УДК 519

© 2012 г. **О.С. Амосов**, д-р техн. наук,
(Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре),
Д.С. Магола, канд. техн. наук,
Е.А. Малашевская
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

ОЦЕНИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Излагается реализация оптимального нелинейного оценивания случайных последовательностей на основе нечеткого подхода с использованием кластеризации для повышения быстродействия алгоритмов.

Ключевые слова: Оптимальное нелинейное оценивание, случайная последовательность, нечеткая система, алгоритм Сугено, кластеризация, среда MatLab.

Введение

Традиционными способами решения задач оценки состояния объекта по информации, получаемой в результате измерений, являются байесовский и классический (небайесовский) подходы, метод наименьших квадратов [1 – 4].

Новым для задач оценивания является подход с использованием нечетких систем (FS) [4 – 7]. Сравнительный анализ алгоритмов оценивания на основе нечеткой логики с оптимальными в среднеквадратическом смысле традиционными алгоритмами показывает возможность их успешного применения при решении ряда сложных в вычислительном отношении задач оценивания, решаемых в рамках байесовской постановки [7].

Однако и для алгоритмов обучения нечетких систем возникают вычислительные трудности при использовании больших массивов данных [8], когда количество входов нечеткой системы более 5 или 6. Для их преодоления возможно использование алгоритмов кластеризации.

Поэтому целью данной работы является реализация оптимального нелинейного оценивания случайных последовательностей с использованием нечеткой системы с преодолением возникающих при ее обучении вычислительных трудностей за счет алгоритмов кластеризации.

Постановка задачи нерекуррентного оценивания случайной последовательности и ее байесовское решение для линейного случая приводятся ниже практически в том же виде, что и при использовании нейросетевого подхода для оценивания в работах [9, 10].

Постановка задачи нерекуррентного оценивания

Предположим, что существует недоступная непосредственному наблюдению n-мерная случайная последовательность $\mathbf{x}_i = (x_{1i},...,x_{ni})^{\text{т}}$, $i = 0, 1, ...$. Требуется, располагая статистически связанными с $\mathbf{x}_i$ значениями m-мерной случайной последовательности измерений $\mathbf{y}_j = (y_{1j},...,y_{mj})^{\text{т}}$, $j = \overline{1.k}$, найти оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\tilde{\mathbf{x}}_{i/k}$, минимизирующую критерий вида [3, 9, 10]:

$$J_{i/k} = M[(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i/k})^{\text{т}}(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i/k})], \tag{1}$$

где M определяет операцию взятия математического ожидания.

Введем составной вектор измерений $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{y}_1^{\text{т}},\ ...,\ \mathbf{y}_{k\text{-}1}^{\text{т}},\ \mathbf{y}_k^{\text{т}}]^{\text{т}}$ размерности $k \cdot m$ и определим оценку $\hat{\mathbf{x}}_{i/k}$ как n-мерную вектор-функцию измерений:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/k} = \mathbf{h}_i(\mathbf{Y}_k). \tag{2}$$

Таким образом, суть рассматриваемой задачи оценивания заключается в нахождении некоторым обоснованным способом n-мерной векторной функции измерений $\mathbf{h}_i(\mathbf{Y}_k)$, исходя из условия минимизации критерия (1).

Для критерия (1) оптимальная оценка (2) представляет собой условное математическое ожидание [1]

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/k} = M[\mathbf{x}_i / \mathbf{Y}_k] = \mathbf{h}_i(\mathbf{Y}_k) \tag{3}$$

и $\mathbf{h}_i$ для произвольных случайных последовательностей $\mathbf{x}_i$, $i = 0,1,...$ и $\mathbf{y}_j$, $j = \overline{1.k}$ является в общем случае нелинейной относительно измерений функцией.

