



УДК 004.052.32

© 2012 г. **Д.В. Ефанов**, канд. техн. наук,  
**А.А. Блюдов**

(Петербургский государственный университет путей сообщения)

## **КОДЫ ХЭММИНГА И ИХ ОБНАРУЖИВАЮЩИЕ СПОСОБНОСТИ В СХЕМАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОНТРОЛЯ**

Исследуются обнаруживающие способности кодов Хэмминга на случай возникновения ошибок в информационных разрядах, что актуально в схемах функционального контроля логических устройств. Приводится формула расчета вероятности возникновения необнаруживаемых ошибок в кодах Хэмминга, рассматриваются вероятностные свойства данного класса кодов. Дано сравнение обнаруживающих способностей различных кодов, используемых при организации схем функционального контроля.

**Ключевые слова:** код Хэмминга, функциональный контроль, информационные разряды, необнаруживаемая ошибка, вероятность.

### **Введение**

В современном мире микропроцессорной техники довольно широкое распространение получили комбинационные логические устройства, не обладающие памятью. Реализованные в виде одной микросхемы, подобные устройства могут иметь десятки выходов. Наиболее важной проблемой при использовании комбинационных схем в структурах, обеспечивающих протекание ответственных технологических процессов, является организация их надежного функционирования. Находят применение методы технической диагностики, одним из которых является функциональный контроль. Функциональный контроль – это такой вид диагностирования, который не требует отключения объекта от работы для подачи специальных проверочных воздействий, т.е. процесс определения технического состояния объекта проводится в рабочем режиме [1].

При организации схем функционального контроля часто используют свойства избыточных равномерных кодов [2], наиболее удобными из которых являются делимые. В кодовых векторах таких кодов выделяются информационные и контрольные составляющие. Информационный вектор формируется на контролируемом комбинационном дискретном устройстве, а контрольный – в схеме дополнения. Известно достаточно большое разнообразие делимых кодов, используемых при организации схем функционального контроля [3], все они обладают различным количеством контрольных разрядов, получаемых по различным

правилам, и, исходя из этого, различными способностями по обнаружению ошибок в информационных векторах (табл. 1).

Таблица 1

Число информационных разрядов	Доля необнаруживаемых ошибок информационных разрядов от общего числа ошибок в них, %										
	Линейные коды с суммированием			Нелинейные коды с суммированием							
	Код паритета (P)	Модифицированный код паритета (PM)	Код Хэмминга (H)	Классический код с суммированием (код Бергера) (S)	Семейство модульных кодов с суммированием			Семейство модифицированных кодов с суммированием			
					S4	S8	S16	RS2	RS4	RS8	RS16
2	33,333	0	0	16,667				33,333			
3	42,857	14,286	14,286	21,429				14,286			
4	46,667	20	6,667	22,5	23,333			20	10		
5	48,387	22,581	3,226	22,177	24,194			22,581	11,29		
6	49,206	23,81	4,762	21,329	24,603			23,81	11,905		
7	49,606	24,409	5,512	20,325	24,803			24,409	12,205		
8	49,804	24,706	5,882	19,323	24,902	19,326		24,706	12,353	9,522	
9	49,902	24,853	6,067	18,388	24,951	18,401		24,853	12,427	9,13	
10	49,951	24,927	6,158	17,539	24,976	17,575		24,927	12,463	8,779	
11	49,976	24,963	6,204	16,778	24,988	16,852		24,963	12,482	8,409	
12	49,988	24,982	3,101	16,098	24,994	16,224		24,982	12,491	8,105	
13	49,994	24,991	3,113	15,488	24,997	15,684		24,991	12,495	7,839	
14	49,997	24,995	3,119	14,939	24,998	15,22		24,995	12,498	7,609	
15	49,998	24,998	3,122	14,444	24,999	14,823		24,989	12,499	7,411	
16	49,999	24,999	3,124	13,994	24,999	14,483	13,994	24,999	12,499	7,28	6,997

В табл. 1 учтен опыт в области исследования свойств кодов на случай возникновения искажений в информационных векторах, что актуально для схем функционального контроля, и рассчитаны доли необнаруживаемых ошибок информационных векторов различных разделимых кодов от общего числа ошибок в них. На примере кодов для различного числа информационных разрядов можно проследить изменение данной величины.

### Код Хэмминга в схемах функционального контроля

Обратим внимание на коды Хэмминга [4], разработанные в первой половине XX в. и опубликованные в 1950 г. их создателем Р.У. Хэммингом. Благодаря своим коррекционным способностям данные коды нашли применение в телекоммуникации (к примеру, международный телеграфный код – код Хэмминга), а также в компьютерных технологиях (программах хранения данных и в памяти). Известны применения кодов Хэмминга в устройствах железнодорожной автоматики и телемеханики, – например, в системе автоматической локомотивной сигнализации единого ряда (АЛС-ЕН) [5]. Код удобен и для использования его

свойств при организации схем функционального контроля комбинационных логических устройств [1]. Пример одной из таких схем дан на рис. 1.

