y_1 + 10^3)(y_1 + 1)],$$

$$b_{22} = -2y_2(0.01 + y_1 + y_2) - (1 + y_2^2).$$

Для решения данной задачи построенному методу потребовалось 20 670 вычисления правой части, в то время как для метода Мерсона вычислительные затраты составляют if = 87 813.

Пример 5.

$$y_1' = -1.3(y_3 - y_1) + 10400\exp(20.7 - \frac{1500}{y_1})y_2,$$

$$y_2' = 1880(y_4 - y_2)[1 + \exp(20.7 - \frac{1500}{y_1})],$$

$$y_3' = 1752 - 269y_3 + 267y_1,$$

$$y_4' = 0.1 + 320y_2 - 321y_4,$$

$$t \in [0,1000],\ y_1(0) = 761,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 600,\ y_4(0) = 0.1,\ h_0 = 10^{-4}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам

$$b_{11} = -1.3 + 1.56 \cdot 10^7 \exp(20.7 - \frac{1500}{y_1})y_2 / y_1^2,$$

$$b_{22} = -1880[1 + \exp(20.7 - \frac{1500}{y_1})],$$

$$b_{33} = -269,\ b_{44} = -321.$$

Для решения данной задачи алгоритму ASODE_1 потребовалось if = 1 186, а методом Мерсона за разумное время вычислить решение не удалось вследствие слишком большой жесткости.

Пример 6.

$$y_1' = -y_1 - y_1y_2 + 294y_2,$$

$$y_2' = \frac{1}{98}y_1(1 - y_2) - 3y_2,$$

$$t \in [0,240],\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ h_0 = 10^{-2}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам

$$b_{11} = -1 - y_2,\ b_{22} = -\frac{1}{98}y_1 - 3.$$

Для решения данной задачи построенному методу потребовалось if = 1 564, в то время как для метода Мерсона вычислительные затраты составляют if = 1 750. Коэффициент жесткости в данной задаче невелик, и поэтому вычислительные затраты соизмеримы.

Пример 7.

$$y_1' = 0.2(y_2 - y_1),$$

$$y_2' = 10y_1 - (60 - 0.125y_3)y_2 + 0.125y_3,$$
$$y_3' = 1,$$
$$t \in [0,400],\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0,\ h_0 = 1.7 \cdot 10^{-2}.$$

Диагональные элементы b_{ii} матрицы Якоби B_n вычислялись по формулам
$$b_{11} = -0.2,\ b_{22} = -60 + 0.125y_3,\ b_{33} = 0.$$

Для решения данной задачи алгоритму ASODE_1 потребовалось if = 10 590, для метода Мерсона вычислительные затраты if = 25 078.

Пример 8.
$$y_1' = 77.27(y_2 - y_1y_2 + y_1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1^2),$$
$$y_2' = \frac{1}{77.27}(-y_2 - y_1y_2 + y_3),$$
$$y_3' = 0.161(y_1 - y_3),$$
$$t \in [0,300],\ y_1(0) = y_3(0) = 4,\ y_2(0) = 1.1,\ h_0 = 10^{-3}.$$

Эта задача является простейшей математической моделью с периодическим решением для описания реакции Белоусова-Жаботинского (орегонатор). Решение задачи осуществлялось методом (4) с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби, причем
$$b_{11} = 77.27(1 - 1.675 \cdot 10^{-5} y_1 - y_2),\ b_{22} = -\frac{1}{77.27}(1 + y_1),\ b_{33} = -0.161.$$

Приближенное решение алгоритмом ASODE_1 вычислено с затратами if = 5 579, а методу Мерсона потребовалось 13 375 211 вычислений правой части.

Заключение

Приведенные результаты численных экспериментов не ориентированы на решение задач механики сплошной среды, а направлены на исследование возможностей алгоритма интегрирования при решении некоторых общепринятых тестовых примеров. Цель расчетов заключалась в проверке работоспособности алгоритма с переменным шагом и исследовании возможности расчетов с диагональной аппроксимацией матрицы Якоби. В последнем случае вычислительные затраты на шаг в явных методах и построенном алгоритме различаются незначительно. В частности, из анализа результатов расчетов жестких задач следует, что в случае невозможности применения методов с неограниченной областью устойчивости алгоритм (4) существенно эффективнее метода Мерсона − наиболее распространенного среди явных численных схем типа Рунге-Кутта.

Существенную роль при выборе метода интегрирования играет размерность задачи. Если речь идет о решении нескольких уравнений, когда время решения невелико, а вычислительные затраты на декомпозицию матрицы Якоби мало отличаются от затрат на вычисление правой части системы уравнений (1), методы с неограниченной областью устойчивости будут предпочтительнее. Однако если речь идет о тысячах уравнений, то декомпозиция матрицы Якоби есть отдельная трудновыполнимая задача. В этом случае построенный алгоритм с диагональной или ленточной матрицей Якоби может оказаться предпочтительнее. Речь идет о попытке "потеснить" неявные схемы, а не о замене *L*-устойчивых методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хайрер Э, Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. − М.: Мир, 1999.
2. *Rosenbrock H.H.* General implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer J. − 1963. − №5. − P. 329−330.
3. *Kaps P.*, *Rentrop P.* Generalized Runge-Kutta methods of order four with stepsize control for stiff ordinary differential equations // Numer. Math. − 1979. − №33. − P. 55−68.
4. *Новиков Е.А.*, *Шитов Ю.А.*, *Шокин Ю. И.* Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // ДАН СССР. − 1988. − Т. 301, №6. − С. 1310−1314.
5. *Cooper G.J.*, *Sayfy A.* Additive Runge-Kutta Methods for Stiff Ordinary Differential Equations // Mathematics of Computation. − 1983. − Vol. 40, №161. − P. 207−218.
6. *Новиков Е.А.* Неоднородный метод второго порядка для жестких систем // Вычислительные технологии. − 2005. − Т. 10, №2. – С. 74–86.
7. *Новиков Е.А.*, *Тузов А.О.* Неоднородный метод третьего порядка для аддитивных жестких систем // Математическое моделирование. − 2007. − Т.19, №6. – С. 61–70.
8. *Новикова Е.А.* Аддитивный метод третьего порядка для решения жестких неавтономных задач // СибЖИМ. − 2010. − Т. XIII, № 1(41). – С. 84−94.
9. *Деккер К.*, *Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. − М.: Мир, 1988.
10. *Новиков Е.А.* Явные методы для жестких систем. − Новосибирск: Наука, 1997.
11. *Ващенко Г.В.*, *Новиков Е.А.* Последовательный (2,1)-метод и его параллельный аналог // Системы управления и информационные технологии. − 2009. − №4(38). − С. 8−11.
12. *Новиков А.Е.*, *Новиков Е.А.* Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. − 2010. − Т.22, №1. – С. 46-56.
13. *Enright W.H.*, *Hull T.E.* Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's // BIT. – 1975. – №15. – P. 10–48.
14. *Merson R.H.* An operational methods for integration processes // Proc. Symp. on Data Proc. Weapons Research Establishment. − Salisbury, Australia. − 1957. − P. 329−330.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Олейниковым.

E-mail:

Новиков Евгений Александрович – novikov@icm.krasn.ru