Байесовское решение задачи нерекуррентного линейного оценивания

Предположим, что известны первые

$$\bar{\mathbf{x}}_i = M(\mathbf{x}_i); \overline{\mathbf{Y}}_k = M(\mathbf{Y}_k),$$

и вторые моменты

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i} = M[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)^{\text{т}}],$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_i\mathbf{Y}_k} = M[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{Y}_k - \overline{\mathbf{Y}}_k)^{\text{т}}];\ \mathbf{P}_{\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_k} = M[(\mathbf{Y}_k - \overline{\mathbf{Y}}_k)(\mathbf{Y}_k - \overline{\mathbf{Y}}_k)^{\text{т}}].$$

Из теории оценивания известно, что оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка, минимизирующая критерий (1) (оценка с минимальной дисперсией), при сделанных предположениях является линейной и определяется с помощью соотношения [1, 3]

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/k} = \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_i\mathbf{Y}_k}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{Y}_k\mathbf{Y}_k}\right)^{-1}[\mathbf{Y}_k - \overline{\mathbf{Y}}_k]. \tag{4}$$

Оценка (4) оптимальна в классе линейных алгоритмов (функция $\tilde{\mathbf{x}}_{i/k} = \mathbf{h}_i(\mathbf{Y}_k)$ – линейная) при произвольном характере совместной функции плотности распределения вероятности $p(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_k)$ для последовательностей $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{Y}_\mathbf{k}$. Если указанные последовательности являются совместно гауссовскими, то оценка

(4) является оптимальной без введения предположения о линейном характере функции $\tilde{\mathbf{x}}_{i/k} = \mathbf{h}_i(\mathbf{Y}_k)$, так как для критерия (1) оптимальная оценка в виде условного математического ожидания $\hat{\mathbf{x}}_{i/k} = M[\mathbf{x}_i / \mathbf{Y}_k]$ является линейной в силу гауссовости рассматриваемых случайных процессов [1, 3, 8].

Если $i > k$, задача называется задачей предсказания, если $i = k$ – задачей фильтрации, а при $i < k$ – задачей сглаживания. В дальнейшем будем рассматривать задачу, в которой $i = k$.

Решение задачи оценивания с использованием нечеткой системы

При решении задачи оценивания в рамках байесовского подхода предполагается, что априорная информация задана в виде совместной функции плотности распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_k)$ для последовательностей $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{Y}_k$. Использовании нечеткой системы для решения задачи оценивания в рамках байесовской постановки предполагает, как и в случае нейросетевого подхода [11] наличие набора данных (обучающей выборки)

$$\{(\mathbf{Y}_i^{(j)}, \mathbf{x}_i^{(j)})\}, \; j = \overline{1.L}, \tag{5}$$

в котором пары $\mathbf{Y}_i^{(j)}$, $\mathbf{x}_i^{(j)}$, $j = \overline{1.L}$, согласованы, в том смысле, что они представляют независимые между собой реализации случайного составного вектора $\mathbf{z} = [\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{Y}_i^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ с функцией плотности распределения вероятностей $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i)$ [11].

Если априорная информация задана в виде (5), то располагая таким набором данных и измерением $\mathbf{Y}_i$, можно найти с использованием нечеткой системы оценку $\hat{\mathbf{x}}^{FS}(\mathbf{Y}_i)$, минимизирующую критерий вида

$$\tilde{J} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{L} \left\| \mathbf{x}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{FS}(\mathbf{Y}_i^{(j)}) \right\|^2, \tag{6}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{FS}(\mathbf{Y}_i) = \mathbf{K}^{FS}(\mathbf{Y}_i, \tilde{\mathbf{W}}); \tag{7}$$

где $\mathbf{K}^{FS}(\mathbf{Y}_i, \tilde{\mathbf{W}})$ – нечеткая система; $\tilde{\mathbf{W}}$ - матрица, определяющая набор свободных параметров (параметры функций принадлежности и весовые коэффициенты правил); $\mathbf{Y}_i$ – вход нечеткой системы.

