УДК 539.3+517.955.8

© 2012 г. **М.В. Сташкевич**, канд. физ.-мат. наук,
А.И. Олейников, д-р физ.-мат. наук
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕТЕРОГЕННОЙ УПРУГОСТИ

Предложен алгоритм решения краевой задачи гетерогенной упругости методом малых параметров, обоснован выбор материальных констант модели в качестве малых параметров и приведены результаты исследования некоторых особенностей физической нелинейности, характерной для модели гетерогенно-упругой среды

Ключевые слова: модель гетерогенно-упругой среды, краевая задача, метод малых параметров, задача.

Введение

Модели физически нелинейных гетерогенных (разномодульных) сред могут находить эффективное применение, например, при изучении влияния микроповреждений на напряженно-деформированное состояние, устойчивость и разрушение разнообразных реальных тел: массивов горных пород, сооружений, конструкций и деталей машин. Определяющие уравнения, описывающие поведение гетерогенно-упругих материалов, являются существенно нелинейными и негладкими. Поэтому обычно удовлетворяются приближенным численным решением соответствующих задач. Однако по-прежнему аналитический вид общего решения представляет большую научную и практическую ценность. Получение такого решения может быть достигнуто асимптотическими методами теории возмущений. К настоящему времени доказаны теоремы единственности решения краевых задач гетерогенной упругости и приведено достаточное количество экспериментальных данных, которые указывают на то, что в таких задачах содержатся естественные внутренние малые параметры. Наличие этих параметров обусловлено малостью дополнительных к классическим постоянных материала.

Модели гетерогенно-упругой среды отвечает новый класс физической нелинейности, когда материальные функции в законе поведения являются однородными нулевой степени однородности. Изучение особенностей такого рода нелинейности в конкретных задачах на основе разложения общего решения в асимптотический ряд по степеням малых параметров представляется весьма перспективным, особенно с учетом нескольких малых параметров и тензорной нелинейности. Кроме того, эти особенности могут найти эффективное применение при

проектировании, изготовлении и диагностике разнообразных изделий, в том числе из новых синтетических композиционных материалов и сплавов, которые являются сильно микронеоднородными и поэтому обычно содержат или скоро приобретают множество межкомпонентных дефектов, являясь, таким образом, гетерогенно-сопротивляющимися материалами.

Постановка задачи

В [1] предложена модель изотропной гетерогенно-упругой среды, которой отвечает новый класс физической нелинейности, когда материальные функции в законе поведения являются однородными функциями нулевого порядка. Определяющие уравнения модели существенно нелинейные и негладкие, в которых уже первые неклассические слагаемые с малыми коэффициентами хорошо аппроксимируют нелинейные эффекты поведения разносопротивляющихся материалов в главном приближении.

Краевая задача гетерогенной упругости

$$s_{ij,j}=0,\ s_{ij}=\frac{\partial W}{\partial e_{ij}},\ e_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\ u_i\big|_{S_U}=U_i,\ s_{ij}n_j\big|_{S_T}=T_i,\ i,j=\overline{1,3}, \quad (1)$$

решается в перемещениях на основе закона поведения

$$s_{ij}=\left(l-\frac{n}{x}+3ax\right)I_1 d_{ij}+\left(2m-nx-ax^3-bh^3\right)e_{ij}+\frac{3be_{ik}e_{kj}}{\sqrt{I_2}},\quad |e|>0,$$

$$s_{ij}=0,\quad |e|=0,$$

где $I_1=e_{ij}d_{ij}$, $I_2=e_{ij}e_{ij}$, $I_3=e_{ij}e_{jk}e_{ki}$; $x=I_1/\sqrt{I_2}$ $(|x|\le\sqrt{3})$, $h=\sqrt[3]{I_3}/\sqrt{I_2}$ $(|h|\le 1)$.

Представим основные соотношения модели гетерогенно-упругой среды в виде

$$s_{ij}=\left[K+\Omega-\frac{2}{3}(G+w)+y_1\right]I_1 d_{ij}+2(G+w+y_2+\Lambda_1)e_{ij}+\Lambda_2 e_{ik}e_{kj}, \quad (2)$$

где $\Omega(x)=-n\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right)$, $w(x)=-\frac{1}{2}nx$, $y_1(x)=3ax$, $y_2(x)=-\frac{1}{2}ax^3$, $\Lambda_1(h)=-\frac{1}{2}bh^3$;

$\Lambda_2=\frac{3b}{\sqrt{I_2}}$.