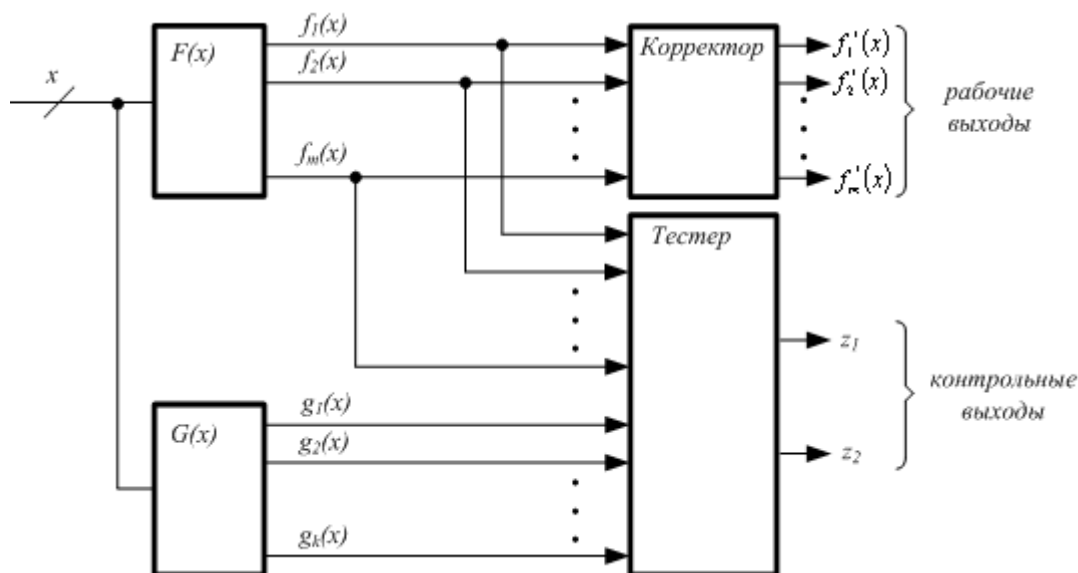


Рис. 1. Схема контроля по коду Хэмминга.

Код Хэмминга, как и иные приведенные в табл. 1, является равномерным делимым кодом. Контрольные разряды кода располагаются среди информационных, ими заняты разряды кодового вектора, номера которых представляют собой степени числа два.

С правилами вычисления контрольных разрядов кода Хэмминга можно познакомиться в работах [2, 4, 6].

Приведем пример формирования контрольных векторов кодов Хэмминга с использованием следующего алгоритма [6, 7]:

- 1) все разряды кода нумеруются десятичными числами, начиная с единицы;
- 2) каждое десятичное число преобразуется в двоичное;
- 3) нумеруются контрольные разряды по степени числа 2, которое их образует;
- 4) для получения значения  $i$ -го контрольного разряда выполняется операция суммирования по модулю два тех информационных разрядов, в двоичном эквиваленте номеров которых на  $i$ -м месте справа стоит единица.

В табл. 2 дан пример построения кодового вектора код Хэмминга с  $m=5$ .

Таблица 2

Десятичный номер разряда	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Двоичный номер разряда	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
Контрольные разряды	$g_1$	$g_2$		$g_3$				$g_4$	
Информационные разряды			$f_1$		$f_2$	$f_3$	$f_4$		$f_5$
Информационный вектор			0		1	1	1		0
Контрольный вектор	0	0		1				0	

Для построения контрольных разрядов  $g_i$  используются формулы (см. п.4 алгоритма построения кода Хэмминга):

$$\begin{cases} g_1 = f_1 \oplus f_2 \oplus f_4 \oplus f_5 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0; \\ g_2 = f_1 \oplus f_3 \oplus f_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0; \\ g_3 = f_2 \oplus f_3 \oplus f_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1; \\ g_4 = f_5 = 0. \end{cases}$$

Такой подход к построению кода позволяет не только обнаруживать ошибки, но и исправлять ошибки кратности  $d = 1$ . В схемах функционального контроля важным является процесс обнаружения ошибок именно в информационных векторах, так как они несут «рабочую» информацию (рис. 1). В своем исследовании мы будем выделять информационные разряды в информационный вектор, а контрольные – в контрольный. Код Хэмминга будем обозначать как  $H(n,m)$ -код, где  $n$  – общее число разрядов;  $m$  – число информационных разрядов (число контрольных разрядов в таком случае вычисляется как  $k = n - m$ ).

На рис. 1 предложен один из вариантов организации функционального контроля по коду Хэмминга: дополнение блока основной логики  $F(x)$  модулем контрольной логики  $G(x)$ , вычисляющим такие функции  $g_i(x)$ , что выходной вектор, образуемый выходами обоих блоков  $F(x)$  и  $G(x)$ , принадлежит некоторому коду Хэмминга. Факт принадлежности формируемого на выходах блоков  $F(x)$  и  $G(x)$  кода некоторому коду Хэмминга фиксирует схема тестера. В случае возникновения ошибок в блоках основной и контрольной логик на выходах тестера вырабатывается непарафазный сигнал  $\langle 00 \rangle$  или  $\langle 11 \rangle$ .