В соответствии с [7] для нахождения линейной оптимальной оценки может быть использована нечеткая система типа Сугено с линейным выходом и одним правилом:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{FS(j)}(\mathbf{Y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{w}_0 + \mathbf{W}\mathbf{Y}^{(j)}, \; j = \overline{1,n}.$$

При этом критерий оптимальности оценки может быть представлен в форме [7]:

$$\tilde{J}(\tilde{\mathbf{W}}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \mathbf{x}^{(j)} - (\mathbf{w}_0 + \mathbf{W}\mathbf{Y}^{(j)}) \right\|^2 \to \min,$$

где $\tilde{\mathbf{W}} = [\mathbf{w}_0 \,|\, \mathbf{W}]$ – матрица размерности $n \times (m+1)$ параметров нечеткой системы: n-мерный вектор смещений $\mathbf{w}_0$ и матрица весовых коэффициентов $\mathbf{W}$ размерности $n \times m$.

В работе [7] показана возможность получения оценки измеряемой величины $\mathbf{x}$, близкой к оптимальной (в среднеквадратическом смысле) нелинейной оценке с использованием систем нечеткого логического вывода типа Сугено с m входами и 2^m правилами:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{FS(j)} = \sum_{l=1}^{2^m} a_l^{(j)} \mathbf{K}_l^{FS}(\mathbf{Y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_l) / \sum_{l=1}^{2^m} a_l^{(j)},$$

где $a_l^{(j)} = f_{\&}(m_1(\mathbf{a}_1, y_1^{(j)}), m_2(\mathbf{a}_2, y_2^{(j)}), ..., m_m(\mathbf{a}_m, y_m^{(j)}))$; $f_{\&}(a,b) = \min(a,b)$ или $f_{\&}(a,b) = a \cdot b$; $\mathbf{K}_l^{FS}(\mathbf{Y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_l)$ – нечеткая система; $m_k(\mathbf{a}_k, y_k^{(j)})$ – функция принадлежности *i*-го входа; $k = \overline{1,m}$; $\mathbf{a}_k$ – вектор параметров для $m_k(\mathbf{a}_k, y_k^{(j)})$.

База знаний нечеткой системы это набор правил следующего типа:

$$R_l : \text{ЕСЛИ } \mathbf{Y}_i \text{ есть } \mathbf{Y}_i^{(j)}, \text{ ТО } \tilde{\mathbf{x}}_i^{FS} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{W}\mathbf{Y}_i,\ l = \overline{1,2^m}. \quad (8)$$

Для получения нечеткой оценки, близкой к оптимальной нелинейной оценке, необходимо для заданного количества измерений создать и обучить нечеткую систему.

Кластеризация

Для настройки параметров нечеткой системы используют геометрический метод точек максимума абсолютной ошибки, методы поиска с использованием генетических алгоритмов или методы кластеризации, в частности, алгоритм вычитающей кластеризации (subtractive clustering) и алгоритм нечеткой кластеризации (FCM-метод) [12].

В данной работе для повышения скорости настройки параметров нечеткой системы $\tilde{\mathbf{W}}$ применены перечисленные выше методы кластеризации. Кратко рассмотрим их суть.

Рассмотрим набор точек данных $\mathbf{z}_l = (z_{1l}, .., z_{pl})^{\mathrm{T}}$, $l = \overline{1.q}$. При вычитающей кластеризации предполагается, что каждая экспериментальная точка может быть центром кластера [13]. Сначала для каждой точки $\mathbf{z}_l$ рассчитывается «потенциал точки» D_l, основывающийся на плотности точек в заданной окрестности рассматриваемой точки:

$$D_l = \sum_{s=1}^{q} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_s\|^2}{(r_a/2)^2} \right).$$

Если у рассматриваемой точки $\mathbf{z}_l$ в заданной окрестности, которая определяется радиусом r_a, много соседних точек, значит, у нее высокий «потенциал» D_l. Точка с наибольшим потенциалом объявляется центром первого кластера. Например, точка $\mathbf{z}_{c1}$ с потенциалом D_{c1} объявлена центром первого кластера. После этого потенциалы всех остальных точек пересчитываются:

$$D_l = D_l - D_{c1} \exp\left(-\|\mathbf{z}_l - \mathbf{z}_{c1}\|^2 \Big/ \left(\frac{r_b}{2}\right)^2 \right),$$

где r_b – радиус окрестности, внутри которой у точек произойдет существенное сокращение «потенциалов». Обычно $r_b = r_a$. У точек, расположенных ближе к центру кластера «потенциал» сильно уменьшается, и вероятность выбора этих точек центром кластера ниже. Далее итерационно выбирается точка с наибольшим потенциалом $\mathbf{z}_{\max}$ и проверяется на возможность быть центром кластера по определенному алгоритму [13]. Эта процедура повторяется многократно.