Условия единственности решения задачи (1), (2) и устойчивости материала [2] при $\alpha=\beta=0$ являются ограничениями на материальные константы λ, μ, ν: $l>0$, $m\ge 0$; $|n|\le\frac{\sqrt{3}}{2}\left(l+\frac{2}{3}m\right)$, если $l\le\frac{2}{3}m$; $|n|\le\frac{2}{\sqrt{3}}m$, если $l>\frac{2}{3}m$. Из последних неравенств видно, что максимальное значение параметра ν не может значительно превышать величину коэффициента μ и всегда меньше $\lambda+2\mu/3$, т.е.

$$\frac{n}{l+2m/3}<1.$$

В то же время величины материальных констант α и β, найденные по экспериментальным данным [2], значительно меньше параметра ν. Таким образом, коэффициенты $\tilde{n} = n/K$, $\tilde{a} = a/K$, $\tilde{b} = b/K$, где $K=\lambda+2\mu/3>0$, представляют собой естественные внутренние малые параметры данной модели среды, которые могут быть использованы при решении задачи (1), (2) методом малых параметров [3, 4].

Решение краевой задачи гетерогенной упругости методом малых параметров

В общем тензорно-линейном случае определяющих соотношений (2) решение краевой задачи (1) зависит от двух малых параметров $\tilde{n}$ и $\tilde{a}$:

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{n}^n\tilde{a}^k u_i^{(n,k)}. \qquad (3)$$

Вычисление коэффициентов асимптотического степенного ряда (3) хотя и сводится к решению линейных однотипных краевых задач, но обычно сопряжено с трудоемкими символьными преобразованиями. Подставляя разложение решения (3) в (1), (2), произведя расщепление по $\tilde{n}$ и $\tilde{a}$ (т.е. приравнивая выражения при одинаковых степенях $\tilde{n}$ и $\tilde{a}$) и используя двойные ряды

$$\left\{e_{ij}, x, \Omega, w, y_1, y_2, s_{ij}\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{n}^n\tilde{a}^k\left\{e_{ij}^{(n,k)}, x^{(n,k)}, \Omega^{(n,k)}, w^{(n,k)}, y_1^{(n,k)}, y_2^{(n,k)}, s_{ij}^{(n,k)}\right\},$$

получили бесконечную последовательность дифференциальных уравнений для определения $u_i^{(n,k)}$:

$$\left(K-\frac{2}{3}G\right)u_{m,mi}^{(0,0)} + G\left(u_{i,jj}^{(0,0)} + u_{j,ij}^{(0,0)}\right) = 0,$$
$$\left(K-\frac{2}{3}G\right)u_{m,mi}^{(n,k)} + G\left(u_{i,jj}^{(n,k)} + u_{j,ij}^{(n,k)}\right) = -\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{k}\left[u_{m,m}^{(n-p,k-q)}d_{ij}\times\right. \qquad (4)$$
$$\left.\times\left(\Omega^{(p,q)} - \frac{2}{3}w^{(p,q)} + y_1^{(p,q)}\right) + \left(w^{(p,q)} + y_2^{(p,q)}\right)\left(u_{i,j}^{(n-p,k-q)} + u_{j,i}^{(n-p,k-q)}\right)\right]_{,j}, \ \mathbf{K},$$

где, в частности,

$$e_{ij}^{(n,k)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(n,k)} + u_{j,i}^{(n,k)}\right), \quad I_1^{(n,k)} = e_{lm}^{(n,k)}d_{lm}, \quad I_2^{(n,k)} = e_{lm}^{(n,k)}e_{lm}^{(n,k)}$$
$$x^{(0,0)} = \frac{I_1^{(0,0)}}{\sqrt{I_2^{(0,0)}}}, \quad x^{(1,0)} = \frac{I_1^{(1,0)}}{\sqrt{I_2^{(0,0)}}} - x^{(0,0)}\frac{e_{ij}^{(0,0)}e_{ij}^{(1,0)}}{I_2^{(0,0)^2}},$$
$$x^{(0,1)} = \frac{I_1^{(0,1)}}{\sqrt{I_2^{(0,0)}}} - x^{(0,0)}\frac{e_{ij}^{(0,0)}e_{ij}^{(0,1)}}{I_2^{(0,0)^2}}, \quad \mathbf{K};$$
$$\Omega^{(0,0)} = 0, \quad \Omega^{(1,0)} = -K\left(\frac{1}{x^{(0,0)}} + \frac{x^{(0,0)}}{3}\right), \quad \Omega^{(0,1)} = 0, \ \mathbf{K},$$

