ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Мониторинг и прогнозирование технического состояния систем ответственного назначения // Информатика и системы управления. – 2011. – №2(28). – С. 4-15.
2. *Норенков И.П., Маничев В.Б.* Основы теории и проектирования САПР: Учеб. для втузов по спец. «Вычислительные маш., компл., сест. и сети». – М.: Высш. шк., 1990.
3. *Pharr M., Randima F.* GPU Gems 2: Programming Techniques for High-Performance Graphics and General-Purpose Computation. Addison-Wesley, 2005.
4. *Antonopoulos N., Gillam L.* Cloud Computing: Principles, Systems and Applications. – Springer, 2010.
5. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.
6. *Назаров Д.А.* Использование областей работоспособности для оптимального выбора номиналов параметров // Информатика и системы управления. – 2011. – №2(28). – С. 59-69.
7. *Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Аппроксимация и построение областей работоспособности в задаче параметрического синтеза // Международный симпозиум «Надежность и качество»: Сб. науч. тр. – Пенза, 2005. – С. 130-134.
8. *Назаров Д.А.* Использование распределенных вычислений при построении области работоспособности // Информатика и системы управления. – 2008. – №1(15). – С. 142-151.
9. *Kundert K.S., Zinke O.* The Designer's Guide to SPICE & SPECTRE. – Springer, 2004.
10. *Назаров Д.А.* Алгоритмы сжатия данных при построении и использовании областей работоспособности // Международный симпозиум «Надежность и качество»: Сб. науч. тр. – Пенза, 2011. – Т. 1. – С. 250-254.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:
Назаров Дмитрий Анатольевич – nazardim@iacp.dvo.ru.

УДК 681.5.63

© 2012 г. **А.В. Саушев**, канд. техн. наук
(Санкт–Петербургский государственный университет водных коммуникаций)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД НАЗНАЧЕНИЯ ДОПУСКОВ НА ПАРАМЕТРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача назначения допусков на параметры элементов динамических систем. Предложен метод решения задачи, основанный на аппроксимации области работоспособности логическими *R*-функциями. Метод характеризуется низкой методической погрешностью.
Ключевые слова: область работоспособности, допуск, *R*-функции.

Введение

Одной из важнейших задач параметрического синтеза технических систем (ТС), которые рассматриваются как динамические системы, является задача назначения допусков на параметры элементов системы. Фундаментальные результаты в решении этой задачи получены в работах [1, 2]. Вместе с тем большинство известных методов предполагает замену области допустимых изменений параметров (области работоспособности) ТС некоторым ортогональным гиперпараллелепипедом (брусом), оптимальным в том или ином смысле [1]. В статье показано, что такая замена может привести к большой методической погрешности. Во многих случаях необходимы более точная аппроксимация области работоспособности и переход от независимых допусков к зависимым. Приводится краткий обзор методов определения областей работоспособности в виде совокупности граничных точек и рассматривается метод аналитического описания ее границы, основанный на использовании логических *R*-функций. Полученное решение с высокой достоверностью задает допуски на параметры элементов системы для произвольной формы области работоспособности.

Постановка задачи

Состояние ТС в любой фиксированный момент времени характеризуется некоторым набором или вектором параметров, среди которых можно выделить:

внутренние параметры $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \mathbf{K}, X_i, \mathbf{K}, X_n\right)$, определяющие допусковую область D_X, которые характеризуют состояние комплектующих элементов ТС. Эти параметры называют также первичными параметрами системы;

внутренние параметры $\mathbf{Z}^u = \left(Z_1^u, Z_2^u, \mathbf{K}, Z_g^u, \mathbf{K}, Z_c^u\right)$, определяющие допусковую область D_Z, которые характеризуют фазовые переменные на выходах элементов системы, $u = \overline{1,h}$, h – число элементов;

выходные параметры $\mathbf{Y} = \left(Y_1, Y_2, \mathbf{K}, Y_j, \mathbf{K}, Y_m\right)$, определяющие допусковую область D_Y, которые характеризуют различные функциональные зависимости фазовых переменных $\mathbf{Z} = \left(Z_1, Z_2, \mathbf{K}, Z_g, \mathbf{K}, Z_c\right)$ на выходе ТС.

Выходные параметры характеризуют свойства ТС, интересующие потребителя. Они представляют собой параметры-функционалы, т.е. функциональные зависимости фазовых переменных и параметры, являющиеся граничными значениями диапазонов внешних переменных, в которых сохраняется работоспособность ТС. К выходным параметрам на стадии параметрического синтеза относятся показатели назначения, параметрической надежности и экономичности.

