ностью параметров объекта управления. Система уравнений, описывающая КЭМП в виде обобщенной электрической машины, может быть использована только для предварительного анализа процессов и формирования базы знаний об ОУ. Синтез СУ КЭМП целесообразно производить на основе нечетких технологий с учетом априорной информации и результатов моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уайт Д., Вудсон Г.* Электромеханическое преобразование энергии. – М.: Энергия, 1964.
2. Шпилев М.А., Ткачук А.А. Математическая модель электротехнического перекачивающего устройства с постоянными магнитами // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2012. – № II-1(10). – С.48-55.
3. *Соколовский Г.Г.* Электроприводы переменного тока с частотным управлением. – М.: ACADEMA, 2006.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Шпилевым.*

*E-mail:*
*Гринфельд Григорий Михайлович – grinfelds2002@mail.ru;*
*Иванов Сергей Николаевич – isn@initkms.ru;*
*Шпилев Михаил Анатольевич – mishka120988@mail.ru.*

УДК 510:512.8

© 2012 г. **Чье Ен Ун,** д-р техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск),
**А.Б. Шеин**, канд. техн. наук
(Чувашский государственный университет, Чебоксары)

# МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ. I

Для нахождения корней многочлена с заданной точностью предлагается простой и наглядный метод, основанный на получении итерационных формул, за счет выделения из многочленов простых и квадратичных множителей, с последующим сопоставлением записей многочленов с остатком, когда корни являются приближенными, и без остатка, когда значения корней являются точными. В первой части статьи излагается вывод итерационных формул с выделением из многочленов простых множителей.
***Ключевые слова:*** многочлены, нахождение корней, итерационные формулы, приближенные и точные решения.

## Введение

Во многих задачах анализа и синтеза систем управления, электрических цепей и электронных устройств требуются определение корней многочленов. Как известно, основная теорема алгебры комплексных чисел [1] гласит, что всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный. Теорема устанавливает для любого многочлена $n$-й степени с числовыми коэффициентами существование $n$ комплексных корней.

Поиски методов определения корней начались, естественно, с попыток вывода формул, аналогичных формуле для решения квадратного уравнения, еще древними греками. Методы решения уравнений третьей и четвертой степени относятся к XVI в. После этого почти три столетия продолжались безуспешные попытки найти формулы, выражающие при помощи радикалов корни любого уравнения пятой степени с буквенными коэффициентами через его коэффициенты. Эти попытки прекратились лишь после того, как Абель в 20-х гг., а затем Галуа в 30-х гг. XIX в. доказали, что такие формулы для уравнений $n$-й степени при любом $n \geq 5$ заведомо не могут быть найдены, хотя и не исключали возможности того, что корни всякого многочлена с числовыми коэффициентами все же каким-либо способом выражаются через коэффициенты при помощи некоторой комбинации радикалов, т.е. всякое характеристическое уравнение разрешимо в радикалах.

В настоящее время считается, “что не существует метода для разыскания точных значений корней многочленов с числовыми коэффициентами” [1]. Тем не менее самые различные проблемы науки и техники сводятся к вопросу о корнях многочленов, притом иногда достаточно высоких степеней. Поэтому задача нахождения корней многочлена $n$-й степени с заданной точностью является *актуальной* и по сегодняшний день.

Существует много методов, позволяющих достаточно быстро находить приближенное значение корня с требуемой точностью, – например, метод линейной интерполяции, называемый также методом ложного положения, метод Ньютона, а также их комбинации. В теории приближенных вычислений можно найти изложение многих других методов приближенного вычисления корней.

Среди них наиболее распространенными являются метод Лобачевского [2] (иногда ошибочно называемый методом Греффе [1]), метод Хичкока, схема Горнера для деления многочлена на двучлен и квадратный трехчлен [3] и др. Эти методы позволяют находить приближенные значения всех корней многочлена, но связаны с весьма громоздкими вычислениями [1 – 3].

Поэтому для нахождения корней многочлена с заданной точностью предлагается более простой, удобный и наглядный метод, основанный на получении итерационных формул за счет выделения из многочленов простых и квадратичных множителей, с последующим сопоставлением записей многочленов с остатком, когда корни являются приближенными, и без остатка, когда значения корней являются точными.