$$w^{(0,0)}=0,\ w^{(1,0)}=-\frac{K}{2}x^{(0,0)},\ w^{(0,1)}=0,\mathbf{K},\ w^{(n,k)}=-\frac{K}{2}x^{(n-1,k)},\ w^{(0,k)}=0,$$

$$y_1^{(0,0)}=0,\quad y_1^{(1,0)}=0,\quad y_1^{(0,1)}=3Kx^{(0,0)},\mathbf{K},\ y_1^{(n,0)}=0,\quad y_1^{(n,k)}=3Kx^{(n,k-1)},$$

$$y_2^{(0,0)}=0,\quad y_2^{(1,0)}=0,\quad y_2^{(0,1)}=-\frac{K}{2}x^{(0,0)^3},\mathbf{K},\quad y_2^{(n,0)}=0.$$

Данные выражения позволяют записать коэффициенты разложения напряжений в виде:

$$s_{ij}^{(0,0)}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)I_1^{(0,0)}d_{ij}+2Ge_{ij}^{(0,0)};\ \ s_{ij}^{(n,k)}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)I_1^{(n,k)}d_{ij}+2Ge_{ij}^{(n,k)}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{k}\left[\left(\Omega^{(p,q)}-\frac{2}{3}w^{(p,q)}+y_1^{(p,q)}\right)I_1^{(n-p,k-q)}d_{ij}+2\left(w^{(p,q)}+y_2^{(p,q)}\right)e_{ij}^{(n-p,k-q)}\right],$$

где $n+k\geq 1$.

Если граничные условия не зависят от параметров $\tilde{n}$ и $\tilde{a}$, то необходимо их выполнение в «нулевом» ($n = k = 0$) приближении:

$$u_i^{(0,0)}\Big|_{S_U}=U_i,\ \ u_i^{(n,k)}\Big|_{S_U}=0;\ \ s_{ij}^{(0,0)}n_j\Big|_{S_T}=T_i,\ \ s_{ij}^{(n,k)}n_j\Big|_{S_T}=0,\quad n+k\geq 1.$$

Таким образом, решение краевой задачи (1)-(2) методом малых параметров свелось к решению цепочки уравнений (4). Определение «нулевого» приближения эквивалентно решению задачи классической теории упругости при заданных граничных условиях. Нахождение последующих приближений сводится к интегрированию неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка при нулевых граничных условиях.

В простейшем тензорно-нелинейном случае определяющих соотношений модели решение задачи (1)-(2) в перемещениях является функцией малого параметра $\tilde{b}$:

$$u_i=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}^n u_i^{(n)}\ .$$

Решая краевую задачу методом малого параметра, получим последовательность дифференциальных уравнений для определения $u_i^{(n)}$:

$$\left(K-\frac{2}{3}G\right)u_{m,mi}^{(0)}+G\left(u_{i,jj}^{(0)}+u_{j,ij}^{(0)}\right)=0,$$

$$\left(K-\frac{2}{3}G\right)u_{m,mi}^{(n)}+G\left(u_{i,jj}^{(n)}+u_{j,ij}^{(n)}\right)=-\sum_{p=0}^{n}\left\{\left[\Lambda_1^{(p)}\left(u_{i,j}^{(n-p)}+u_{j,i}^{(n-p)}\right)\right]_{,j}+\right. \qquad (5)$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left[\Lambda_2^{(p)}\sum_{m=0}^{n-p}\left(u_{i,k}^{(m)}+u_{k,i}^{(m)}\right)\left(u_{k,j}^{(n-p-m)}+u_{j,k}^{(n-p-m)}\right)\right]_{,j}\right\},$$