Особенностью организации схем функционального контроля по коду Хэмминга является возможность добавления в контрольное оборудование корректора однократных ошибок [6]. Это отличает код Хэмминга от других кодов, используемых в схемах функционального контроля (коды с повторением, коды паритета, равновесные коды, коды с суммированием) [1, 3, 8, 9, 10].

Известны различные подходы к синтезу контрольной аппаратуры в составе схем функционального контроля по различным избыточным кодам [1,3, 10 – 14]. Главным свойством при этом для любого из них является получение так называемой самопроверяемой схемы [3]. Особенности синтеза контрольной части схемы по коду Хэмминга изложены в [6].

Далее в разделах работы исследуются вероятностные характеристики кодов Хэмминга по обнаружению ошибок в схемах функционального контроля.

### Обнаруживающие способности кодов Хэмминга

Экспериментальными расчетами для каждого кода  $H(n,m)$  были получены число необнаруживаемых ошибок кратности  $d$  и общее число ошибок данной кратности. Часть результатов сведена в табл. 3, где в каждой клетке представлена дробь: в числителе – число необнаруживаемых ошибок кратности  $d$ , а в знаменателе – общее число ошибок той же кратности.

Исходя из данных табл. 3, были получены доли необнаруживаемых ошибок кратностей  $d$  от общего числа ошибок тех же кратностей. Эти величины обозначены как  $b_m^d$  (табл. 4). Доли ошибок кратности  $d = 11$  не приведены, поскольку равны нулю.

Таблица 3

Кратность ошибки, $d$	$m$								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\frac{0}{24}$	$\frac{0}{64}$	$\frac{0}{160}$	$\frac{0}{384}$	$\frac{0}{896}$	$\frac{0}{2048}$	$\frac{0}{4608}$	$\frac{0}{10240}$	$\frac{0}{22528}$
2	$\frac{0}{24}$	$\frac{0}{96}$	$\frac{0}{320}$	$\frac{0}{960}$	$\frac{0}{2688}$	$\frac{0}{7168}$	$\frac{0}{18432}$	$\frac{0}{46080}$	$\frac{0}{112640}$
3	$\frac{8}{8}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{32}{320}$	$\frac{128}{1280}$	$\frac{256}{4480}$	$\frac{1280}{14336}$	$\frac{3584}{43008}$	$\frac{10240}{122880}$	$\frac{26624}{337920}$
4	–	$\frac{0}{16}$	$\frac{0}{160}$	$\frac{64}{960}$	$\frac{384}{4480}$	$\frac{1280}{17920}$	$\frac{4608}{64512}$	$\frac{15360}{215040}$	$\frac{51200}{675840}$
5	–	–	$\frac{0}{32}$	$\frac{0}{384}$	$\frac{256}{2688}$	$\frac{512}{14336}$	$\frac{3072}{64512}$	$\frac{12288}{258048}$	$\frac{51200}{946176}$
6	–	–	–	$\frac{0}{64}$	$\frac{0}{896}$	$\frac{512}{7168}$	$\frac{3072}{43008}$	$\frac{15360}{215040}$	$\frac{55296}{946176}$
7	–	–	–	–	$\frac{0}{128}$	$\frac{256}{2048}$	$\frac{1536}{18432}$	$\frac{10240}{122880}$	$\frac{47104}{675840}$
8	–	–	–	–	–	$\frac{0}{256}$	$\frac{0}{4608}$	$\frac{0}{46080}$	$\frac{20480}{337920}$
9	–	–	–	–	–	–	$\frac{0}{512}$	$\frac{0}{10240}$	$\frac{6144}{112640}$
10	–	–	–	–	–	–	–	$\frac{1024}{1024}$	$\frac{2048}{22528}$
11	–	–	–	–	–	–	–	–	$\frac{0}{2048}$
Всего (1-11)	$\frac{8}{56}$	$\frac{16}{240}$	$\frac{32}{992}$	$\frac{192}{4032}$	$\frac{896}{16256}$	$\frac{3840}{65280}$	$\frac{15872}{261632}$	$\frac{64512}{1047552}$	$\frac{260096}{4192256}$

Таблица 4

Код	Кратность ошибок, $d$								
	3	4	5	6	7	8	9	10	
$H(6,3)$	1								
$H(7,4)$	0,25	0							
$H(9,5)$	0,1	0	0						
$H(10,6)$	0,1	0,06667	0	0					
$H(11,7)$	0,05714	0,08571	0,09524	0	0				
$H(12,8)$	0,08929	0,07143	0,03571	0,07143	0,125	0			
$H(13,9)$	0,08333	0,07143	0,04762	0,07143	0,08333	0	0		
$H(14,10)$	0,08333	0,07143	0,04762	0,07143	0,08333	0	0	1	
$H(15,11)$	0,07879	0,07576	0,05411	0,05844	0,0697	0,06061	0,05455	0,09091	

Из специфики построения кода Хэмминга следует очень важное его свойство (оно также прослеживается по табл. 3).