Область допустимых изменений параметров $G = D_x \mathbf{I} M_Z \mathbf{I} M_Y$ определяется неравенствами (1) и называется областью работоспособности:

$$
\begin{aligned}
&Y_{j\min} \le Y_j = F_j(\mathbf{X}) \le Y_{j\max},\ j = \overline{1,m} \to M_Y \\
&Z_{j\min}^u \le Z_j^u = F_j^u(\mathbf{X}) \le Z_{j\max}^u, u = \overline{1,h} \to M_Z\ , \\
&X_{i\min} \le X_i \le X_{i\max}, i = \overline{1,n} \to D_X
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где $Y_{j\max}(Z_{j\max}^u)$, $Y_{j\min}\ (Z_{j\min}^u), Y_j(Z_j^u)$ – соответственно максимально и минимально допустимые значения *j*-го выходного Y_j (внутреннего Z_j^u) параметра; F – оператор связи первичных параметров с внутренними Z^u и выходными $\mathbf{Y}$ параметрами; $X_{i\min}$ и $X_{i\max}$ – предельно допустимые значения первичных параметров. Области M_Z и M_Y являются соответственно отображением областей D_Z и D_Y в пространство первичных параметров ТС.

Аппроксимация области работоспособности G брусом приводит к большой методической погрешности, которая нелинейно возрастает с ростом числа первичных параметров. Для не односвязных областей работоспособности известные методы не всегда имеют однозначное решение [3]. Ставится задача разработки более точного метода назначения допусков на первичные параметры ТС.

Результаты исследований

Для решения большинства практических задач допуски на каждый первичный параметр X_i, $i=\overline{1,n}$ назначаются независимо друг от друга. При этом фактическая область работоспособности заменяется брусом S, грани которого параллельны осям координат первичных параметров.

Если область работоспособности аппроксимировать описывающим брусом S_0, то появляется риск заказчика a (ошибка первого рода), который определяется вероятностью $P_з = P_1 - P_2$ попадания параметров $\mathbf{X}$ в область между гранями бруса S_0 и областью G. Здесь P_1 и P_2 – вероятности попадания вектора первичных параметров соответственно в брус S_0 и область работоспособности.

Если область G аппроксимировать брусом S_0 так, чтобы он полностью был вложен в эту область, то появляется риск изготовителя b (ошибка второго рода), который определяется вероятностью $P_и = P_2 - P_1$.

Область работоспособности может быть аппроксимирована брусом $S_с$ так, чтобы он занимал промежуточное положение между брусом S_0 и брусом S_B. При этом будет иметь место как риск заказчика, так и риск изготовителя.

Таким образом, методическая погрешность обусловлена наличием риска заказчика и риска изготовителя и полностью определяется либо вероятностью $P_з$, либо вероятностью $P_и$, либо суммой этих вероятностей. В случае большой величины методической погрешности от контроля по независимым допускам необходимо отказаться и перейти к контролю по зависимым допускам, предусматривающему более точную аппроксимацию границы области работоспособности.

Рассмотрим случай, когда в процессе контроля оценивается серийнопригодность ТС при их массовом производстве. При известной плотности вероятности $f(\mathbf{X})$ вектора первичных параметров относительная величина методической погрешности может быть вычислена по следующей формуле:

$$m_c = 1 - \int_{V_1} f(\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{X} \Big/ \int_{V_1} f(\mathbf{X})\mathrm{d}\mathbf{X}, \qquad (2)$$

где V_1 и V_2 – соответственно объемы областей S_B и G или G и S_0.

Использовать формулу (2) для практических расчетов весьма затруднительно. В этой связи более удобна следующая упрощенная формула для оценки величины относительной методической погрешности:

$$\tilde{m}_c = \left|1 - g_c(V_1/V_2)\right|, \qquad (3)$$

где g_c – коэффициент, величина которого определяется плотностью вероятности вектора первичных параметров, а также конфигурацией и взаимным расположением областей S и G относительно друг друга. При равномерном распределении плотности $f(\mathbf{X})$ вероятность попадания в любую точку области D_X одинакова для всех возможных сочетаний параметров **X**, при этом коэффициент $g_c = 1$.

Для оценки величины относительной методической погрешности в формуле (3) под коэффициентом g_c будем понимать коэффициент, величина которого определяется траекторией и скоростью вариации вектора параметров **X** в области D_X в процессе эксплуатации системы. При равновероятном направлении движения вектора **X**, когда вероятность его нахождения в момент времени t_k одинакова для любой точки, принадлежащей поверхности гиперсферы радиуса $R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_{ki} - X_{0i})^2}$, где X_{0i} и X_{ki} , $i = 1,\ldots, n$ – соответственно координаты вектора **X** для начального момента времени эксплуатации ТС и для момента времени t_k, коэффициент $g_c = 1$.

В этом случае значение $\hat{\mu}_c$ будет определяться как отношением объемов V_1/V_2, так и коэффициентом g, численное значение которого в отличие от отношения V_1/V_2 может быть получено лишь приближенно на основе статистических данных о значениях первичных параметров ТС.

В настоящее время получена оценка нижней границы методической погрешности ($g_c = 1$) и определена ее связь с размерностью пространства первичных параметров [3, 4]. Графическая иллюстрация этих результатов представлена на рис. 1, где $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ – оценки методических погрешностей при аппроксимации области работоспособности соответственно гипершаром, гиперкубом и прямоугольным симплексом.