где

$$e_{ij}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(n)}+u_{j,i}^{(n)}\right),\ \ h^{(0)}=\sqrt[3]{I_3^{(0)}}\Big/\sqrt{I_2^{(0)}},\quad h^{(1)}=e_{ij}^{(1)}\frac{\partial h}{\partial e_{ij}}\bigg|_{e_{ij}^{(0)}},\quad \mathbf{K};$$

$$\Lambda_1^{(0)}=0,\quad \Lambda_1^{(1)}=-\frac{K}{2}h^{(0)3},\quad \mathbf{K};\quad \Lambda_1^{(n)}=-\frac{K}{2}\sum_{m=0}^{n-1}h^{(m)}\sum_{k=0}^{n-1-m}h^{(k)}h^{(n-1-m-k)},$$

$$\Lambda_2^{(0)}=0,\quad \Lambda_2^{(1)}=\frac{3K}{\sqrt{e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)}}},\quad \Lambda_2^{(1)}=-3K\frac{e_{ij}^{(1)}e_{ij}^{(0)}}{\left(e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)}\right)^{3/2}},\quad \mathbf{K}\ .$$

Тогда можно представить компоненты тензора напряжений в виде

$$s_{ij}^{(0)}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)I_1^{(0)}d_{ij}+2Ge_{ij}^{(0)},$$

$$s_{ij}^{(n)}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)I_1^{(n)}d_{ij}+2Ge_{ij}^{(n-k)}+2\sum_{k=1}^{n}\left[\Lambda_1^{(n-k)}e_{ij}^{(n-k)}\right]+\sum_{m=0}^{n}\Lambda_2^{(m)}\sum_{k=0}^{n-m}e_{ik}^{(k)}e_{kj}^{n-m-k}\ .$$

Как и в предыдущем случае, в «нулевом» приближении (при $n = 0$) система уравнений равновесия соответствует классической теории упругости. Нахождение последующих приближений при $n\geq 1$ сводится к интегрированию системы уравнений (5) при нулевых граничных условиях:

$$u_i^{(0)}\Big|_{S_U}=U_i,\ u_i^{(n)}\Big|_{S_U}=0;\ s_{ij}^{(0)}n_j\Big|_{S_T}=T_i,\ s_{ij}^{(n)}n_j\Big|_{S_T}=0.$$

Использование алгоритма метода малых параметров при решении задачи Ламе для сферы

Описанный выше алгоритм метода малых параметров решения краевой задачи гетерогенной упругости апробирован на примере решения задачи Ламе для сферы [5].

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние полого шара из гетерогенно-упругого материала, находящегося под действием равномерного внутреннего P_1 и внешнего P_2 давлений. Внутренний радиус шара R_1, внешний – R_2.

В сферической системе координат уравнения (4) принимают вид

$$\left(K+\frac{4}{3}G\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{du^{(0,0)}}{dr}+2\frac{u^{(0,0)}}{r}\right)=0,\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{du^{(n,k)}}{dr}+2\frac{u^{(n,k)}}{r}\right)=f^{(n,k)}(r),$$

где $n+k\geq 1$; u – радиальное смещение частиц среды и

$$f^{(n,k)}(r)=-\frac{3}{3K+4G}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left[\left(\Omega^{(i,j)}+\frac{4}{3}w^{(i,j)}\right)\frac{d}{dr}\left(\frac{du^{(n-i,k-j)}}{dr}+2\frac{u^{(n-i,k-j)}}{r}\right)+\right.$$

$$+\frac{4}{3}\frac{dw^{(i,j)}}{dr}\left(\frac{du^{(n-i,k-j)}}{dr}-\frac{u^{(n-i,k-j)}}{r}\right)+2\frac{dy_{\ 2}^{(i,j)}}{dr}\frac{du^{(n-i,k-j)}}{dr}+$$

$$\left.+\left(y_{\ 1}^{(i,j)}+2y_{\ 2}^{(i,j)}+\frac{d\Omega^{(i,j)}}{dr}+\frac{dy_{\ 1}^{(i,j)}}{dr}\right)\left(\frac{du^{(n-i,k-j)}}{dr}+2\frac{u^{(n-i,k-j)}}{r}\right)\right],$$

а решение имеет явный вид

$$u^{(n,k)}(r)=c_1^{(n,k)}\cdot r+\frac{c_2^{(n,k)}}{r^2}+\frac{1}{3}\left[r\int_{R_1}^{r}f^{(n,k)}(r)dr-\frac{1}{r^2}\int_{R_1}^{r}r^3f^{(n,k)}(r)dr\right],$$

где $c_1^{(n,k)}$ и $c_2^{(n,k)}$ – произвольные постоянные, которые определяются нулевыми граничными условиями.