## Постановка задачи

Для определения корней $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ многочлена $P(p)$ используют алгебраическое уравнение $n$-й степени относительно переменной $p$

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + A_{n-2} p^{n-2} + ... + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = 0 \qquad (1)$$

или каноническую форму записи:

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \qquad (2)$$

где $a_{n-i} = A_{n-i}/A_n$ $(i = 1,2,...,n)$, $A_n \neq 0$.

Если $p_1$ корень уравнения (2), тогда многочлен $P(p)$, стоящий в левой части уравнения, делится на $(p - p_1)$ без остатка и частное есть многочлен $P_1(p)$ степени $(n-1)$: $P(p) = (p - p_1)P_1(p)$. В общем случае остаток от деления $P(p)$ на $(p - p_1)$ равен $B_0$: $P(p) = (p - p_1)P_1(p) + B_0$.

Если $P(p)$ делится без остатка на $(p - p_1)^k$, но уже не делится на $(p - p_1)^{k+1}$, то $p_1$ есть $k$-кратный корень уравнения $P(p) = 0$. В этом случае $p_1$ является общим корнем многочлена $P(p)$ и его производных вплоть до $(k-1)$-го порядка.

Если корни многочлена $P(p)$ равны $p_1$, $p_2$, …, $p_r$ и, соответственно, кратности их равны $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = n\right)$, то уравнение (2) представимо в виде произведения: $P(p) = (p - p_1)^{\alpha_1}(p - p_2)^{\alpha_2}...(p - p_r)^{\alpha_r} = 0$. Решение уравнения можно упростить, перейдя к уравнению, имеющему те же самые корни, но уже однократные [2].

Если уравнение (2) с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $p_1 = \alpha + j\beta$, то оно имеет также корень $\overline{p}_1 = \alpha - j\beta$, и притом той же кратности, что и $p_1$. Поэтому число всех комплексных корней уравнения с действительными коэффициентами всегда четное. Следовательно, уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет, по крайней мере, один действительный корень. В разложении на множители левой части уравнения (2) с действительными коэффициентами, наряду с множителем $(p - p_1)^{\alpha_1}$, где $p_1$ комплексный корень, имеется также и множитель $(p - \overline{p}_1)^{\alpha_1}$. Объединив каждую такую пару множителей, получим разложение левой части уравнения (2) на действительные множители:

$$P(p) = (p - p_1)^{\alpha_1}(p - p_2)^{\alpha_2}...(p - p_k)^{\alpha_k}\left(p^2 + s_1 p + q_1\right)^{\beta_1}...\left(p^2 + s_l p + q_l\right)^{\beta_l} = 0,$$

$$n = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{l}\beta_i,$$

где $p_1$, $p_2$, …, $p_k$ – действительные корни уравнения (2), а квадратичные множители $p^2 + s_i p + q_i$ дают еще $l$ пар корней.

Таким образом, для решения задачи нахождения корней многочленов $n$-го порядка установлены основные закономерности возможных преобразований многочленов, позволяющие найти это решение.

## Решение задачи

Умножим и разделим многочлен $P(p)$ на $(p - p_1)$. В результате этой операции получим многочлен $P_1(p)$ степени $(n-1)$, умноженный на $(p - p_1)$, и постоянный остаток $B_0$, так как в общем случае многочлен $P(p)$ делится на $(p-p_1)$ с остатком:

$$P(p)=(p-p_1)\left(B_n p^{n-1}+B_{n-1}p^{n-2}+B_{n-2}p^{n-3}+...+B_3p^2+B_2p+B_1\right)+B_0. \quad (3)$$

Раскроем скобки в правой части выражения (3) и приравняем полученные коэффициенты коэффициентам уравнения (1) при соответствующих степенях $p$:

$$\begin{aligned}&P(p)=B_n p^n+(B_{n-1}-p_1B_n)p^{n-1}+(B_{n-2}-p_1B_{n-1})p^{n-2}+...\\&\qquad ...+(B_2-p_1B_3)p^2+(B_1-p_1B_2)p+(B_0-p_1B_1)=\\&A_np^n+A_{n-1}p^{n-1}+A_{n-2}p^{n-2}+...+A_2p^2+A_1p+A_0.\end{aligned} \quad (4)$$

Получим:

$A_n=B_n,\ A_{n-1}=B_{n-1}-p_1B_n,\ A_{n-2}=B_{n-2}-p_1B_{n-1},\dots,$

$A_2=B_2-p_1B_3,\ A_1=B_1-p_1B_2,\ A_0=B_0-p_1B_1.$

При записи в виде рекуррентной формулы имеем:

$$B_n=A_n,\ B_j=A_j+p_1B_{j+1},\quad j=n-1,...,0. \quad (5)$$

Далее многочлен $P_1(p)$ умножим и разделим на $(p-p_2)$. В результате получим многочлен $P_2(p)$ степени $(n-2)$, умноженный на $(p-p_2)$, и постоянный остаток $C_1$:

$$\begin{aligned}P_1(p)&=(p-p_2)\left(C_np^{n-2}+C_{n-1}p^{n-3}+C_{n-2}p^{n-4}+...\right.\\&\qquad\left.+C_4p^2+C_3p+C_2\right)+C_1=\\&=C_np^{n-1}+(C_{n-1}-p_2C_n)p^{n-2}+(C_{n-2}-p_2C_{n-1})p^{n-3}+...\\&\qquad ...+(C_3-p_2C_4)p^2+(C_2-p_2C_3)p+(C_1-p_2C_2)=\\&=B_np^{n-1}+B_{n-1}p^{n-2}+B_{n-2}p^{n-3}+...+B_3p^2+B_2p+B_1,\end{aligned} \quad (6)$$

где $B_n=C_n, B_{n-1}=C_{n-1}-p_2C_n,\ B_{n-2}=C_{n-2}-p_2C_{n-1},...,$

$$B_3=C_3-p_2C_4,\ B_2=C_2-p_2C_3,\quad B_1=C_1-p_2C_2. \quad (7)$$

Откуда:

$C_n=B_n,\ C_j=D_j+p_2C_{j+1},$

где $J=n-1,...,1$.

Продолжая процесс умножения и деления каждого вновь полученного многочлена $P_{i-1}(p)$ на $(p-p_i)(i=3,4,...,n)$, последовательно находим:

$$\begin{aligned}P_2(p)&=(p-p_3)\left(D_np^{n-3}+D_{n-1}p^{n-4}+D_{n-2}p^{n-5}+...+\right.\\&\qquad\left.+D_5p^2+D_4p+D_3\right)+D_2=D_np^{n-2}+(D_{n-1}-p_3D_n)p^{n-3}+\\&\qquad+(D_{n-2}-p_3D_{n-1})p^{n-4}+...+(D_4-p_3D_5)p^2+\\&\qquad+(D_3-p_3D_4)p+(D_2-p_3D_3)=C_np^{n-2}+\\&\qquad+C_{n-1}p^{n-3}+C_{n-2}p^{n-4}+...+C_4p^2+C_3p+C_2,\end{aligned} \quad (8)$$

откуда:

а) $C_n=D_n, C_{n-1}=D_{n-1}-p_3D_n,\ C_{n-2}=D_{n-2}-p_3D_{n-1},...,\ C_4=D_4-p_3D_5,$
$C_3=D_3-p_3D_4, C_2=D_2-p_3D_3;$

б) $D_n = C_n, D_j = C_j + p_3 D_{j+1},$ (9)

где $j = n-1,...,2.$

$$P_3(p) = (p - p_4)\Big(F_n p^{n-4} + F_{n-1}p^{n-5} + F_{n-2}p^{n-6} + ... + \\ + F_6 p^2 + F_5 p + F_4\Big) + F_3 = F_n p^{n-3} + (F_{n-1} - p_4 F_n)p^{n-4} + \\ + (F_{n-2} - p_4 F_{n-1})p^{n-5} + ... + (F_5 - p_4 F_6)p^2 + \\ + (F_4 - p_4 F_5)p + (F_3 - p_4 F_4) = D_n p^{n-3} + \\ + D_{n-1}p^{n-4} + D_{n-2}p^{n-5} + ... + D_5 p^2 + D_4 p + D_3, \quad (10)$$

откуда:

а) $D_n = F_n,\ D_{n-1} = F_{n-1} - p_4 F_n,\ D_{n-2} = F_{n-2} - p_4 F_{n-1},...,$
$D_5 = F_5 - p_4 F_6,\ D_4 = F_4 - p_4 F_5,\ D_3 = F_3 - p_4 F_4;$

б) $F_n = D_n, F_j = D_j + p_4 F_{j+1},$ (11)