Результатом вычитающей кластеризации являются найденные центры кластеров, причем каждая точка из набора данных $\mathbf{z}_l = \left(z_{1l},..,z_{pl}\right)^{\mathrm{т}}, l = \overline{1.q}$ принадлежит только одному кластеру.

При нечеткой кластеризации объекты принадлежат нескольким кластерам, но с разными степенями принадлежностей [12]. Результатом нечеткой кластеризации является матрица $\mathbf{M} = [h_{gh}]$ при выполнении следующих условий:

$$h_{gh} \in [0{,}1],$$

$$g = \overline{1.a}, h = \overline{1.b};$$

$$\sum_{g=1}^{a} h_{gh} = 1, h = \overline{1.b};$$

$$\sum_{h=1}^{b} h_{gh} \in (0, b), g = \overline{1.a},$$

где h_{gh} – степень принадлежности h-го объекта g-му подмножеству, a – количество кластеров.

При использовании евклидового расстояния задача нечеткой кластеризации состоит в нахождении такой матрицы степеней принадлежности $\mathbf{M}$ и таких координат центров кластеров $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_a)$, которые обеспечивают минимум следующего критерия:

$$\sum_{g=1}^{a}\sum_{h=1}^{b}(h_{gh})^l \cdot \left\|\mathbf{x}_h - \mathbf{v}_g\right\|^2 \to \min,$$

где $\mathbf{v}_g = \dfrac{\sum_{h=1}^{b}(h_{gh})^l \cdot \mathbf{x}_h}{\sum_{h=1}^{b} h_{gh}}$ – центр g-го кластера; $g = \overline{1{,}a}$, l – экспоненциальный вес ($l \geq 1$).

Режимы работы нечеткой системы

Для нечеткого оценивания аналогично нейросетевому подходу [9, 10] можно выделить два основных режима работы. Первый из них – режим построения нечеткой системы для решения задачи оценивания – можно назвать режимом синтеза, второй – это штатный режим оценивания в режиме реального времени.

В **режиме синтеза**, с использованием обучающего множества (5), отыскивается зависимость вида $\tilde{\mathbf{x}}^{FS(j)}(\mathbf{Y}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}})$, в соответствии с заданным критерием

(6), то есть отыскиваются оптимальные параметры $\tilde{\mathbf{W}}$ нечеткой системы. Особенностью предложенной для оценивания нечеткой системы является использование алгоритмов кластеризации.

В *штатном режиме* с использованием найденных на предыдущем режиме параметров $\tilde{\mathbf{W}}$ отыскивается оценка по составному вектору измерений $\mathbf{Y}_i^{(j)}$.

Среда моделирования

При создании нечетких систем типа Сугено авторами были использованы функции пакета Fuzzy Logic Toolbox среды Matlab, автоматизирующие синтез структуры нечеткой системы и настройку ее параметров.

Для синтеза нечеткой системы без использования кластеризации применяется функция genfis1, для вычитающей кластеризации – genfis2, для нечеткой кластеризации – genfis3.

Для настройки параметров нечеткой системы была применена адаптивная нейронечеткая система вывода ANFIS – Adaptive Network based Fuzzy Inference System.

Пример решения задачи оценивания

Пусть известны результаты k измерений $y_k = x + v_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где m – общее количество измерений; x – измеряемая величина, равномерно распределенная на отрезке [0; b]; $\mathbf{v}_k = [v_1, v_2, ..., v_m]^T$ – вектор ошибок измерения, независимых друг от друга и от величины x, причем v_k – случайные величины с нулевым математическим ожиданием, равномерно распределенные на [-a/2;+a/2]; a, b – константы. Примем $a = 1$; $b = 1$. Необходимо оценить x по результатам $k = \overline{1, m}$ измерений $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k = [y_1, y_2, ..., y_k]^T$ [14].