*Свойство 1.* В любом коде Хэмминга отсутствуют наиболее вероятные наблюдаемые ошибки кратностей  $d = 1$  и  $d = 2$ .

Отметим, что свойство 1 определяет приоритет кодов Хэмминга над иными кодами, используемыми при организации схем функционального контроля, что будет показано далее. Значения величин  $b_m^d$  дают возможности для оценки величины вероятности возникновения необнаруживаемых ошибок в кодах Хэмминга.

### Формула расчета вероятности появления необнаруживаемых искажений информационных векторов кодов Хэмминга

Пусть в процессе функционирования в блоке основной логики  $F(x)$  происходят отказы. Не рассматривая природу возникновения отказов внутренней структуры блока  $F(x)$ , остановим свое внимание на их проявлениях в виде искажений выходных функций. Положим, что появление кодовых векторов, формируемых на выходе блока  $F(x)$ , равновероятно, а события искажений – независимы. За  $p$  обозначим вероятность отсутствия искажения  $i$ -го разряда. Тогда вероятность искажения  $d$  разрядов можно описать выражением:

$$Q_l = (1-p)^d p^{m-d}, \quad (1)$$

где  $m$  – число информационных разрядов кода Хэмминга; сомножитель  $(1-p)^d$  – вероятность искажения  $d$  разрядов;  $p^{m-d}$  – вероятность правильно передаваемых  $m-d$  разрядов.

Существует некоторое количество вариантов искажений кратности  $d$ , его можно вычислить как число сочетаний искажений в  $d$  разрядах из  $m$  (таким образом появляется биномиальный коэффициент  $C_m^d$ ). Учтем, кроме того, доли необнаруживаемых искажений в информационных векторах кратности  $d$  от общего числа искажений той же кратности –  $b_m^d$ . Тогда по следующей формуле мы можем вычислить вероятность возникновения необнаруживаемой ошибки кратности  $d$ :

$$Q_m^d = b_m^d C_m^d (1-p)^d p^{m-d}. \quad (2)$$

Суммируя  $Q_m^d$  по всем кратностям необнаруживаемых ошибок, принадлежащих данному коду  $d \in H(n, m)$ , получим выражение, позволяющее подсчитать вероятность возникновения необнаруживаемой ошибки в коде Хэмминга:

$$Q_m = \sum_{d \in H(n, m)} Q_m^d = \sum_{d \in H(n, m)} b_m^d C_m^d (1-p)^d p^{m-d}. \quad (3)$$

Так, для кода  $H(11, 7)$  при  $p = 0,9$  имеем:

$$\begin{aligned} Q_7 &= b_7^3 C_7^3 (1-0,9)^3 0,9^{7-3} + b_7^4 C_7^4 (1-0,9)^4 0,9^{7-4} + b_7^5 C_7^5 (1-0,9)^5 0,9^{7-5} = \\ &= 0,05714 \cdot 35 \cdot 0,001 \cdot 0,6561 + 0,08571 \cdot 35 \cdot 0,0001 \cdot 0,729 + 0,09524 \cdot 21 \cdot 0,00001 \cdot 0,81 = \\ &= 0,0013122 + 0,0002187 + 0,0000162 = 0,001547. \end{aligned}$$

В коде  $H(11, 7)$  при  $p = 0,9$  необнаруживаемая ошибка возникает с вероятностью чуть более 1,5%.

### Вероятностные характеристики кодов Хэмминга

С использованием формул (2) и (3) были рассчитаны вероятности возникновения необнаруживаемых ошибок различных кратностей в кодах  $H(n, m)$ , а также суммарная вероятность возникновения необнаруживаемых ошибок в данных

кодах. При этом брались различные значения  $p$ . Приведем результаты расчетов для первых двадцати кодов Хэмминга при  $p = 0,9$  (табл. 5), их же проиллюстрируем графиками (рис. 2). На практике же значения  $p$  выбирают исходя из свойств блока основной логики  $F(x)$ .