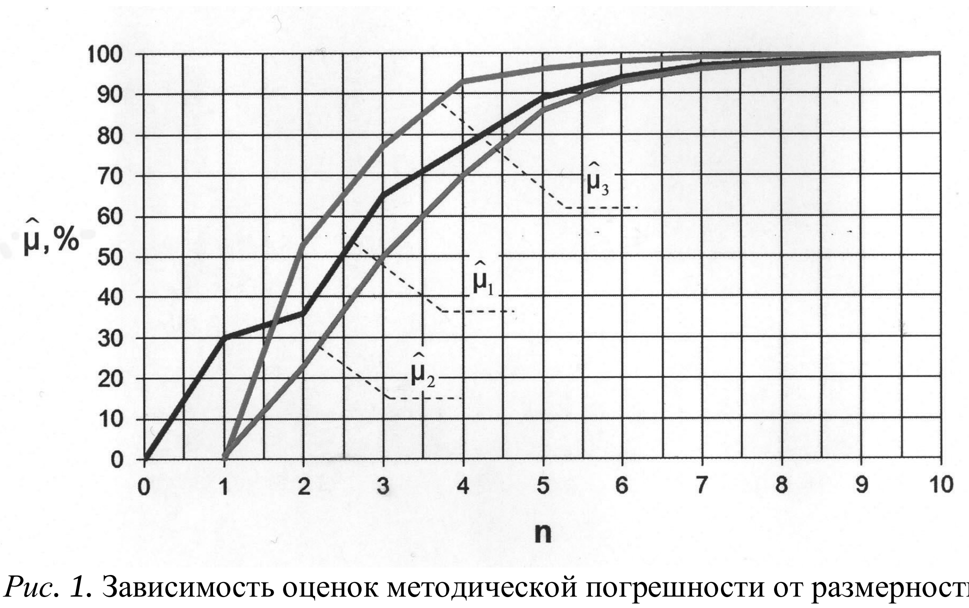

Рис. 1. Зависимость оценок методической погрешности от размерности пространства первичных параметров.

Из рис. 1 следует, что при больших размерностях пространства первичных параметров основная часть объема области работоспособности примыкает к ограничивающей ее поверхности. В правильности этого утверждения более наглядно можно убедиться на следующем примере. Впишем в область G произвольной формы подобную ей область и определим ошибку аппроксимации, обозначив отношение V_1/V_2 через параметр l, имеющий физический смысл коэффициента сжатия. Из формулы (3) следует, что ошибка $m_1 \to 100\%$ при $n \to \infty$, т.е. при достаточно большом числе параметров **X**, объем, заключенный между границами двух областей, приближается по величине к объему исходной области.

В настоящее время известны методы более точного определения границы области работоспособности в виде множества граничных точек. К ним относятся методы контурного обхода, 2^n звезды и метод секущих [1, 2, 5].

Для решения задачи назначения допусков полученный массив граничных точек области работоспособности необходимо аппроксимировать и в конечном итоге получить аналитическую зависимость, описывающую допуск. Одним из возможных способов решения задачи является аппроксимация области работоспособности классом эллипсоидов [6], однако и в этом случае методическая погрешность достаточно высока [4]. При использовании для целей аппроксимации линейных гиперповерхностей [7] объем вычислений является очень большим, что ограничивает применение этого подхода для ТС, характеризующихся высокой размерностью пространства первичных параметров.

Для существенного повышения достоверности математического описания областей работоспособности предлагается аппроксимировать каждую из гиперповерхностей F_j^u и F_j в отдельности. Учитывая, что область работоспособности в общем случае представляет собой пересечение конечного числа гиперповерхностей f_g, $g = 1,2,\ldots, d$; $d = 2(m + h + n)$, определяемых неравенствами (1) и представленных в одном из следующих видов:

$F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min} \ge 0$, $\quad Y_{j\max} - F_j(\mathbf{X}) \ge 0$, $\quad F_j^u(X) - Z_{j\min}^u \ge 0$, $\quad Z_{j\max}^u - F_j^u(X) \ge 0$, $X_i - X_{i\min} \ge 0$, $X_{i\max} - X_i \ge 0$, можно записать: $G = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_g \wedge \ldots \wedge f_d$.

В том случае, если функции f_g принадлежат к классу R-функций [8] можно воспользоваться их свойствами и перейти от логической к аналитической форме записи. Рассмотрим возможности такого перехода.

Пусть c – множество, содержащее k элементов X. Зададим сюръекцию вида $S_k : c \to B_k, B_k = \{0,1,\mathbf{K},k-1\}$. Такое задание означает, что каждый элемент $X \in B_k$ имеет непустой прообраз $S_k^{-1}(X)$. Задание S_k приводит к разбиению c на k подмножеств $c(i) = S_k^{-1}(i), i \in B_k$, которые называются качественными градациями наc, соответствующими сюръекции S_k.