Рассмотрим нахождение оптимальной линейной оценки традиционным способом [3] применительно к нашей постановке задачи:

$$\tilde{x}^{lin}(\mathbf{y}) = \bar{x} + \mathbf{P}_{x\mathbf{y}}\mathbf{P}_{yy}^{-1}[\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}], \qquad (9)$$

$$P^{lin} = P_0 - \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_{yy}^{-1}\mathbf{P}_{yx}, \qquad (10)$$

где $\tilde{x}^{lin}(\mathbf{y})$ – оптимальная линейная оценка; P^{lin} – ковариация ошибок; $\bar{\mathbf{x}} = b/2$; $y = \dfrac{[b...b]^T}{2}$; $P_0 = s_0^2 = \dfrac{b^2}{12}$; $\mathbf{P}_{xy} = s_x^2\mathbf{H}^T$; $\mathbf{P}_{yy} = s_x^2\mathbf{I}_m + r^2\mathbf{E}_m$; $\mathbf{P}_{yx} = \mathbf{P}_{xy}$; $s_x^2 = \dfrac{b^2}{12}$; $r^2 = \dfrac{a^2}{12}$; $\mathbf{H} = [1...1]^T$ – m-мерный единичный вектор; $\mathbf{I}_m$ – матрица размерности $m \times m$, состоящая из единиц; $\mathbf{E}_m$ – единичная матрица размерности $m \times m$.

Для оценки точности найденной оценки $\tilde{x}^{lin}(\mathbf{y})$ используется расчетная среднеквадратическая ошибка

$$s_k^L = \sqrt{P^{lin}}. \qquad (11)$$

Согласно [14] оптимальная (в среднеквадратическом смысле) нелинейная оценка может быть получена как

$$\tilde{x}(\mathbf{y}) = \frac{c_2 + c_1}{2},$$

где $c_1 = \max\{0, d_1\}$; $c_2 = \min\{b, d_2\}$; d_1 – левая граница множества Ω; d_2 – правая граница множества Ω

$$\Omega = \bigcap_{j=1}^{m} \left[y_j - \frac{a}{2}, y_j + \frac{a}{2} \right].$$

Для моделирования генерировался обучающий массив данных $\{(\mathbf{y}^{(j)}, x^{(j)})\},\ j = \overline{1, L}$ и тестовый массив $\{(\tilde{\mathbf{y}}^{(j*)}, \tilde{x}^{(j*)})\},\ j* = \overline{1, L^*}$, $L = 10000$, $L^* = 1000$, количество измерений $m=8$.

СКО ошибок нелинейного оценивания вычисляется как

$$\tilde{s}_k^N \approx \sqrt{\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g}(e_k^{(j)})^2}, e_k^{(j)} = x^{(j)} - \tilde{x}^{(j)}(\mathbf{y}^{(j)}), k = \overline{1, m},\ g = \{L, L^*\}.$$

СКО ошибок нечеткого оценивания вычисляется как

$$\tilde{s}_k^{FS} \approx \sqrt{\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g}(e_k^{FS(j)})^2}, e_k^{FS(j)} = x^{(j)} - \tilde{x}^{FS(j)}(\mathbf{y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}), k = \overline{1, m},\ g = \{L, L^*\}.$$

На рис. 1 – 3 для обучающих (а, в) и тестовых (б, г) данных представлены: расчетное СКО ошибок линейного оценивания; СКО ошибок нелинейного оценивания; СКО ошибок нечеткого оценивания.

