3. *Коткин Г.Л., Черкасский В.С.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB: Учебное пособие. – Новосибирск: Новосибирский университет, 2001.
4. *Ксу Д.* Взаимодействие Matlab с ANSI C, Visual C++, Visual BASIC и Java. – М.: Питер, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Бушмановым

E-mail:
Потапов Дмитрий Александрович – div-x15@yandex.ru.

УДК 519.651

© 2012 г. **С.Н. Чуканов,** д-р техн. наук
(Омский филиал института математики СО РАН им. С.Л. Соболева)
А.А. Коблик
(Сибирская автомобильно-дорожная академия, Омск)

ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ ЛИ*

Предложен метод формирования интерполяционных сплайнов для точек многообразий, являющихся элементами однопараметрических групп Ли $SO(3)$ и $SE(3)$. Метод основан на алгоритме de Casteljau формирования сегмента кубического сплайна для лиевых групп.
Ключевые слова: интерполяционный сплайн, алгоритм de Casteljau, группа Ли, винтовое движение твердого тела.

Введение

Многие задачи интерполяции, имеющие применение в робототехнике и мехатронике, механике движения твердого тела, компьютерной графике и САПР, формулируются в многообразиях, представляемых однопараметрическими группами Ли, – например, группами $SO(3)$ и $SE(3)$. Как известно [1], лиевы группы $SO(3)$ могут быть использованы для представления вращательного движения твердого тела, а группы $SE(3)$ – для представления винтового движения твердого тела. В работе рассмотрено распространение алгоритма de Casteljau, используемого для интерполяции полиномиальными сплайнами точек евклидового пространства $\mathbf{R}^3$ [2], на методы формировании интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемым лиевыми группами $SO(3)$ и $SE(3)$. Метод, пред-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-07-00032а и № 11-08-01349а).

ставленный в работе, может быть распространен на многообразия, представляемые лиевыми группами $SO(n)$ и $SE(n)$.

Алгоритм de Casteljau формирования сегмента кубического сплайна по точкам евклидового пространства $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbf{R}^3$ заключается в последовательном построении линейных функций [3]: $\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$; $\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$; $\mathbf{b}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$, квадратичных полиномов: $\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t)$; $\mathbf{b}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_1^1(t) + t\mathbf{b}_2^1(t)$ и результирующей кубической функции сегмента сплайна: $\mathbf{s}(t) = \mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^2(t) + t\mathbf{b}_1^2(t)$; $\mathbf{s}(0) = \mathbf{b}_0$; $\mathbf{s}(1) = \mathbf{b}_3$.

В случае формирования гладкой кривой $\mathbf{s}(t): t \to \mathbf{R}^3; t \in [t_0, t_m] \in \mathbf{R}$, для которой выполняются условия интерполяции в моменты времени t_i, $i = 0, 1, \ldots, m$; $t_i < t_{i+1}$; $t_i, t_{i+1} \in [t_0, t_m]$ в форме:

$$\mathbf{s}(t_i) = \mathbf{p}_i; \dot{\mathbf{s}}(t_i) = \mathbf{v}_i, \qquad (1)$$

можно применить алгоритм, предложенный в [6], который определяет кривую сплайна $s_i(t) \in \mathbf{R}^3$, соединяющую точки $\mathbf{p}_i(t = 0)$ и $\mathbf{p}_{i+1}(t = 1)$. Для этого формируются точки $\mathbf{b}_0 = \mathbf{p}_i$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{v}_{i+1}$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{p}_{i+1}$, определяются линейные компоненты сегмента сплайна: $\mathbf{l}_i(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$; $\mathbf{c}_i(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_3$; $\mathbf{r}_i(t) = (1-t)\,\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$, квадратичные полиномы: $\mathrm{a}_i(t) = (1-t)\mathbf{l}_i(t) + t\mathbf{c}_i(t)$; $\mathrm{b}_i(t) = (1-t)\mathbf{c}_i(t) + t\mathbf{r}_i(t)$, для формирования кубического сплайна: $\mathbf{s}_i(t) = (1-t)\mathrm{a}_i(t) + t\mathrm{b}_i(t)$. Результирующий сплайн $\mathbf{s}(t)$: $\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_i((t-t_i)(t_{i+1}-t_i)^{-1})$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$ в моменты времени t_i удовлетворяет условиям (1).