Введем в рассмотрение отображения $S_k^n : c^n \to D_k^n$ и $Y = f(\mathbf{X}) : c^n \to c^m$, где $S^n(\mathbf{X}) = (S_k(X_1),\mathbf{K},S_k(X_n))$, $\mathbf{X} = (X_1,\mathbf{L},X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1,\mathbf{L},Y_n)$, n – степень множества c. Отображение $f(\mathbf{X})$ называется правильным отображением с алфавитом c. Множество всех правильных с алфавитом c отображений обозначим $F(c)$. При $m = 1$ правильные отображения вида $f : c^n \to c$ называются n-местными алгебраическими операциями на множестве c.

Если $Y = f(\mathbf{X}) : c^n \to c^m$; $j = y(\mathbf{Y}) : c^m \to c^p$ и $j = y(f(\mathbf{X})) : c^n \to c^p$, то отображение j называют композицией f и y и обозначают $y(f(\mathbf{X})) = y \circ f$.

Отображение $f:\chi^n \to \chi^m$ называется R-отображением, если существует такая функция k-значной логики $F: B_k^n \to B_k^m$, для которой $S_k^m \circ f = F \circ S_k^n$.

Поскольку область работоспособности задается в пространстве R^n первичных параметров $\mathbf{X}$, то множество χ, используемое для построения R-отображений, представляет собой числовую ось или ее подмножество. При этом R-отображения являются действительными функциями действительных аргументов. Они определены везде в пространстве своих аргументов и, таким образом, принадлежат множеству $F(R)$ правильных функций (алгебраических операций) с алфавитом $\chi = R = (-\infty,+\infty)$.

При аналитическом описании допусковых областей $D = D_Y = \bigcap_{j-1}^{m} D_j$, $M = M_Z \cap M_Y$, $P = D_X$ и области $G = M \cap P$ будем использовать R-функции, соответствующие разбиению всего множества R с помощью сюръекции, определяемой предикатами $S_3(t)$ и $S_2(t)$:

$$S_3(t) = \begin{cases} 2, \forall t \in (0;+\infty), \\ 1, t = 0, \\ 0, \forall t \in (-\infty;0), \end{cases} \qquad S_2(t) = \begin{cases} 1, \forall t \in (0;+\infty), \\ 0, \forall t \in (-\infty;0). \end{cases}$$

Для предиката $S_3(t)$: $\chi(0) = (-\infty;0)$, $\chi(1)=0$, $\chi(2) = (0;+\infty)$; для предиката $S_2(t)$: $\chi(0) = (-\infty;0)$, $\chi(1) = (0;+\infty)$.

Предикату $S_3(t)$ можно поставить в соответствие принадлежность точки области G, а также нахождение ее вне области G и внутри этой области. Предикату $S_2(t)$ ставится в соответствие принадлежность или не принадлежность рассматриваемой точки области работоспособности.

Рассмотрим пространство R^m выходных параметров ТС. Согласно (1) каждому неравенству $\varphi_j(\mathbf{X}) = F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min} \ge 0$ или $\varphi_j(\mathbf{X}) = Y_{j\min} - F_j(\mathbf{X}) \ge 0$ можно поставить в соответствие двоичную переменную

$$Q(Y_j) = Q\big(F_j(\mathbf{X})\big) = \begin{cases} 1, \text{если } \varphi_j(\mathbf{X}) \ge 0, \\ 0, \text{если } \varphi_j(\mathbf{X}) < 0. \end{cases}$$

Функция $Q = Q(Y_j)$, определяемая таким образом, является двоичным предикатом и обозначается $S_2(t)$. Предикату $Q(Y_j)$ можно поставить в соответствие геометрический объект D_j, который называется опорным и представляет собой совокупность всех точек пространства R^m, в которых удовлетворяется условие $Q \equiv \big(\varphi_j(\mathbf{X}) \ge 0\big) = 1$. Допусковая область D в пространстве R^m состоит из геометрических объектов D_j, причем булева функция $\varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_j, \ldots, Y_m)$ определяет логику формирования области D. Так как предикаты $Q(Y_j)$ могут принимать значения 0 или 1, то ими можно заменить аргументы булевой функции φ. В результате такой замены получим следующее уравнение:

$$Q(Y) = \varphi\big(Q(Y_1), Q(Y_2), \ldots, Q(Y_j), \ldots, Q(Y_m)\big) = A,$$

где A принимает значение 0 или 1.

Для того чтобы неравенство $j_j(\mathbf{X}) \geq 0$ определяло ту же область, что и предикатное уравнение $Q(Y) = 1$, необходимо, чтобы булева функция j была замыкающей. Для построения функции j воспользуемся R-функциями, обладающими свойствами функций алгебры логики.