После интегрирования уравнений и символьных преобразований получено решение задачи в первом приближении (разложение по параметрам $\tilde{n}$ и $\tilde{a}$) для радиальных смещений $u^{(I)}$, радиальных $e_r^{(I)}$ и окружных $e_q^{(I)}$ деформаций, радиальных $s_r^{(I)}$ и окружных $s_q^{(I)}$ напряжений. В данной задаче Ламе наибольший интерес представляет напряжение s_q. Поэтому, а также из-за большого размера формул приведем только выражения для $s_q^{(I)}$:

$$s_q^{(I)} = s_j^{(I)} = \frac{P_1 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1+\frac{R_2^3}{2r^3}\right) - \frac{P_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1+\frac{R_1^3}{2r^3}\right) +$$

$$+\tilde{n}\left[\frac{1}{R_2^3 - R_1^3}\left[R_1^3 F_1(R_1)\left(1+\frac{R_2^3}{2r^3}\right) - R_2^3 F_1(R_2)\left(1+\frac{R_1^3}{2r^3}\right)\right] + F_2(r)\right] +$$

$$+\tilde{a}\left[\frac{1}{R_2^3 - R_1^3}\left[R_1^3 \Phi_1(R_1)\left(1+\frac{R_2^3}{2r^3}\right) - R_2^3 \Phi_1(R_2)\left(1+\frac{R_1^3}{2r^3}\right)\right] + \Phi_2(r)\right],$$

где

$$F_1(r) = -\frac{4\sqrt{6}GK}{3K+4G}\left[\frac{\sqrt{2a^2r^6+4b^2}}{r^3} + \left(a-\frac{b}{r^3}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{a^2r^6+2b^2}}{ar^3}\right|\right] +$$

$$+ aK\sqrt{6}\ln\left|\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{a^2r^6+2b^2}}{ar^3}\right|,$$

$$F_2(r) = -\left[\frac{\sqrt{2}\left(2a^2r^6-3abr^3+b^2\right)}{r^3\sqrt{a^2r^6+2b^2}} + \left(2a+\frac{b}{r^3}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{a^2r^6+2b^2}}{ar^3}\right|\right]\times$$

$$\times\frac{2\sqrt{6}GK}{3K+4G} - \frac{3\sqrt{3}abK}{\sqrt{a^2r^6+2b^2}} + \sqrt{6}aK\ln\left|\frac{\sqrt{2}b+\sqrt{a^2r^6+2b^2}}{ar^3}\right|;$$

$$\Phi_1(r) = \frac{24\sqrt{3}GK}{3K+4G}\frac{a^2r^6-3abr^3+b^2}{r^3\sqrt{a^2r^6+2b^2}} + \frac{6\sqrt{3}abK}{\sqrt{a^2r^6+2b^2}},$$

$$\Phi_2(r) = -\frac{3\sqrt{3}abK\left(a^2r^6-4b^2\right)}{\left(a^2r^6+2b^2\right)^{3/2}} +$$

$$+\frac{12\sqrt{3}GK}{3K+4G}\left[\frac{2}{r^3}\frac{a^2r^6-abr^3+b^2}{\sqrt{a^2r^6+2b^2}} + \frac{3}{r^3}\frac{a^3br^9-2b^4}{\left(a^2r^6+2b^2\right)^{3/2}}\right];$$

$$a = \frac{1}{3K}\frac{P_1R_1^3 - P_2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}, \quad b = \frac{1}{4G}\frac{(P_1-P_2)R_1^3R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Эффективность выведенных аналитических решений состоит в том, что их можно использовать при различных значениях заданных граничных нагрузок и различных соотношениях радиусов трубы простой подстановкой этих значений, без затрат на поиск соответствующего частного решения, а также возможности получить решение задачи о составной сфере из нелинейного гетерогенно-упругого материала.

В качестве примера приведем результаты расчетов для тонкостенного (R_1/R_2=9/10) полого шара при m = 7500 *МПа*, $l = 2m$. В табл. 1 приводятся поправки к классическому распределению окружного напряжения s_q/P_1 на внутренней поверхности шара при различных значениях материальных констант модели гетерогенно-упругой среды.