Формирование интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемых ортогональной группой

Алгоритм de Casteljau может быть распространен на методы формировании интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемым группами Ли [4, 5]. Если многообразие – компактная и связная группа Ли G с инвариантными римановыми метриками, то геодезические этого многообразия выражаются через однопараметрические подгруппы. Группой будем считать множество с бинарной операцией умножения "$\circ$", определенной на элементах группы, если выполняются аксиомы: 1) если $g_1, g_2 \in G$, то $g_1 \circ g_2 \in G$; 2) существует такой элемент e, что: $g \circ e = e \circ g = g$; $\forall g \in G$; 3) существует обратный (инверсный) элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$. Группа, которая является конечномерным вещественным гладким многообразием и в которой групповые операции умножения и инверсии гладких отображений являются гладкими отображениями, называется вещественной лиевой группой. Алгебру лиевой группы G будем обозначать символом $\mathfrak{g}$.

Определим *специальную ортогональную группу*

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathrm{R}^{3\times3} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1\}$$

с элементами – трехмерными матрицами поворота от пространственной системы координат к системе координат, связанной с твердым телом, $g = \mathbf{R} \in SO(3)$; с операцией – умножением матриц, а также алгебру кососимметрических матриц $\mathrm{so}(3)=\{S\in\mathbf{R}^{3\times 3}: S^T=-S\}$. Введем оператор $\cdot:\ \omega=\begin{pmatrix}0 & -w_3 & w_2\\ w_3 & 0 & -w_1\\ -w_2 & w_1 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{so}(3)$; $\omega\in\mathbf{R}^3$. Тогда экспоненциальное отображение $\exp_{SO(3)}(\omega)$ может быть представлено в форме Родрига [1]:

$$\exp_{SO(3)}(\omega)=I+\|\omega\|^{-1}\sin(\|\omega\|)\omega+\|\omega\|^{-2}(1-\cos(\|\omega\|))\omega^2\in SO(3); \tag{2}$$

$$\omega\in so(3);\ \omega\in\mathbf{R}^3,$$

где ||w|| – евклидова норма вектора w – угловой скорости вращения относительно пространственной системы координат; логарифмическое отображение $\log_{SO(3)}(\mathbf{R})$ – в форме [1]

$$\log_{SO(3)}(\mathbf{R})=0{,}5f\cdot\operatorname{cosec}(f)(\mathbf{R}-\mathbf{R}^T)\in so(3);\mathbf{R}\in SO(3), \tag{3}$$

где $\cos(f)=0{,}5(\operatorname{trace}(\mathbf{R})-1);|f|<p;\operatorname{trace}(\mathbf{R})\neq -1$.

Рассмотрим метод формирования сегмента сплайна – функции $s_i(t)\in SO(3)$, который соединяет две ориентации твердого тела $\mathbf{R}_i(t=0)$ и $\mathbf{R}_{i+1}(t=1)$ в группе $SO(3)$; $\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_{i+1}\in SO(3)$ с соответствующими угловыми скоростями ω_i, ω_{i+1} относительно пространственной системы координат:

$$\dot{\mathbf{R}}_i=\omega_i\mathbf{R}_i;\dot{\mathbf{R}}_{i+1}=\omega_{i+1}\mathbf{R}_{i+1};\ \omega_i,\omega_{i+1}\in\mathrm{so}(3). \tag{4}$$

Для этого сформируем компоненты сегмента:

$$\begin{aligned}&l_i(t)=\exp_{SO(3)}(t\cdot\omega_i)\mathbf{R}_i;\\ &c_i(t)=\exp_{SO(3)}(t\cdot\xi_i)\mathbf{R}_i;\\ &r_i(t)=\exp_{SO(3)}((t-1)\omega_{i+1})\mathbf{R}_{i+1},\end{aligned} \tag{5}$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$l_i(0)=\mathbf{R}_i,l_i(1)=\exp_{SO(3)}(\omega_i)\mathbf{R}_i;$$

$$\dot{l}_i(0)=\omega_i\mathbf{R}_i,\dot{l}_i(1)=\omega_i\exp_{SO(3)}(\omega_i)\mathbf{R}_i;r_i(0)=\exp_{SO(3)}(-\omega_{i+1})\mathbf{R}_{i+1},r_i(1)=\mathbf{R}_{i+1};$$

$$c_i(0)=\mathbf{R}_i,c_i(1)=\mathbf{R}_{i+1};\dot{c}_i(0)=\xi_i\mathbf{R}_i,\dot{c}_i(1)=\xi_i\exp_{SO(3)}(\xi_i)\mathbf{R}_i;$$

$$\dot{r}_i(0)=\omega_{i+1}\exp_{SO(3)}(-\omega_{i+1})\mathbf{R}_{i+1},\dot{r}_i(1)=\omega_{i+1}\mathbf{R}_{i+1},$$