Пусть $Y = F(\mathbf{X})$ есть функция, определенная всюду в пространстве R^n Согласно определению R-отображения данная функция является R-функцией, если в каждой из областей $H_j(j = 1, 2,\ldots, 2^n)$ она сохраняет постоянный знак, т.е. $Q(F(X_1, X_2, \mathbf{K}, X_n)) = j = \text{const}$. При этом область H_j представляет собой совокупность всех точек пространства R^n, для которых хотя бы одна координата X_i равняется нулю. В результате использования R-функций область D может быть задана следующим неравенством:

$$j(Y) \equiv ((\mathbf{K}(((j_1 \wedge^k_{a1} j_2) \wedge^k_{a2} j_3) \wedge^k_{a3} \mathbf{K}) \wedge^k_{a(m-1)} j_m = \mathop{\wedge^k_{aj}}_{j=1}^{m} j_j \geq 0, \tag{4}$$

где a_j, $j = \overline{1, m}$ – величины, принадлежащие интервалу $a_j \in [-1, 1]$.

Для построения R-конъюнкции удобно воспользоваться формулой [7]:

$$j_1 \wedge^k_a j_2 = 0{,}5\left(j_1 + j_2 - \sqrt{j_1^2 + j_2^2 - 2a j_1 j_2}\right) R(j_1, j_2), \tag{5}$$

где $R(j_1, j_2)$ – функция, обеспечивающая наличие k производных R-конъюнкции.

В том случае, если не требуется, чтобы R-конъюнкция была дифференцируема, формула (5) может быть упрощена. Принимая $a = 1$, получим:

$$j_1 \wedge j_2 = 0{,}5\left(j_1 + j_2 - |j_1 - j_2|\right). \tag{6}$$

В формуле (4) могут быть опущены скобки, и конечный результат не будет зависеть от последовательности свертки.

Если уравнения $j_j = 0$, $j = \overline{1, m}$ определяют соответственно границы областей $j_j \geq 0$, то уравнение $j(Y) = 0$ будет определять границу области D.

Для аналитического описания допусковых областей M, P и области G воспользуемся сюръекцией $S_3(t)$. Для случая, когда ограничения на внутренние параметры Z^u не рассматриваются, область работоспособности G определяется пересечением областей P и M. При этом она может быть задана неравенством $w(\mathbf{X}) \wedge^k_a x(\mathbf{X}) \geq 0$, а уравнение $w(\mathbf{X}) \wedge^k_a x(\mathbf{X}) = 0$ определяет ее границу.

Следуя формулам (1) и (6), получим аналитическое описание области работоспособности в виде следующего рекуррентного соотношения [5]:

$$\begin{cases} G = G_{2(m+n)} = 0{,}5\left(G_{2(m+n)-1} + j_{2(m+n)} - \left|G_{2(m+n)-1} - j_{2(m+n)}\right|\right); \\ G_{2(m+n)-1} = 0{,}5\left(G_{2(m+n)-2} + j_{2(m+n)-1} - \left|G_{2(m+n)-2} - j_{2(m+n)-1}\right|\right); \\ \mathbf{K} \\ G_j = 0{,}5\left(G_{j-1} + j_j - \left|G_{j-1} - j_j\right|\right); \\ \mathbf{K} \\ G_2 = 0{,}5\left(G_1 + j_2 - |G_1 - j_2|\right);\ G_1 = j_1, \end{cases} \tag{7}$$

где $j_j = F_j(\mathbf{X}) - Y_{j\min} \geq 0$, $j_{j+1} = Y_{j\max} - F_j(\mathbf{X}) \geq 0$, $j = \overline{2,m}$, $Y_{j\min}$, $Y_{j\max}$ – соответственно минимально и максимально допустимые значения j-го показателя качества; $F_j(\mathbf{X})$ – функция, устанавливающая связь между j-м показателем качества Y_j и первичными параметрами $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ ТС.

В случае если $m = n = 2$, а первичные параметры заданы в относительных единицах, причем $X_{1\min} = X_{2\min} = -1$, $X_{1\min} = X_{2\min} = 1$, система уравнений (7) преобразуется к виду:

$$G = 0{,}5\left(M + P - \left|M - P\right|\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} M = 0{,}25(&Y_{1\max} + Y_{2\max} - Y_{1\min} - Y_{2\min} - \left|2F_1(X_1, X_2) - Y_{1\max} - Y_{1\min}\right| - \\ &-\left|2F_2(X_1, X_2) - Y_{2\max} - Y_{2\min}\right| - \left|Y_{1\max} + Y_{2\min} - Y_{1\min} - Y_{2\max} + \right. \\ &\left. +\left|2F_1(X_1, X_2) - Y_{2\max} - Y_{2\min}\right| - \left|2F_2(X_1, X_2) - Y_{1\max} - Y_{1\min}\right|\right|); \end{aligned}$$

$$P = 0{,}5\left(2 - \left|X_1\right| - \left|X_2\right| - \left\|X_2\right| - \left|X_1\right\|\right).$$

В работе [8] доказано, что к базисным системам R-функций относятся:

$$H_1 = \left\{X_1 = X_2,\, X_1 \cdot X_2,\, \sqrt{X},\, X \geq 0\right\},\; H_2 = \left\{X_1 = X_2,\, X_1 \cdot X_2,\, |\mathrm{X}|,\, X^m \geq 0\right\}.$$

Используя основное свойство R-функций, заключающееся в том, что логические операции и простейшие арифметические операции над R-функциями образуют новую функцию, которая также принадлежит к классу R-функций, можно заключить, что алгебраические функции $F_j(\mathbf{X})$, полученные, например, в результате применения методов планирования эксперимента [9], также будут являться R-функциями.