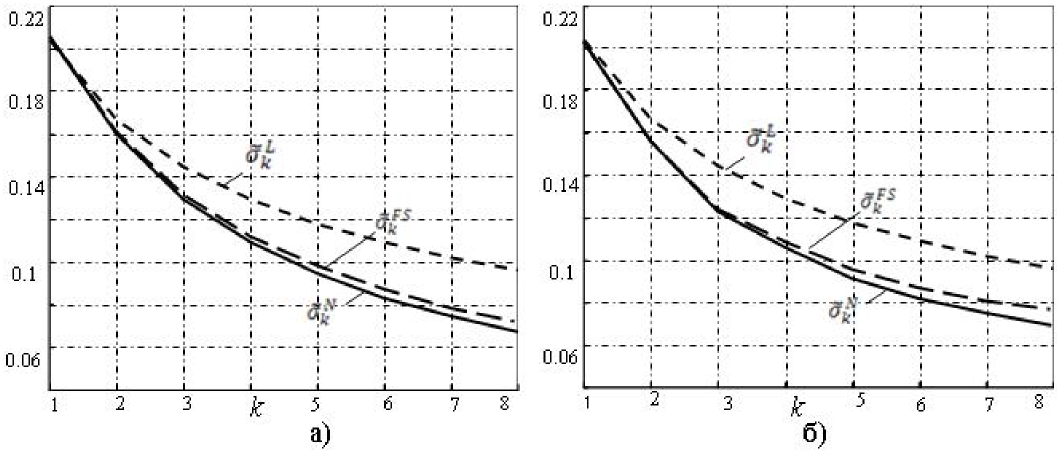

Рис. 1. СКО ошибок оценивания при Anfis-обучении FS, полученной из экспериментальных данных без проведения кластеризации.

Быстродействие представленных алгоритмов оценивания с использованием нечетких систем может характеризоваться временем, затраченным на обучение нечеткой системы, которое для рассматриваемого примера представлено в табл. 1, где приняты сокращения: 1-Anfis – Anfis-обучение нечеткой системы, полученной без использования кластеризации; 2-Anfis&SC1 – Anfis-обучение нечеткой системы, полученной с использованием алгоритма вычитающей кластеризации с радиусом влияния каждого кластера = 0.3 от диапазона изменения переменной; 3-Anfis&SC2 – Anfis-обучение нечеткой системы, полученной с использованием алгоритма вычитающей кластеризации с радиусом влияния каждого кластера = 0.4 от диапазона изменения переменной; 3-Anfis & FCM – Anfis-обучение нечеткой системы, полученной с использованием алгоритма нечеткой кластеризации (25 кластеров).

Обучение проводилось на компьютере Intel Celeron 2x2.0 GHz, 3.0 GB ОЗУ.

Таблица 1

Способ обучения	Время обучения, с							
	FS с 1 входом	FS с 2 входами	FS с 3 входами	FS с4 входами	FS с 5 входами	FS с 6 входа-ми	FS с 7 входа-ми	FS с 8 входами
1-Anfis	**1**	**2**	**4**	**14**	**69**	**383**	**3038**	**33875**
2-Anfis&SC1 а)	**11**	**21**	**56**	**153**	**587**	**2395**	**10778**	**-**
2 – Anfis&SC2 в)	**9**	**14**	**19**	**28**	**43**	**83**	**145**	**326**
3 – Anfis & FCM	**14**	**22**	**31**	**48**	**65**	**85**	**101**	**125**