где

$$\xi_i=\log_{SO(3)}(\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{R}_i^T)\in\mathrm{so}(3). \tag{6}$$

Далее, определим функции:

$$\begin{aligned}&a_i(t)=\exp_{SO(3)}(t\cdot\log_{SO(3)}(c_i(t)l_i^T(t)))l_i(t);\\ &b_i(t)=\exp_{SO(3)}(t\cdot\log_{SO(3)}(r_i(t)c_i^T(t)))c_i(t),\end{aligned} \tag{7}$$

с граничными условиями:

$$a_i(0)=b_i(0)=\mathbf{R}_i;\ a_i(1)=b_i(1)=\mathbf{R}_{i+1};$$

$$\dot{a}_i(0)=\omega_i\mathbf{R}_i;\dot{a}_i(1)=\xi_i\exp_{SO(3)}(\xi_i)\mathbf{R}_i;\ \dot{b}_i(0)=\xi_i\mathbf{R}_i;\dot{b}_i(1)=\omega_{i+1}\mathbf{R}_{i+1}.$$

Результирующая функция сегмента сплайна определяется из соотношения:

$$s_i(t) = \exp_{SO(3)}\left(t \cdot \log_{SO(3)}\left(b_i(t) a_i^T(t)\right)\right) a_i(t) \in SO(3). \qquad (8)$$

Кривая $s_i(t)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$s_i(0) = \mathbf{R}_i, s_i(1) = \mathbf{R}_{i+1}; \dot{s}_i(0) = \omega_i \mathbf{R}_i, \dot{s}_i(1) = \omega_{i+1} \mathbf{R}_{i+1}. \qquad (9)$$

Результирующий сплайн может быть представлен в форме: $s(t) = s_i((t - t_i)(t_{i+1} - t_i)^{-1})$, $t \in [t_i,\ t_{i+1}]$, который в контрольных точках удовлетворяет условиям $s(t_i) = \mathbf{R}_i$; $\dot{s}(t_i) = \omega_i \mathbf{R}_i; i = 0,1,\ldots,m$.

Пример формирования точек сплайна для многообразия, представляемого группой $SO(3)$

Рассмотрим пример формирования точек сегмента сплайна для многообразия, представляемого группой $SO(3)$, который соединяет две положения твердого тела относительно пространственной (инерциальной) системы координат

$$\mathbf{R}_i(t=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{R}_{i+1}(t=1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

с угловыми скоростями в этих точках $w_i = (0\ \pi/2\ 0)^T$; $w_{i+1} = (0\ 0\ -\pi/2)^T$.

В табл. 1 приведены значения элементов группы $SO(3)$ – матриц вращения для различных значений параметра t функции сегмента сплайна.

Таблица 1

t	$g \in SO(3)$
0	$\mathbf{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
0,25	$\mathbf{R}(0{,}25) = \begin{pmatrix} 0{,}9906 & 0{,}1353 & 0{,}0218 \\ -0{,}1370 & 0{,}9813 & 0{,}1353 \\ 0 & -0{,}1370 & 0{,}9906 \end{pmatrix}$
0,5	$\mathbf{R}(0{,}5) = \begin{pmatrix} 0{,}7904 & 0{,}5306 & -0{,}3062 \\ -0{,}3211 & 0{,}7844 & 0{,}5306 \\ 0{,}5217 & -0{,}3211 & 0{,}7904 \end{pmatrix}$
0,75	$\mathbf{R}(0{,}75) = \begin{pmatrix} 0{,}2720 & 0{,}9043 & -0{,}3291 \\ -0{,}1851 & 0{,}3848 & 0{,}9043 \\ 0{,}9443 & -0{,}1851 & 0{,}2720 \end{pmatrix}$
1	$\mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Формирование интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемых евклидовой группой

Определим *специальную евклидову группу*

$SE(3)=\{(\mathbf{d},\mathbf{R}):\mathbf{d}\in\mathbf{R}^3;\mathbf{R}\in SO(3)\}=\mathbf{R}^3\times SO(3)$

с элементами: $g=(\mathbf{d},\mathbf{R})=\begin{pmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in SE(3);\mathbf{R}\in SO(3);\mathbf{d}\in\mathbf{R}^3$, где $\mathbf{d}$ – положение центра твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$; $\mathbf{R}$ – матрица поворота твердого тела от пространственной (инерциальной) системы координат к системе координат, связанной с твердым телом; операцией

$$g_1\circ g_2=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1 & \mathbf{d}_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\mathbf{R}_2 & \mathbf{d}_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{d}_2+\mathbf{d}_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in SE(3);$$

и обратным элементом $g^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in SE(3)$.