Таблица 5

$m$	$Q_m^d$						$Q_m$
	3	4	5	6	7	8	
3	0,001						0,001
4	0,0009	0					0,0009
5	0,00081	0	0				0,00081
6	0,00146	0,000081	0	0			0,00154
7	0,00131	0,0002187	0,0000162	0	0		0,00155
8	0,00295	0,0003281	0,0000146	0,00000162	0,00000009	0	0,0033
9	0,00372	0,0005314	0,0000394	0,00000437	0,00000024	0	0,0043
10	0,00478	0,0007972	0,0000709	0,00000984	0,00000073	0	0,00566
11	0,0056	0,0011957	0,0001329	0,00001594	0,00000151	0,000000073	0,00694
12	0,00504	0,0010762	0,0001196	0,00001435	0,00000136	0,000000066	0,00625
13	0,00488	0,0011235	0,0001464	0,000022	0,00000287	0,000000242	0,00618
14	0,00439	0,0012901	0,0002325	0,00003616	0,00000497	0,000000548	0,00596
15	0,0048	0,0015063	0,0003034	0,00005772	0,00000904	0,000001	0,00668
16	0,00483	0,0018075	0,0004174	0,00008403	0,00001418	0,00000176	0,00716
17	0,00503	0,0021606	0,0005366	0,00011674	0,0000218	0,00000296	0,00787
18	0,00515	0,0025851	0,0006761	0,00015421	0,0000319	0,00000486	0,0086
19	0,00593	0,0028207	0,000819	0,00020818	0,0000451	0,00000749	0,00983
20	0,00634	0,0031131	0,0009924	0,00027086	0,00006156	0,00001119	0,01079
21	0,00675	0,0034355	0,0011674	0,00034302	0,0000831	0,00001623	0,0118
22	0,00702	0,0037974	0,00136086	0,00042249	0,0001097	0,00002305	0,01274

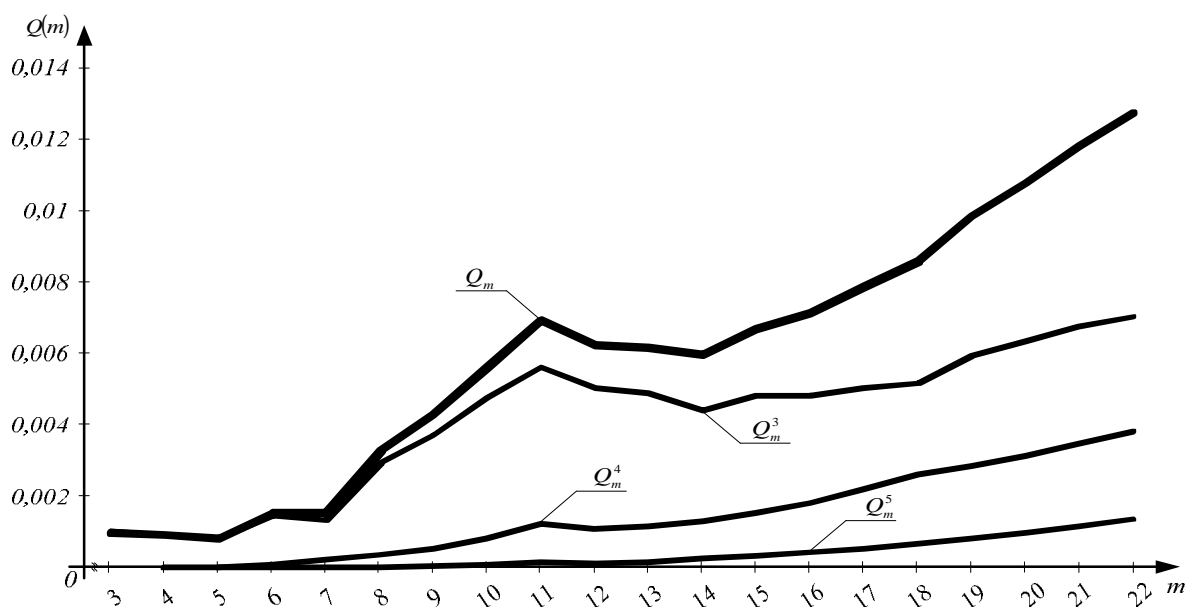


Рис. 2. Динамика изменения величин  $Q_m$  и  $Q_m^d$  в зависимости от изменения  $m$  при  $p = 0,9$ .

Проанализируем изменение величин  $Q_m$  и  $Q_m^d$  (рис. 2). Сразу же бросается в глаза некоторый локальный максимум величины  $Q_m$ , характерный для кода  $H(15,11)$ . С увеличением величины  $m$  до 14 величина  $Q_m$  уменьшается, затем снова начинает расти. Такое поведение функции вероятности возникновения необнаруживаемых ошибок объясняется появлением еще одного контрольного разряда у кодов, значение которых превосходит число  $m = 11$ .

Наибольшую вероятность возникновения необнаруживаемых ошибок составляют ошибки малых кратностей, – например, для кода  $H(11,7)$  вероятность возникновения необнаруживаемых ошибок кратности  $d=3$  составляет 84,68% от общей величины  $Q_m$ , для кода  $H(25,20)$  та же величина для ошибок кратности  $d=3$  равна 58,74%, а  $d = 4$  – 28,86%. В целом же вполне очевидным является распределение необнаруживаемых ошибок в коде  $H(n,m)$  – с увеличением  $m$  и  $d$  доли величин  $Q_m^d$  уменьшаются.