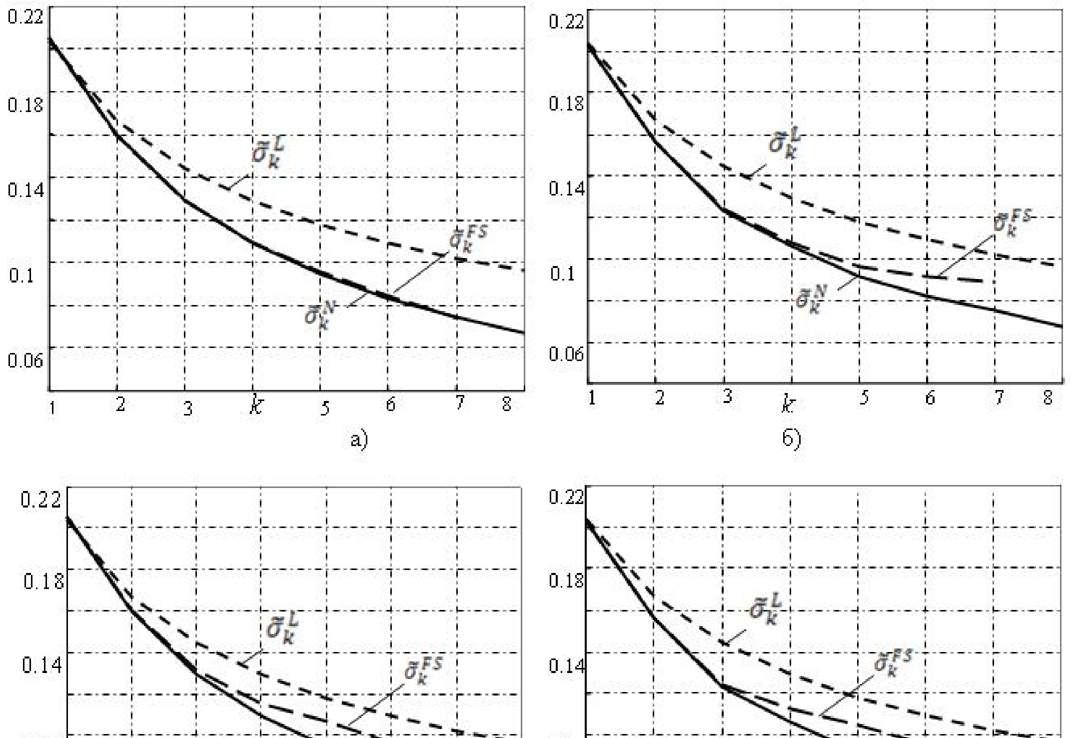

Рис. 2. СКО ошибок оценивания при Anfis-обучении FS, полученной из экспериментальных данных на основе алгоритма subtractive clustering кластеризации с разными параметрами.

Заключение

Точность оценивания с помощью нечетких (нейронечетких) систем без использования кластеризациии мало отличается от предельно достижимой точности оптимального нелинейного алгоритма. Однако, значительные трудности при реализации нейронечеткого оценивателя вызывает обучение нейронечеткой системы без использования алгоритмов кластеризации при количестве входов большем, чем 5-6.

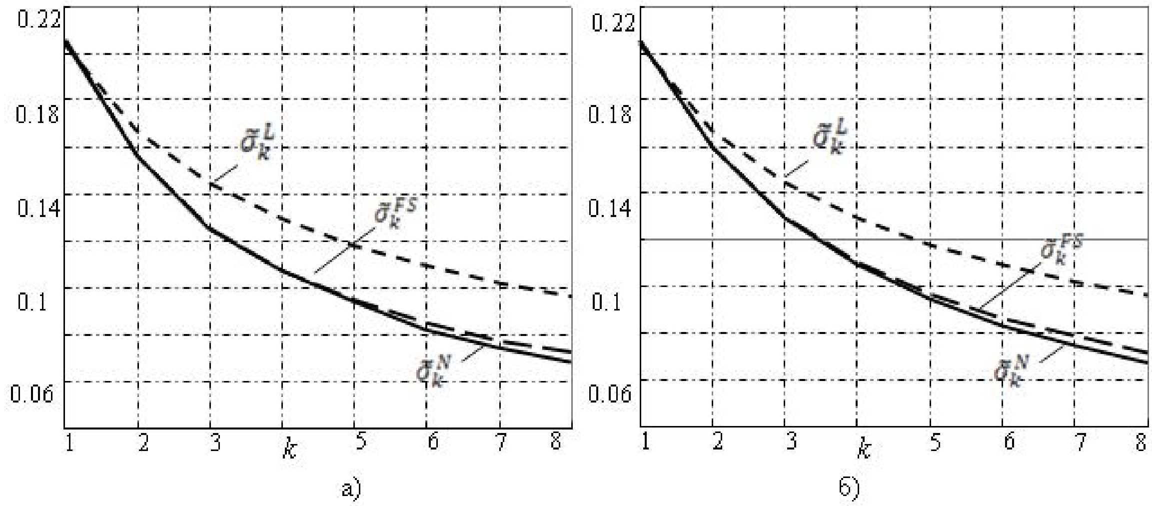

Рис. 3. СКО ошибок оценивания при Anfis-обучении FS, полученной из экспериментальных данных с использованием алгоритма fuzzyc-means кластеризации.