где $j = n-1,...,3,$

$$P_4(p) = (p - p_5)\Big(G_n p^{n-5} + G_{n-1}p^{n-6} + G_{n-2}p^{n-7} ... + \\ + G_7 p^2 + G_6 p + G_5\Big) + G_4 == G_n p^{n-4} + (G_{n-1} - p_5 G_n)p^{n-5} + \\ + (G_{n-2} - p_5 G_{n-1})p^{n-6} + ... + (G_6 - p_5 G_7)p^2 + \\ + (G_5 - p_5 G_6)p + (G_4 - p_5 G_5) = F_n p^{n-4} + F_{n-1}p^{n-5} + \\ + F_{n-2}p^{n-6} + ... + F_6 p^2 + F_5 p + F_4, \quad (12)$$

откуда:

а) $F_n = G_n,\ F_{n-1} = G_{n-1} - p_5 G_n,\ F_{n-2} = G_{n-2} - p_5 G_{n-1},...,$
$F_6 = G_6 - p_5 G_7,\ F_5 = G_5 - p_5 G_6,\ \ F_4 = G_4 - p_5 G_5;$

б) $G_n = F_n, G_j = F_j + p_5 G_{j+1},$ (13)

где $j = n-1,...,4.$

…

$$P_{n-3}(p) = (p - p_{n-2})\Big(H_n p^2 + H_{n-1}p + H_{n-2}\Big) + H_{n-3} = \\ = H_n p^3 + (H_{n-1} - p_{n-2}H_n)p^2 + (H_{n-2} - p_{n-2}H_{n-1})p + \\ + (H_{n-3} - p_{n-2}H_{n-2}) = L_n p^3 + L_{n-1}p^2 + L_{n-2}p + L_{n-3}, \quad (14)$$

откуда:

а) $L_n = H_n,\ L_{n-1} = H_{n-1} - p_{n-2}H_n,\ L_{n-2} = H_{n-2} - p_{n-2}H_{n-1},$
$L_{n-3} = H_{n-3} - p_{n-2}H_{n-2};$

б) $H_n = L_n, H_j = L_j + p_{n-2}H_{j+1},$ (15)

где $j = n-1,...,n-3.$

$$P_{n-2}(p) = (p - p_{n-1})(S_n p + S_{n-1}) + S_{n-2} = S_n p^2 + (S_{n-1} - p_{n-1}S_n)p + \\ + (S_{n-2} - p_{n-1}S_{n-1}) = H_n p^2 + H_{n-1}p + H_{n-2}, \quad (16)$$

откуда:

а) $H_n = S_n, H_{n-1} = S_{n-1} - p_{n-1}S_n,\ H_{n-2} = S_{n-2} - p_{n-1}S_{n-1};$

б) $S_n = H_n, S_j = H_j + p_{n-1}S_{j+1},$ (17)

где $j = n-1,...,n-2$.

$$P_{n-1}(p) = (p - p_n)R_n + R_{n-1} = R_n p + (R_{n-1} - p_n R_n) = S_n p + S_{n-1}, \quad (18)$$

откуда:

а) $S_n = R_n, S_{n-1} = R_{n-1} - p_n R_n;\ R_n = S_n, R_{n-1} = S_{n-1} + p_n R_n.$ (19)

В результате имеем:

$$\begin{aligned}
&P(p) = (p - p_1)P_1(p) + B_0,\\
&P_1(p) = (p - p_2)P_2(p) + C_1,\\
&P_2(p) = (p - p_3)P_3(p) + D_2,\\
&P_3(p) = (p - p_4)P_4(p) + F_3,\\
&P_4(p) = (p - p_5)P_5(p) + G_4,\\
&\qquad\qquad \dots \\
&P_{n-3}(p) = (p - p_{n-2})P_{n-2}(p) + H_{n-3},\\
&P_{n-2}(p) = (p - p_{n-1})P_{n-1}(p) + S_{n-2},\\
&P_{n-1}(p) = (p - p_n)R_n + R_{n-1}.
\end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, многочлен $P(p)$ может иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&P(p) = (p - p_1)P_1(p) + B_0 = \dots\dots = (p - p_1)((p - p_2)\cdot\\
&\quad \cdot((p - p_3)((p - p_4)((p - p_5).(...((p - p_{n-2})((p - p_{n-1})\cdot\\
&\quad \cdot((p - p_n)R_n + R_{n+1}) + S_{n-2}) + H_{n-3})...) + G_4) + F_3) + D_2) + C_1) + B_0.
\end{aligned} \quad (21)$$