По-другому себя ведут с уменьшением величины  $p$  функции  $Q_m$  и  $Q_m^d$ . Для примера на рис. 3 дан график изменения указанных выше величин при  $p = 0,7$ . Опять же особенной выглядит величина  $Q_m$  для кода  $H(15,11)$  – в точке  $m = 11$   $Q_m = \max$ . Функция  $Q_m$  значений, больших данного, не принимает. Рассматривая функции кратных ошибок, отметим, что в отличие от графиков, представленных на рис. 2, функции  $Q_m^d$  имеют точки пересечения. Сначала величины  $Q_m^d$  для различных  $d$  возрастают (четкой зависимости нет), а затем в разной степени убывают. Это обуславливает наличие точек пересечения. Они же, в свою очередь, свидетельствуют об изменении характера распределения вероятности возникновения необнаруживаемых ошибок в отдельно взятом коде  $H(15,11)$ .

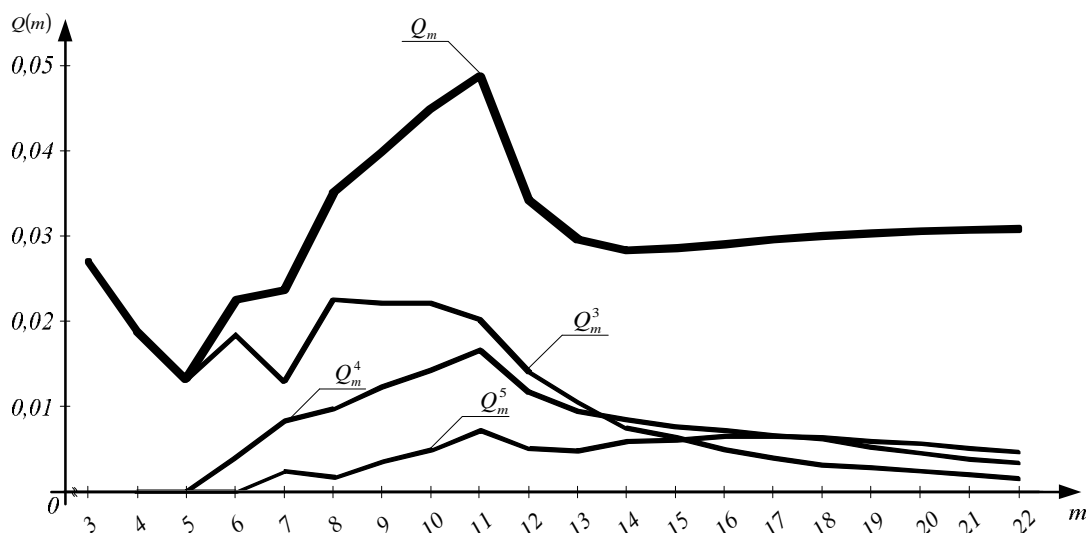


Рис. 3. Динамика изменения величин  $Q_m$  и  $Q_m^d$  в зависимости от изменения  $m$  при  $p = 0,7$ .

С увеличением числа информационных разрядов уменьшается и доля необнаруживаемых ошибок и в предельном случае (при  $m \rightarrow \infty$ ) становится равной нулю [6]. Это, несомненно, влияет на величину  $Q_m$  (3). В результате и величина  $Q_m$  уменьшается до нуля. Это свойство можно также доказать, используя выражения под знаком суммы в формуле (3) (здесь суммируется по всем возможным  $d$  ряд



выражений 2). По теореме о конечных пределах [15], если каждое из них при  $m \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то и  $Q_m \rightarrow 0$ . Используя формулу Стирлинга [16], вычислим предел зависимости (2):

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} Q_m^d &= \lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d C_m^d (1-p)^d p^{m-d} = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! p^m}{d!(m-d)!} (1-p)^d p^{-d} = \\
&= \left( \frac{1-p}{p} \right)^d \lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! p^m}{d!(m-d)!} = \\
&= \left( \frac{1-p}{p} \right)^d \lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d \lim_{m \rightarrow \infty} p^m \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2pe^{-m}} m^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2pe^{-d}} d^{d+\frac{1}{2}} \sqrt{2pe^{-(m-d)}} (m-d)^{m-d+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим отдельно последний предел в выражении (4):

$$\begin{aligned}
&\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2pe^{-m}} m^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2pe^{-d}} d^{d+\frac{1}{2}} \sqrt{2pe^{-(m-d)}} (m-d)^{m-d+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2pd}^{d+\frac{1}{2}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{(m-d)^{m-d+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2pd}^{d+\frac{1}{2}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{m+\frac{1}{2}}}{m^{m-d+\frac{1}{2}} \left(1-\frac{d}{m}\right)^{m-d+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2pd}^{d+\frac{1}{2}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^d}{\left(1-\frac{d}{m}\right)^m \left(1-\frac{d}{m}\right)^{-d+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2pd}^{d+\frac{1}{2}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^d}{e^d \left(1-\frac{d}{m}\right)^{-d+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2pe^d} d^{d+\frac{1}{2}}} \lim_{m \rightarrow \infty} m^d.
\end{aligned} \tag{5}$$

Вернемся к конечному выражению в формуле (4), куда подставим и результат вычислений (5). Сделав ряд простых преобразований, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2pe^d} d^{d+\frac{1}{2}}} \left( \frac{1-p}{p} \right)^d \lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d \lim_{m \rightarrow \infty} p^m m^d. \tag{6}$$

Здесь  $\frac{1}{\sqrt{2pe^d} d^{d+\frac{1}{2}}} \left(\frac{1-p}{p}\right)^d$  – некоторая постоянная,  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m^d \in [0;1]$ , а

$\lim_{m \rightarrow \infty} p^m m^d = 0$ , что также несложно показать.