Для преодоления вычислительных трудностей авторами были использованы алгоритмы вычитающей кластеризации и кластеризации на основе нечетких центров. Точность оценивания с помощью нечетких систем при использовании алгоритма вычитающей кластеризации выше, чем для оптимального линейного алгоритма, но ниже предельно достижимой точности. Авторы считают, что применение вычитающей кластеризации требует дополнительного исследования.

Хорошие результаты получены для нечеткого оценивания при использовании нечеткой кластеризации. Точность нечеткого оценивателя в этом случае близка к предельно достижимой и быстродействие этого алгоритма значительно выше, чем алгоритмов без кластеризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление / пер с англ. под ред. А.С. Шаталова. – М.: Энергия, 1973.
2. *Ярлыков М.С., Миронов М.А.* Марковская теория оценивания случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1993.
3. *Степанов О.А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ГНЦ РФ–ЦНИИ «Электроприбор», 1998.
4. *Дмитриев С.П., Степанов О.А.* Нелинейная фильтрация в задачах обработки навигационной информации // Нелинейная теория управления и ее приложения: Сб. науч. тр. – М.: Физматлит, 2003. – С. 127-146.
5. *Амосов О.С.* Фильтрация марковских последовательностей на основе байесовского, нейросетевого подходов и систем нечеткой логики при обработке навигационной информации // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – Т. 43. – № 4. – С. 61–69.
6. *Амосов О.С.* Системы нечеткой логики для фильтрации марковских последовательностей // Информационные технологии. – 2004. – № 11. – С. 16–24.
7. *Amosov O. S., Amosova L. N.* Optimal estimation by using fuzzy systems. // Proc. of the 17-th World Congress IFAC. – Seoul, Korea, 2008. P 6094-6099.
8. *Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю.* Нечеткая логика и искусственные нейронные сети: Учеб.пособие. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.
9. *Степанов О.А., Амосов О.С.* Нерекуррентное линейное оценивание с использованием нейронной сети // Материалы III Всероссийской конф. «Математика, информатика, управление». – Иркутск, 2004. – С. 1 – 12.

10. *Stepanov O. A., Amosov O. S.* Nonrecurrent linear estimation and neural networks // Proc. of Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP) IFAC and Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO) IFAC. – Yokohama, Japan, 2004. – P. 213–218.
11. *Степанов О.А., Амосов О.С.* Байесовское оценивание с использованием нейронной сети // Авиакосмическое приборостроение. – 2004. – № 6. – С. 46–55.
12. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / пер. с англ. под ред. В.Ю. Тюменцева. – М.: Бином, 2011.
13. *Rantala J., Koivisto H.* Optimised Subtractive Clustering for Neuro-Fuzzy Models. // Proc. of the 3-th WSES International Conference. – Interlaken, Swetzerland, 2002. 6 p.
14. *Stepanov O. A., Amosov O. S.* Optimal estimation by using neural networks. // Proc. of the 16-th World Congress IFAC. – Prague, Czech Republic, 2005. 6 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии, академиком А.М. Шпилевым.

E-mail:
Амосов Олег Семенович – osa18@yandex.ru;
Магола Дмитрий Степанович – dmagola@list.ru;
Малашевская Елена Анатольевна – mea@email.kht.ru.

УДК 681.3.057.51-7.311.17

© 2011 г. **А.С. Клещев**, д-р физ.-мат. наук,
В.А. Тимченко, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ ДЛЯ РАСШИРЯЕМОЙ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДИАЛЕКТА[1]

Рассмотрена задача унификации для расширяемой модели математического диалекта и приведен алгоритм ее решения. Показано, что повышение уровня языка представления математических знаний, используемого в системах компьютерного доказательства теорем, ведет к заметному усложнению алгоритма унификации.

Ключевые слова: унификация, математическое утверждение, пропозициональное утверждение, метаматематическое утверждение, предметная переменная, пропозициональная переменная, синтаксическая переменная, модифицированная синтаксическая переменная, подстановка.

Введение

Унификация двух выражений (формул, термов) является одной из ключевых операций во многих процедурах логического вывода (например, процедурах,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-07-00460-а, и ДВО РАН, проект 12-III-А-01И-008.