В самом общем случае область работоспособности можно представить в виде пересечения множеств G', N и Q пространства R^n параметров $\mathbf{X}$:

$$G = G' \cap N \cap Q,$$

где G' – множество, определяемое конъюнкцией отображений $\Phi_{YX} : D_Y \to M_Y$, $\Phi_{uX} : D_Z \to M_Z$ и области D_X; N – множество, определяемое совокупностью критериев, не имеющих ограничений; Q – множество, определяемое предельно допустимым значением запаса работоспособности системы. Область Q вводится в рассмотрение в том случае, когда целевой функцией при оптимизации является какой-либо функционал или отдельно взятый показатель назначения ТС, а для запаса работоспособности устанавливается предельно допустимое значение.

Трудность аналитического описания множества N заключается в том, что критерии $F_j(\mathbf{X})$, определяющие это множество, не имеют ограничений. Вместе с тем известно, что если функции $F_j(\mathbf{X})$ дифференцируемы, а множество N непрерывно, то оно может быть задано следующим образом:

$$N : g^{\mathrm{T}}(\mathbf{X})\Lambda = 0,\, \Lambda \geq 0, \tag{9}$$

где $g^{\mathrm{T}}(\mathbf{X})$ – транспонированная матрица Якоби для функций критериев $j_j(\mathbf{X})$, $\Lambda = a_j$, $j = m + 1, \ldots, k$.

Выражение (9) представляет собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_j:

$$\sum_{j=m+1}^{k} a_j \mathrm{grad} F_j(\mathbf{X}) = 0,\ a_j \ge 0,\ \sum_{j=m+1}^{k} a_j = a,\ a \in [0, \infty).$$

Ограничивая диапазон изменения a_j каким-либо числом, например, принимая a = 1, а также учитывая, что $a_1 = 1 - \sum_{j=m+2}^{k} a_j$, окончательно получим:

$$\sum_{j=m+1}^{k} a_j \frac{\partial\left(F_1(\mathbf{X}) - F_j(\mathbf{X})\right)}{\partial X_i} = \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial X_i},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ a_j \ge 0. \qquad (10)$$

Представим выражение (10) в виде системы уравнений с k неизвестными параметрами:

$$a_{j2}a_{m+2} + a_{j3}a_{m+3} + \mathbf{K} + a_{ji}a_{m+i} + \mathbf{K} + a_{jn}a_n = c_j,\ j = \overline{1,k}, \qquad (11)$$

где $a_{ji}a_{m+i} = \dfrac{\partial\left(F_1(\mathbf{X}) - F_j(\mathbf{X})\right)}{\partial X_i}$, $c = \dfrac{\partial F_j(\mathbf{X})}{\partial X_i}$.

Разрешая данную систему уравнений относительно неизвестных a_j, получим систему неравенств, описывающих множество решений N:

$$0 \le a_j(\mathbf{X}) \le 1,\ \sum_{j=m+1}^{k} a_j = 1,\ j = m+1,\ m+2,\ \ldots, k.$$

Для наглядности рассмотрим случай, когда m = 0, k = 3, n = 2, уравнения $F_j(\mathbf{X}) = 0$ имеют вид полинома $Y_j = b_0 + \sum_{j=1}^{n} b_i X_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{v=1}^{i-1} b_{iv} X_i X_v$, а функции $F_j(\mathbf{X})$ минимизируются. При этом:

$$F_j(\mathbf{X}) = b_{0j} + b_{1j}X_1 + b_{2j}X_2 + b_{3j}X_1^2 + b_{4j}X_2^2 + b_{5j}X_1X_2,\ j = 1, 2, 3.$$

Система уравнений (11) примет следующий вид:

$$(Z_1 - Z_2)a_2 + (Z_1 - Z_3)a_3 = Z_1,$$
$$(Z_4 - Z_5)a_2 + (Z_4 - Z_6)a_3 = Z_4,$$
$$Z_1 = b_{11} + 2b_{31}X_1 + b_{51}X_2,$$
$$Z_2 = b_{12} + 2b_{32}X_1 + b_{52}X_2,$$
$$Z_3 = b_{13} + 2b_{33}X_1 + b_{53}X_2,$$
$$Z_4 = b_{21} + 2b_{41}X_2 + b_{51}X_1,$$
$$Z_5 = b_{22} + 2b_{42}X_2 + b_{52}X_1,\ Z_6 = b_{23} + 2b_{43}X_2 + b_{53}X_1.$$