Таким образом, можно говорить о свойстве 2.

*Свойство 2.* В коде Хэмминга при  $m \rightarrow \infty$  вероятность возникновения необнаруживаемых ошибок в информационном векторе  $Q_m \rightarrow 0$ .

### Код Хэмминга и другие разделимые коды

Рассмотрим обнаруживающие способности кодов Хэмминга в сравнении иными разделимыми кодами, имеющими применение в схемах функционального контроля [1, 3, 8, 9]. На рис. 4 представлены графики изменения величин  $Q_m$  у различных кодов при  $p = 0,9$ . Суть обозначений такова: *PM* – модифицированный код паритета; *S* – классический код с суммированием (код Бергера); *S8* – код с суммированием по модулю 8; *RS2*, *RS4*, *RS8* – модифицированные коды с суммированием; *H* – код Хэмминга.

Рассматривая графики на рис. 4, отметим, что код Хэмминга обладает наилучшими вероятностными характеристиками – величина  $Q_m(H)$  ниже соответствующих значений для любых кодов. Этот же факт может быть справедлив и при любых изменениях величины отсутствия искажения одного информационного разряда  $p$ , – например, на рис. 5 изображены графики изменения величин при  $p = 0,7$ .

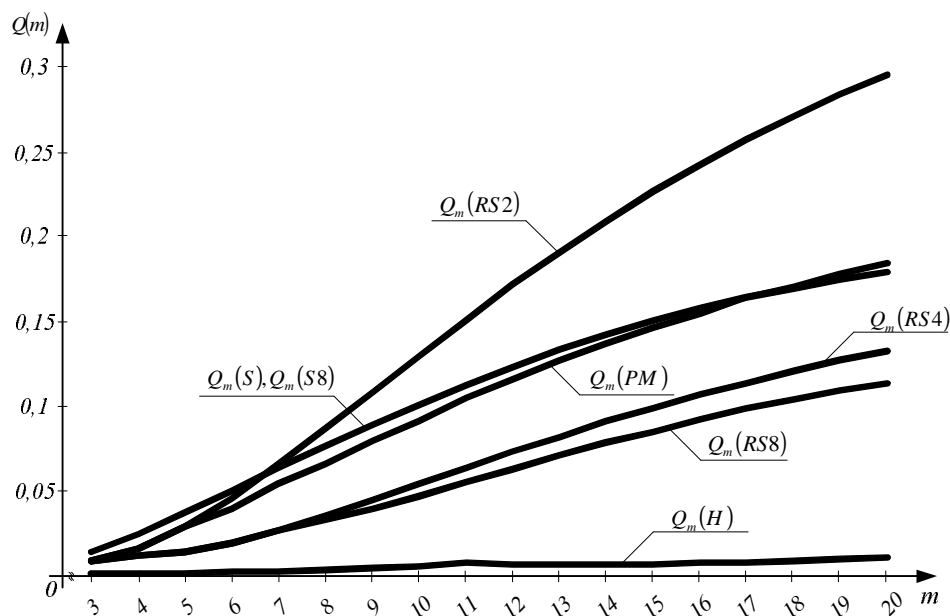


Рис. 4. Графики изменения величин  $Q_m$  для различных разделимых кодов при  $p = 0,9$ .

Все коды, рассматриваемые в данном пункте, можно отнести к кодам с суммированием: коды Хэмминга и модифицированные коды паритета – к кодам с суммированием на основе линейного преобразования (используются суммы по модулю два), а коды Бергера, модульные коды с суммированием и модифициро-

ванные коды с суммированием – к кодам с нелинейным суммированием. Так, на рис. 4 и 5 показано сравнение целого семейства кодов с суммированием, среди которых максимальной обнаруживающей способностью обладают коды Хэмминга.