Элементы алгебры $se(3)$ могут быть представлены в форме:

$$\xi=\begin{pmatrix}\omega & \mathbf{v}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in se(3);\ \omega\in so(3);\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3.$$

Тогда экспоненциальное отображение $\exp_{SE(3)}(\mathbf{X})\in SE(3)$; $\mathbf{X}=(\phi,\mathbf{q})\in se(3)$ имеет вид [1]:

$$\exp_{SE(3)}(\phi)=\begin{pmatrix}\exp_{SO(3)}(\phi) & A(\phi)\mathbf{q}\\ 0 & 1\end{pmatrix};\tag{10}$$

где $A(\phi)=\mathbf{I}+\|\phi\|^{-2}(1-\cos(\|\phi\|))\phi+\|\phi\|^{-3}(\|\phi\|-\sin(\|\phi\|))\phi^2\in SO(3)$; $\phi\in se(3)$; $\phi\in\mathbf{R}^3$;
логарифмическое отображение $\log_{SE(3)}(\mathbf{R},\mathbf{p})\in se(3)$

$$\log_{SE(3)}(\mathbf{R},\mathbf{p})=\begin{pmatrix}\phi & A^{-1}(\phi)\mathbf{p}\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \phi=\log_{SO(3)}(\mathbf{R}),\tag{11}$$

где $A^{-1}(\phi)=\mathbf{I}-0{,}5\,\phi+(1-0{,}5\|\phi\|\cdot\cot(0{,}5\|\phi\|))\|\phi\|^{-2}\,\phi^2;\ \|\phi\|\neq 0$.

Рассмотрим метод формирования сегмента сплайна – функции $s_i(t)$, который соединяет две точки $g_i(t=0)$ и $g_{i+1}(t=1)$ в группе $SE(3)$; $g_i,g_{i+1}\in SE(3)$ со скоростями:

$$\dot{g}_i=\xi_i g_i;\ \dot{g}_{i+1}=\xi_{i+1}g_{i+1};\ \xi_i,\ \xi_{i+1}\in se(3);\ \xi=\begin{pmatrix}\omega & \mathbf{v}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in se(3).\tag{12}$$

Для этого сформируем компоненты сегмента:

$$\begin{aligned}&l_i(t)=\exp_{SE(3)}(t\cdot\xi_i)g_i;\\ &c_i(t)=\exp_{SE(3)}(t\cdot\mathbf{e}_i)g_i;\\ &r_i(t)=\exp_{SE(3)}((t-1)\,\xi_{i+1})g_{i+1}.\end{aligned}\tag{13}$$

удовлетворяющие граничным условиям: $l_i(0)=g_i,l_i(1)=\exp_{SE(3)}(\xi_i)g_i$;

$$\dot{l}_i(0)=\xi_i g_i,\ \dot{l}_i(1)=\xi_i \exp_{SE(3)}(\xi_i)g_i;\ c_i(0)=g_i, c_i(1)=g_{i+1};$$
$$\dot{c}_i(0)=\mathbf{e}_i g_i,\ \dot{c}_i(1)=\mathbf{e}_i \exp_{SE(3)}(\mathbf{e}_i)g_i;\ r_i(0)=\exp_{SE(3)}(-\xi_{i+1})g_{i+1}, r_i(1)=g_{i+1};$$
$$\dot{r}_i(0)=\xi_{i+1}\exp_{SE(3)}(-\xi_{i+1})g_{i+1},\ \dot{r}_i(1)=\xi_{i+1}g_{i+1},$$

где
$$\xi_i=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_{i+1}\mathbf{R}_i^T & \mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_i\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in \mathrm{se}(3). \quad (14)$$

Определим функции:
$$a_i(t)=\exp_{SE(3)}\left(t\cdot\log_{SE(3)}\left(c_i(t)l_i^{-1}(t)\right)\right)l_i(t); \quad (15)$$
$$b_i(t)=\exp_{SE(3)}\left(t\cdot\log_{SE(3)}\left(r_i(t)c_i^{-1}(t)\right)\right)c_i(t)\ ,$$