Учитывая, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, разрешим полученную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_1, α_2, α_3 Окончательно получим:

$$a_1 = 1 - a_2 - a_3,$$
$$a_2 = (Z_1Z_6 - Z_3Z_4)(Z_1Z_6 - Z_1Z_5 + Z_2Z_4 - Z_2Z_6 - Z_3Z_4 + Z_3Z_5), \qquad (12)$$
$$a_3 = (Z_1Z_5 - Z_2Z_4)(Z_1Z_5 - Z_1Z_6 + Z_2Z_6 - Z_2Z_4 + Z_3Z_4 - Z_3Z_5).$$

Поскольку уравнения (12) принадлежат к классу R-функций, следуя изложенной выше методике, получим:

$$N = y_1 \mathbf{I}\, y_2 \mathbf{I}\, y_3 \mathbf{I}\, y_4 \mathbf{I}\, y_5 \mathbf{I}\, y_6,$$

$$y_1 = a_1 \ge 0, y_2 = 1 - a_1 \ge 0, y_3 = a_2 \ge 0,$$
$$y_4 = 1 - a_2 \ge 0, y_5 = a_3 \ge 0, y_6 = 1 - a_3 \ge 0,$$
$$y_{12} = 0{,}5(1 - |2a_1 - 1|) \ge 0,$$
$$y_{34} = 0{,}5(1 - |2a_2 - 1|) \ge 0,$$
$$y_{56} = 0{,}5(1 - |2a_3 - 1|) \ge 0.$$

После преобразований окончательно получим:

$$N = 0{,}125(4 - |2a_1 - 1| - |2a_2 - 1| - |4a_3 - 2| - \big||2a_2 - 1| - |2a_1 - 1|\big| -$$
$$- \Big||4a_3 - 2| - |2a_1 - 1| - |2a_2 - 1| - \big||2a_2 - 1| - |2a_1 - 1|\big|\Big|).$$

В самом общем виде множество N аналитически может быть записано следующим образом:

$$N = 0{,}5(N_{j-1} + y_j - |N_{j-1} - y_j|, \ j = \overline{2{,}2k}, N_1 = y_1, \qquad (13)$$

где $y_j = a_j$, $y_{j+1} = 1 - a_j$. Коэффициенты a_j определяются в результате решения системы уравнений (11).

Множество решений Q имеет место в том случае, когда критериальным ограничением является минимально допустимый запас работоспособности ТС: $\lambda > \lambda_{\min}$. При этом множество Q описывается следующим образом:

$$Q = \sqrt{(X_1 - X_{1\text{н}})^2 + (X_2 - X_{2\text{н}})^2 + \ldots + (X_n - X_{n\text{н}})^2} - l_{\min} \ge 0, \qquad (14)$$

где $X_{1\text{н}}$, $X_{1\text{н}}$, …, $X_{n\text{н}}$ – координаты номинальной точки в области G, для которой запас работоспособности $\lambda = 1$, $\lambda_{\min} \in (0;1)$. Для определения координат такой точки можно воспользоваться методами, рассмотренными в [1, 2, 5, 10].

Окончательно аналитическое описание области работоспособности примет следующий вид:

$$G = 0{,}25\big(2Q + G' + N - |G' - N| - \big|G' + N - 2Q - |G' - N|\big|\big), \qquad (15)$$

где функции G', N, Q, описываются уравнениями (7), (13) и (14).

Пример

Рассмотрим делитель напряжения, схема которого приведена на рис. 2.

Условия работоспособности делителя имеют следующий вид:

$Y_1 = t < 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ – постоянная времени перезаряда емкости, с;

$Y_2 = P < 0{,}1$ – мощность рассеяния, Вт;

$Y_3 = U_{\text{вых}} \in [4;6]$ – напряжение на выходе делителя, В.

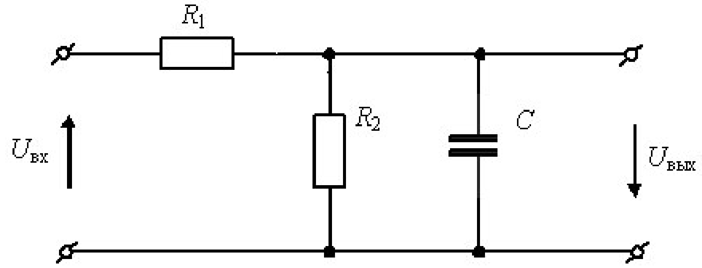

Рис. 2. Принципиальная схема делителя напряжения.

Параметры делителя имеют следующие номинальные значения:

$R_{1ном} = R_{2ном} = 0{,}68$ кОм; $C_{ном} = 1$ нФ; $U_{вх} = 10$ В – входное напряжение.

Для наглядности изложения будем предполагать, что значение емкости конденсатора в процессе эксплуатации не изменяется, а ограничения на значения первичных параметров не учитываются.