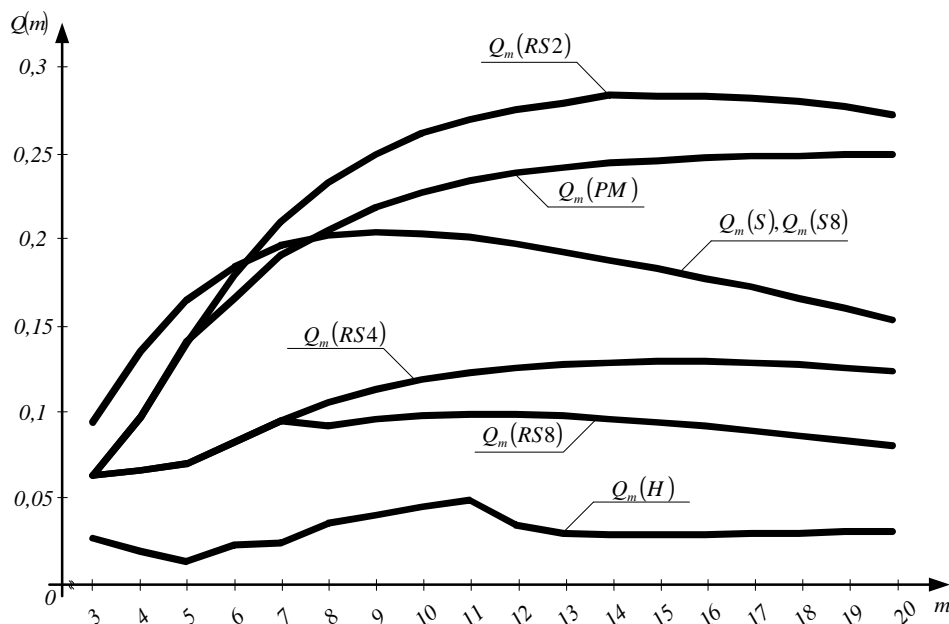


Рис. 5. Графики изменения величин  $Q_m$  для различных разделимых кодов при  $p = 0,7$ .

Отметим важный аспект, который влияет на приоритет кодов Хэмминга над другими кодами. В сравнении с иными коды Хэмминга обладают сравнительно высокой избыточностью  $R$  и более низкой кодовой скоростью  $V$ . В табл. 6 приводится сравнение для различных избыточных кодов с  $m=100$ .

Таблица 6

Код	$m$	$k$	$R = \frac{k}{k+m}, \%$	$V = \frac{m}{k+m}, \%$
RS2	100	2	1,96	98,04
PM	100	2	1,96	98,04
S8	100	3	2,91	97,09
RS4	100	3	2,91	97,09
RS8	100	4	3,85	96,15
S	100	7	6,54	93,46
H	100	7	6,54	93,46

Указанное свойство является особенностью, которая учитывается при синтезе аппаратных и программных самопроверяемых реализаций схем функционального контроля [3].

### Заключение

В настоящем исследовании рассмотрены вероятностные свойства кодов Хэмминга в схемах функционального контроля. Результатом является получение каталога вероятностных характеристик кодов для любых значений величины  $p$  – вероятности отсутствия искажений одного информационного выхода. Это позво-

ляет сравнивать коды Хэмминга с другими разделимыми кодами, нашедшими применение в организации схем функционального контроля, и, в свою очередь, находить оптимальные решения при выборе варианта кодирования до самого процесса синтеза схем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Основы технической диагностики – М.: Маршрут, 2004.
2. Ryan W.E., Shu Lin Channel Codes: Classical and Modern – Cambridge University Press, 2009.
3. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самопроверяемые дискретные устройства – СПб.: Энергоатомиздат, 1992.
4. Hamming R.W. Error detecting and correcting codes // Bell System Technical Journal, 1950. – 29 (2). – P.147-160.
5. Системы управления движением поездов на перегонах. – Часть 1: Функциональные схемы систем / В.М. Лисенков, П.Ф. Бестемьянов, В.Б. Леушин и др.; под ред. В.М. Лисенкова // М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2009.
6. Ефанов Д.В. Предельные свойства кода Хэмминга в схемах функционального диагностирования / Информатика и системы управления – 2011. – №3 (29). – С. 70-79.
7. Hamming R.W. Coding and Information Theory. – Prentice-Hall, 1986.
8. Блюдов А.А., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Модифицированный код с суммированием для организации контроля комбинационных схем // Автоматика и телемеханика. – 2012 – №1. – С. 169-177.
9. Ефанов Д.В. Модифицированный код паритета в схемах функционального контроля / Вестник УрГУПС. – 2011. – №4. – С. 4-14.
10. Goessel M., Graf S. Error Detection Circuits. – London; Me Graw-Hill, 1994.
11. Parag K.L. Self-checking and Fault-tolerant Digital Design. – University of Arkansas, 2001.
12. Anderson D.A., Metzger G. Design of Totally Self-Checking Check Circuits of M-out-of-N Codes // IEEE Trans. Computer. –1973. – V. 22, №3. – P. 263-269.
13. Marouf M.A., Friedman A.D. Design of Self-Checking Checkers for Berger Codes / In: Proc. 8th Annual Intern. Conf. on Fault – Tolerant Computing, Toulouse. – 1978. – Vol.C-27. – P. 179-183.
14. Piestrak S.J. Design of self-testing checkers for unidirectional error detecting codes – Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995.
15. Зорич В.А. Математический анализ: Часть 1. – М.: МЦНМО, 2007.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Т.1/ пер. с англ. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.В. Шалобановым.*

#### **E-mail:**

*Ефанов Дмитрий Викторович – [mitriche@yandex.ru](mailto:mitriche@yandex.ru);*

*Блюдов Антон Александрович – [tosha\\_super@mail.ru](mailto:tosha_super@mail.ru).*