с граничными условиями: $a_i(0)=b_i(0)=g_i$; $a_i(1)=b_i(1)=g_{i+1}$; $\dot{a}_i(0)=\xi_i g_i$;
$$\dot{a}_i(1)=\xi_i\exp_{SE(3)}(\xi_i)g_i;$$
$$\dot{b}_i(0)=\xi_i g_i;\ \dot{b}_i(1)=\xi_{i+1}g_{i+1}.$$

Сегмент сплайна определяется из соотношения:
$$s_i(t)=\exp_{SE(3)}\left(t\cdot\log_{SE(3)}\left(b_i(t)a_i^{-1}(t)\right)\right)a_i(t). \quad (16)$$

Кривая $s_i(t)$ удовлетворяет граничным условиям:
$$s_i(0)=g_i, s_i(1)=g_{i+1};\ \dot{s}_i(0)=\xi_i g_i, \dot{s}_i(1)=\xi_{i+1}g_{i+1}. \quad (17)$$

Результирующий сплайн может быть представлен в форме:

$s(t) = s_i((t-t_i)(t_{i+1}-t_i)^{-1}),\ t\in[t_i,t_{i+1}]$,

который в контрольных точках удовлетворяет условиям $s(t_i)=g_i$; $\dot{s}(t_i)=\xi_i g_i$; $i=0,1,\ldots,m$.

Пример формирования точек сплайна для многообразия, представляемого группой *SE*(3)

Рассмотрим пример формирования точек сегмента сплайна для многообразия, представляемого группой *SE*(3), который соединяет две точки
$$g_i(t=0)=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ g_i(t=1)=\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

со скоростями
$$\dot{g}_i(t=0)=\begin{pmatrix}0&0&p/2&0\\0&0&0&1\\-p/2&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\ \dot{g}_{i+1}(1)=\begin{pmatrix}0&p/2&0&0\\-p/2&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В табл. 2 приведены значения элементов группы $SE(3)$ – матриц винтового движения для различных значений параметра t функции сегмента сплайна.

Таблица 2

t	$g \in SE(3)$
0	$g(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
0,25	$g(0{,}25)=\begin{pmatrix}0{,}9906 & 0{,}1353 & 0{,}0218 & 0{,}688\\ -0{,}1370 & 0{,}9813 & 0{,}1353 & 0{,}141\\ 0{,}5217 & -0{,}1370 & 0{,}9906 & 0{,}047\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
0,5	$g(0{,}5)=\begin{pmatrix}0{,}7904 & 0{,}5306 & -0{,}3062 & 0\\ -0{,}3211 & 0{,}7844 & 0{,}5306 & 0{,}125\\ 0{,}5217 & -0{,}3211 & 0{,}7904 & 0{,}125\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
0,75	$g(0{,}75)=\begin{pmatrix}0{,}2720 & 0{,}9043 & 0{,}0218 & -0{,}688\\ -0{,}1851 & 0{,}3848 & 0{,}9043 & 0{,}047\\ 0{,}5217 & -0{,}1851 & 0{,}2720 & 0{,}141\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
1	$g(1)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Заключение

В работе рассмотрен метод формирование интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемых группами $SO(3)$ и $SE(3)$. В работе [2] представлены методы вычисления экспоненциальных отображений для элементов лиевых алгебр $so(n)\to SO(n)$, $se(n)\to SE(n)$ и логарифмических отображений для элементов лиевых матричных групп $SO(n)\to so(n)$, $SE(n)\to se(n)$ при значениях $n > 3$. Поэтому метод формирования интерполяционных сплайнов для многообразий может быть распространен на группы $SO(n)$ и $SE(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crouch P., Kun G., Leite F.* The De Casteljau algorithm on Lie groups and spheres. // J.Dynam.Control Systems. – 1999. – Vol.5, No3. – P.397-429.
2. *Farin G.* Curves and surfaces for CAGD. – Academic Press Inc., 2002.
3. *Gallier J., Xu D.* Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices. // Int.Journ.of Robotics and Automation. – 2002. – Vol.17, No. 4. – P.1-11.
4. *Murray R.M., Li Z., Sastry S.S.* A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation – CRC Press., 1994.
5. *Park F.C., Ravani B.* Bezier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematics applications. // ASME J. Mechanical Design. – 1995. – Vol.117, No.1. – P.36-40.
6. *Rodrigues R., Leite F., Jakubiak J.* A new geometric algorithm to generate smooth interpolating curves on riemannian manifolds // LMS J.Comp.Math. – 2005. – Vol.8. – P.251-266.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Л. Ереминым

E-mail:
Чуканов Сергей Николаевич – ch_sn@mail.ru;
Коблик Андрей Александрович – dron_as87@mail.ru.