Раскрывая скобки в выражении (21), получим:

$$\begin{aligned}
&P(p) = = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)\ (p - p_5)...(p - p_{n-2})\cdot\\
&\quad \cdot(p - p_{n-1})(p - p_n)R_n + (p - p_1)(p - p_2)\ (p - p_3)(p - p_4)\cdot\\
&\quad \cdot(p - p_5)...(p - p_{n-2})(p - p_{n-1})R_{n-1} + (p - p_1)(p - p_2)\cdot\\
&\quad \cdot(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)...(p - p_{n-2})S_{n-2} +\\
&\quad + (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)\ ...H_{n-3} +\\
&\qquad\qquad \dots\\
&\quad + (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)G_4 +\\
&\quad + (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)F_3 + + (p - p_1)(p - p_2)D_2 + (p - p_1)C_1 + B_0.
\end{aligned} \quad (22)$$

Формула (20) является общей формой записи многочлена $P(p)$.

Пусть $n = 4$. Тогда, следуя формуле (20), можно записать:

$$\begin{aligned}
&P(p) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)\ G_4 + (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)F_3 +\\
&\quad + (p - p_1)(p - p_2)D_2 + (p - p_1)C_1 + B_0,
\end{aligned}$$

где, согласно формулам (5), (7), (9) и (11), имеем:

$$\begin{aligned}
&B_4 = A_4,\ B_3 = A_3 + p_1B_4 = A_3 + p_1A_4,\ B_2 = A_2 + p_1B_3 = A_2 + p_1(A_3 + p_1A_4),\\
&B_1 = A_1 + p_1B_2 = A_1 + p_1(A_2 + p_1(A_3 + p_1A_4)),\\
&B_0 = A_0 + p_1B_1 = A_0 + p_1(A_1 + p_1(A_2 + p_1(A_3 + p_1A_4))),
\end{aligned} \quad (23)$$

по правилу Горнера;

$$C_4 = B_4,\ C_3 = B_3 + p_2C_4 = B_3 + p_2B_4,\ C_2 = B_2 + p_2C_3 = B_2 + p_2(B_3 + p_2B_4),$$

$$C_1 = B_1 + p_2 C_2 = B_1 + p_2(B_2 + p_2(B_3 + p_2 B_4));\ D_4 = C_4, \tag{24}$$
$$D_3 = C_3 + p_3 D_4 = C_3 + p_3 C_4,\ D_2 = C_2 + p_3 D_3 = C_2 + p_3(C_3 + p_3 C_4);$$
$$F_4 = D_4,\ F_3 = D_3 + p_4 F_4 = D_3 + p_4 D_4;$$
$$G_4 = F_4 = \ldots = A_4. \tag{25}$$

Следовательно, для нахождения корней многочлена

$$P(p) = A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$$

могут быть использованы уравнения:

$$A_0 + p_1(A_1 + p_1(A_2 + p_1(A_3 + p_1 A_4))) = A_4 p_1{}^4 + A_3 p_1{}^3 + A_2 p_1{}^2 + A_1 p_1 + A_0 = 0,$$
$$B_1 + p_2(B_2 + p_2(B_3 + p_2 B_4)) = B_4 p_2^3 + B_3 p_2^2 + B_2 p_2 + B_1 = 0,$$
$$C_2 + p_3(C_3 + p_3 C_4) = C_4 p_3{}^2 + C_3 p_3 + C_2 = 0,$$
$$D_3 + p_4 D_4 = D_4 p_4 + D_3 = 0. \tag{26}$$

Если действительный корень $p_1$ определен из решения первого уравнения системы равенств (23), то действительный корень $p_2$ находится из решения второго уравнения этой системы, но после того, как по уравнениям (23) будут определены коэффициенты $B_1, B_2, B_3, B_4$. Аналогично могут быть найдены корни $p_3$ и $p_4$. Следовательно, если действительный корень $p_1$ найден, то следующий действительный корень находится из уравнения, степень которого на единицу меньше степени предыдущего уравнения.