Установим связь между показателями качества и параметрами делителя. На основе известных соотношений получим:

$$Y_1 = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2},\ Y_2 = \frac{U_{вх}^2}{R_1 + R_2},\ Y_3 = \frac{U_{вх}}{R_1 + R_2}.$$

Для аналитического описания области работоспособности воспользуемся свойствами R-функций. При этом, учитывая, что сопротивления резисторов выражены в кОм, получим соотношения

$G = j_1 \wedge j_2 \wedge j_3 \wedge j_4 \wedge$,

$$j_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-6} - Y_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-6} - \frac{R_1R_2 \cdot 10^{-6}}{R_1 + R_2},\ j_2 = 0{,}1 - Y_2 = 0{,}1 - \frac{0{,}1}{R_1 + R_2},$$

$$j_3 = Y_3 - 4 = \frac{10R_2}{R_1 + R_2} - 4,\ j_4 = 6 - Y_3 = 6 - \frac{10R_2}{R_1 + R_2}.$$

На основании формулы (7) аналитическое описание области работоспособности, определяющее допустимые пределы изменения первичных параметров R_1 и R_1 для рассматриваемого примера, будет иметь следующий вид:

$$G = 0{,}25(j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - |j_1 - j_2| - |j_3 - j_4| -$$
$$- \big|j_1 + j_2 - j_3 - j_4 + |j_3 - j_4| - |j_1 - j_2|\big|).$$

На рис. 3 приведены ограничительные линии j_1, j_2, j_3, j_4, которые определяют область работоспособности делителя напряжения.

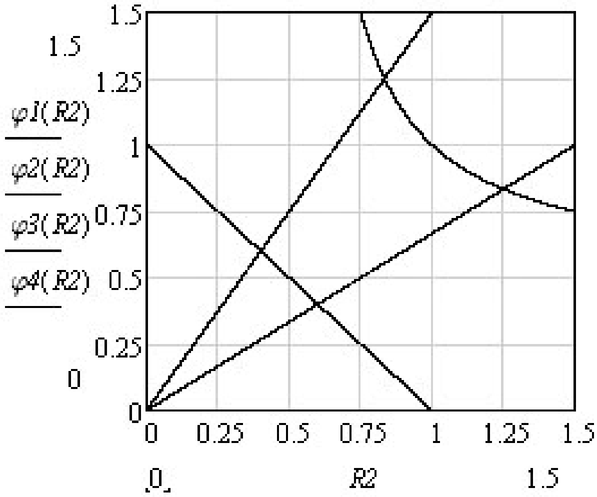

Рис. 3. Область работоспособности делителя напряжения.

Заключение

При назначении допусков на параметры технических систем для снижения методической погрешности необходима достаточно точная аппроксимация области работоспособности. Предложенный метод решения задачи, основанный на использовании свойств логических *R*-функций, позволяет существенно снизить методическую погрешность аппроксимации и получить окончательное решение в удобной для практического применения форме записи.

При этом сокращаются затраты времени на определение области работоспособности в виде совокупности граничных точек. Кроме того, аналитическая форма записи области работоспособности позволяет достаточно просто идентифицировать нахождение исследуемой точки пространства первичных параметров внутри или вне этой области и эффективно, с низкой методической погрешностью, решать задачи определения работоспособности и прогнозирования состояния ТС.

В том случае, если после подстановки измеренных значений первичных параметров в формулу аналитического описания области работоспособности полученный результат окажется отрицательным, это будет означать, что система находится в работоспособном состоянии, в противном случае, если результат положительный, – в неработоспособном состоянии. Если результат окажется равным нулю, то точка, определяющая координаты первичных параметров, является граничной точкой области работоспособности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В., Здор В.В., Супоня А.А.* Допуски и номиналы систем управления. – М.: Наука, 1976.
2. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.
3. *Саушев А.В.* Методы управления состоянием электротехнических систем. – СПб.: СПГУВК, 2004.
4. *Саушев А.В.* Основы достоверности контроля технических объектов // Технология и организация судоремонта. – СПб.: ЛИВТ, 1986. – С.155-163.
5. *Абрамов О. В., Бернацкий Ф. И., Здор В. В.* Параметрическая коррекция систем управления. – М.: Энергоиздат, 1982.
6. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Использование эллипсоидов для описания области работоспособности // Информатика и системы управления. – 2008. – № 1 (15). – С. 9-16.
7. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Реализация параллельного алгоритма аппроксимации области работоспособности выпуклым многогранником // Информатика и системы управления. – 2006. – № 1 (11). – С. 167-74.
8. *Рвачев В.Л.* Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техника, 1967.
9. *Саушев А.В.* Планирование эксперимента в электромеханике. – СПб.: СПГУВК, 2008.
10. *Саушев А.В.* Аналитический и поисковый методы параметрической оптимизации технических систем по критерию запаса работоспособности. // Журнал университета водных коммуникаций. – СПб.: СПГУВК, 2011. – Вып. 3 (XI). – С. 27-37.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:

Саушев Александр Васильевич – saushev@bk.ru.