Таблица 1

Значения параметров	P_1/P_2			
	0	1/10	6/10	-1/10
$\nu = 0$, $\alpha = 0$	4.535	3.982	1.214	5.089
$\nu/\mu = 1/3$, $\alpha = 0$	4.526	3.971	1.199	5.080
$\nu = 0$, $\alpha/\mu = 1/3$	4.423	3.865	1.047	4.981

Если давление P_1 значительно больше P_2 (по абсолютной величине), то при $n \neq 0$, $a = 0$ поправки составляют 0,2%, при $n = 0$, $a \neq 0$ – 2,5%, а при $n = 0$ $a = 0$ – 36%. Если отношение давлений P_1/P_2 возрастает, то поправки к классическому решению составляют 1,2%, при $n = 0$ $a \neq 0$ – 13,8%. Распределение напряжения s_r незначительно откланяется от результатов классической теории упругости, поэтому здесь не приводится.

Частным случаем задачи Ламе для сферы является задача о сферической полости радиуса R в напряженном массиве (напряженное состояние на большом удалении от полости – равномерное всестороннее нагружение интенсивностью s_∞). Силы внутреннего давления на поверхности полости отсутствуют ($R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $P_1 = 0$ и $P_2 = -s_\infty$).

В табл. 2 приводится сравнение полученного решения с классическим и полным решением в квадратурах, где $\bar{s}_r = s_r/s_\infty$, $\bar{s}_q = s_q/s_\infty$, $\bar{r} = r/R$ – безразмерные переменные. Распределение напряжения $\bar{s}_q$ получено при $m = 7500$ *МПа*, $l = 2m$, $a = 0$ и $a = n/2$. Распределение $\bar{s}_r$ несущественно отличается от классического.

Таблица 2

Отношение параметров n/m	Равномерное всестороннее сжатие ($s_\infty < 0$)			Равномерное всестороннее растяжение ($s_\infty > 0$)		
	$a = 0$		$a = n/2$	$a = 0$		$a = n/2$
	$\bar{s}_q^*$	$\bar{s}_q$	$\bar{s}_q$	$\bar{s}_q^*$	$\bar{s}_q$	$\bar{s}_q$
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1/3	1.47	1.464	1.392	1.54	1.536	1.608
2/3	1.44	1.429	1.285	1.61	1.571	1.715

В случае $a = 0$ влияние разномодульности выражается при $s_\infty > 0$ в увеличении степени концентрации окружных напряжений (до 6%), при $s_\infty < 0$ – в их незначительном снижении (до 2,5%). Таким образом, это влияние сильнее сказывается при $s_\infty > 0$. Это согласуется с ранее полученным полным решением в квадратурах $\overline{s}_q^*$ [6]. Параметр a усиливает эффект разномодульности. При $a = n/2$ и $n/m = 1/3$ величины поправок к классическому решению по абсолютной величине достигают 7,2%, а при $n/m = 2/3$ они достигают 14,3%, т.е. увеличиваются почти в два раза.

Заключение

Разработанный алгоритм решения краевой задачи гетерогенной упругости составляет основу математического обеспечения вывода общего решения класса задач нелинейной гетерогенной упругости в аналитическом виде. Полученные формулы позволяют изучить некоторые особенности физической нелинейности, характерной для модели гетерогенно-упругой среды.

Достоверность представленных результатов обусловлена переходом в частном случае полученных решений в классические, совпадением аналитических решений с численным решением в квадратурах, а также использованием классического метода малых параметров.

Рассмотренные задачи имеют важное практическое значение, позволяя по данным формулам производить расчет технологических и прочностных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейников А.И.* Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // ПММ. – 1993. – Т. 57, № 5. – С.153-159.
2. *Олейников А.И., Могильников Е.В.* О единственности решения задач и устойчивости материала нелинейной гетерогенной упругости // ДАН. РАН. – 2001. – Т. 378, № 2. – С.194-196.
3. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
4. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Вища школа, 1982.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. – Т. VII. Теория упругости. – М.: Наука, 1973.
6. *Олейников А.И.* Напряженно-деформированное состояние разномодульной среды у сферической полости // ФТПРПИ. – 1988. – №4. – С.24-28.

E-mail
Сташкевич Марина Владимировна – cvmi@knastu.ru;
Олейников Александр Иванович – cvmi@knastu.ru.