Для нахождения действительных корней многочлена $P(p)$ $n$-й степени может быть использован следующий метод. Предположим, что известно приближенное значение корня $p_1^{(1)}$. Умножим и разделим многочлен $P(p)$ на $(p - p_1^{(1)})$. Остановим деление многочлена $P(p)$ на предпоследнем шаге. Тогда имеем:

$$P(p) = (p - p_1^{(1)})(B_n p^{n-1} + B_{n-1}^{(1)} p^{n-2} + \ldots + B_3^{(1)} p^2 + B_2^{(1)} p) +$$
$$+ B_1^{(1)}(p - p_1^{(1)}) + B_0^{(1)}. \tag{27}$$

Теперь представим многочлен $P(p)$ в виде:

$$P(p) = (p - p_1^{(1)})\ (B_n p^{n-1} + B_{n-1}^{(1)} p^{n-2} + \ldots + B_2^{(1)} p) + B_1^{(1)}(p - p_1^{(2)}). \tag{28}$$

Запись многочлена $P(p)$ в виде равенства (25) предполагает, что деление выполнено без остатка, а следовательно, значение корня $p_1^{(2)}$ является точным.

Найдем значение корня $p_1^{(2)}$, выполнив сопоставление формул (24) и (25): $B_1^{(1)}(p - p_1^{(1)}) + B_0^{(1)} = B_1^{(1)}(p - p_1^{(2)})$, откуда:

$$p_1^{(2)} = p_1^{(1)} - \frac{B_0^{(1)}}{B_1^{(1)}}, \tag{29}$$

где коэффициенты $B_0^{(1)}$ и $B_1^{(1)}$ определяются по формуле (5):

$$B_n = A_n,\ B_j^{(1)} = A_j + p_1^{(1)} B_{j+1}^{(1)},\ j = n-1,\ldots,0.$$

Еще одна формула для нахождения точного значения корня $p_1^{(2)}$ может быть получена, если преобразовать формулы (27) и (28). Из равенства (28) находим $P(p_1^{(1)}) = B_1^{(1)}(p_1^{(1)} - p_1^{(2)}), P(0) = -B_1^{(1)} p_1^{(2)}.$ Исключая из полученных равенств коэффициент $B_1^{(1)}$, получим:

$$p_1^{(2)} = \frac{p_1^{(1)} P(0)}{P(0) - P(p_1^{(1)})} = p_1^{(1)} + \frac{p_1^{(1)} P(p_1^{(1)})}{P(0) - P(p_1^{(1)})}, \tag{30}$$

где, согласно формуле (27), $P(p_1^{(1)}) = B_0^{(1)}$, причем коэффициент $B_0^{(1)}$ находится по формуле (5): $B_n = A_n, B_j^{(1)} = A_j + p_1^{(1)} B_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,...,0,$ а так как

$$P(p) = A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + ... + A_2 p^2 + A_1 p + A_0,$$

то $P(0) = A_0$.

В результате формула (30) принимает вид:

$$p_1^{(2)} = \frac{p_1^{(1)} A_0}{A_0 - B_0^{(1)}} = p_1^{(1)} + \frac{p_1^{(1)} B_0^{(1)}}{A_0 - B_0^{(1)}}. \tag{31}$$

*Пример 1*. Требуется найти действительный корень многочлена

$$P(p) = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$$

по формулам (29) и (31), где $A_3 = 1; A_2 = 20; A_1 = 1{,}01 \cdot 10^8; A_0 = 1{,}01 \cdot 10^9$.

Зададим первоначальное (приближенное) значение корня $p_1^{(1)} = -1$.Для реализации формулы (29) определяем: $B_3 = A_3 = 1, B_2^{(1)} = A_2 + p_1^{(1)} B_3 = 19,$ $B_1^{(1)} = A_1 + p_1^{(1)} B_2^{(1)} = 1{,}00999 \cdot 10^8$, $B_0^{(1)} = A_0 + p_1^{(1)} B_1^{(1)} = 9{,}09001 \cdot 10^8$. Следовательно, $p_1^{(2)} = p_1^{(1)} - B_0^{(1)} \big/ B_1^{(1)} = -10{,}000099$. Найдем значение действительного корня многочлена по формуле (31): $p_1^{(2)} = p_1^{(1)} + \dfrac{p_1^{(1)} B_0^{(1)}}{A_0 - B_0^{(1)}} = -10{,}000099$. Видно, что вычисления значений действительного корня многочлена $P(p)$ по формулам (29) и (31) дают одинаковый результат: $p_1 = -10{,}000099$. Это значение полностью совпадает со значением корня, полученным по точной формуле нахождения корня, выраженной через радикалы. При этом в отличие от формулы (31) формула (29) является более универсальной, так как позволяет задавать самые различные первоначальные значения корня $p_1^{(1)}$, включая ноль. Аналогично могут быть получены формулы для нахождения корней $p_2, p_3, ..., p_n$:

$$p_2^{(2)} = p_2^{(1)} - C_1^{(1)} \big/ C_2^{(1)}, \tag{32}$$

где $C_n = B_n, C_j^{(1)} = B_j^{(1)} + p_2^{(1)} C_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,..,1$;

$$p_3^{(2)} = p_3^{(1)} - D_2^{(1)} \big/ D_3^{(1)}, \tag{33}$$

где $D_n = C_n, D_j^{(1)} = C_j^{(1)} + p_3^{(1)} D_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,..,2$;

$$p_4^{(2)} = p_4^{(1)} - F_3^{(1)} \big/ F_4^{(1)}, \tag{34}$$

где $F_n = D_n, F_j^{(1)} = D_j^{(1)} + p_4^{(1)} F_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,..,3;$

$$p_5^{(2)} = p_5^{(1)} - G_4^{(1)} \big/ G_5^{(1)}, \quad (35)$$

где $G_n = F_n, G_j^{(1)} = F_j^{(1)} + p_5^{(1)} G_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,..,4$;

$$\ldots$$

$$p_{n-2}^{(2)} = p_{n-2}^{(1)} - H_{n-3}^{(1)} \big/ H_{n-2}^{(1)}, \quad (36)$$

где $H_n = L_n, H_j^{(1)} = L_j^{(1)} + p_{n-2}^{(1)} H_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1,..,n-3$;

$$p_{n-1}^{(2)} = p_{n-1}^{(1)} - S_{n-2}^{(1)} \big/ S_{n-1}^{(1)}, \quad (37)$$

где $S_n = H_n, S_j^{(1)} = H_j^{(1)} + p_{n-1}^{(1)} S_{j+1}^{(1)}, \ j = n-1, n-2$;

$$p_n^{(2)} = p_n^{(1)} - R_{n-1}^{(1)} \big/ R_n, \quad (38)$$

где $R_n = S_n, R_{n-1}^{(1)} = S_{n-1}^{(1)} + p_n^{(1)} R_n$.

Если первоначальные значения корней многочлена $P(p)$ заданы приближенно, тогда формулы нахождения корней (29), (31) – (38) могут быть представлены в виде формул простых одношаговых итераций. Для этого значения корней $p_1^{(1)}, p_2^{(1)},..., p_n^{(1)}$ заменяются на значения $p_1^{(m)}, p_2^{(m)},..., p_n^{(m)}$, а значения корней $p_1^{(2)}, p_2^{(2)},..., p_n^{(2)}$ – на улучшенные значения, равные $p_1^{(m+1)}, p_2^{(m+1)},..., p_n^{(m+1)}$. Так, например, уравнение (29) может быть записано в виде: $p_1^{(m+1)} = p_1^{(m)} - B_0^{(m)} \big/ B_1^{(m)}$, где $m$ – число итераций для вычисления корня $p_1$ с требуемой точностью, а коэффициенты $B_0^{(m)}$ и $B_1^{(m)}$ определяются для каждого $m$-го приближения по формуле (5): $B_n = A_n, B_j^{(m)} = A_j + p_1^{(m)} B_{j+1}^{(m)}, \ j = n-1,...,0$.

## Заключение

Таким образом, предложена простая и наглядная итерационная процедура нахождения корней многочленов *n*-й степени, основанная на выделении из многочленов простых множителей, с последующим сопоставлением записей многочленов с остатком, когда корни являются приближенными, и без остатка, когда значения корней точные. Предлагаемый метод удобен для использования в системах автоматизированного анализа и синтеза систем управления, электрических цепей и электронных устройств.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980.
3. *Воробьева Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по численным методам. – М.: Высшая школа, 1979.



*E-mail:*
*Чье Ен Ун – chye@ais.khstu.ru;*
*Шеин Александр Борисович – chye@ais.khstu.ru.*