УДК 519.234

© 2013 г. **В.Г. Алексеев**, д-р физ.-мат. наук
(Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва)

О ВЫБОРЕ ЯДРА ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Обсуждаются вопросы, связанные с выбором весовой функции (ядра) при построении оценки плотности вероятности типа Розенблатта – Парзена. Указаны условия, при которых применение знакопеременных весовых функций (ядер старших порядков) приводит к существенному улучшению качества оценивания плотности вероятности. Указана также литература, позволяющая читателю выбрать весовую функцию нужного ему порядка с ограниченным носителем.
***Ключевые слова*:** непараметрическая оценка плотности вероятности, знакопеременные ядра (ядра старших порядков), ядро бесконечного порядка (синк-ядро), выбор порядка весовой функции.

Введение

Настоящая работа по существу инициирована статьей [1], посвященной исследованию непараметрических (ядерных) оценок плотности вероятности по выборке конечного объема. Вводя в рассмотрение непараметрическую (ядерную) оценку типа Розенблатта – Парзена, авторы статьи [1] исследуют дисперсию ее интегральной квадратической ошибки. При этом они ограничиваются рассмотрением лишь неотрицательных весовых функций при построении оценки Розенблатта – Парзена. В настоящей статье будет указана возможность и желательность отказа от предположения о неотрицательности весовой функции (ядра) при построении оценки Розенблатта – Парзена. Будет указана литература, однозначно свидетельствующая, что применение знакопеременных весовых функций позволяет во многих случаях существенно (иногда даже многократно) уменьшить ошибку оценивания плотности вероятности.

Завершая вводную часть статьи, условимся, что интеграл без указания пределов будет обозначать всюду в дальнейшем интегрирование в бесконечных пределах, а символ «~» − пропорциональность двух величин. В целях удобства читателя во всех последующих формулах будут в основном (по возможности) сохранены обозначения работы [1].

1. Некоторые предварительные сведения

Приведем используемые в дальнейшем сведения, касающиеся полиномиальных B-сплайнов Шенберга нечетных степеней. B-сплайн $a_l(t)$, $l = 1, 2, \ldots$, определяется соотношением

$$a_l(t) = (2\pi)^{-1} \int \left[\frac{\sin(y/2)}{y/2} \right]^{2l} e^{ity}\, dy.$$

Все функции $a_l(t)$ финитны (имеют ограниченный носитель), каждая из них является сплайном степени $2l - 1$. Последнее означает, что функция $a_l(t)$ «склеена» из многочленов степени $2l - 1$. Точные формулы для функций $a_l(t)$ могут быть найдены в работе [2] для $l = 1, 2, \ldots, 6$, в работе [3] – для $l = 7$ и в работе [4] – для $l = 8$. В работе [4] читатель найдет также ряд примеров применения B-сплайнов нечетных степеней в статистической радиотехнике и в ряде разделов прикладной математики.

Формулы для функций $a_l(t)$, $l = 1, 2$ занимают одну и, соответственно, две строки. Однако с каждым переходом от l к $l + 1$ формулы, описывающие функции $a_l(t)$, становятся все более объемными. Воспроизводить их в настоящей работе мы не будем. Функции $a_l(t)$, $l \leq 7$, будут использованы в разделе 2 без повторных ссылок на работы [2, 3].

2. Оценки плотности вероятности. L_2-подход

Итак, пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \tag{1}$$

является выборкой из n независимых наблюдений случайной величины X с неизвестной плотностью вероятности $p(x)$. Критерием качества той или иной статистической оценки в рамках L_2-подхода является интегральная среднеквадратическая ошибка (ИСКО). В частности, если речь идет об оценке плотности вероятности, то имеется в виду величина

$$J(p_n) = \mathsf{E} \int \left[p_n(x) - p(x) \right]^2 dx, \tag{2}$$

где $p_n(x)$ − конструируемая нами оценка функции $p(x)$.

Классическая ядерная оценка (оценка Розенблатта – Парзена) функции $p(x)$ по выборке (1) строится в виде

$$p_n(x) = \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{X_i - x}{c} \right), \tag{3}$$

где $c = c(n)$ – некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n\to\infty} c = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nc = \infty, \tag{4}$$

а $\Phi(u)$ − некоторая четная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int \Phi(u)\, du = 1, \quad \int \Phi^2(u)\, du < \infty. \tag{5}$$

В дальнейшем функцию $\Phi(u)$ будем называть ядром, или весовой функцией оценки (3).

Наконец, порядком весовой функции $\Phi(u)$ назовем наименьшее четное число $r \geq 2$, для которого $\int u^r \Phi(u) du \neq 0$. Хорошо известно (см., например, [5, теорема 2], [6, разд. 2, табл. 1], [7, разд. 3, замечание 2], [8, разд. 1], [9, разд. 4.2]), что при достаточно больших (хотя и не астрономических) значениях объема выборки n применение весовых функций старших порядков (т.е. порядков $r > 2$) позволяет существенно (иногда даже многократно) уменьшить ошибку оценивания, если только оцениваемая плотность вероятности $p(x)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией. Улучшение качества оценивания достигается здесь за счет того, что весовые функции старших порядков устраняют главные члены смещения оценки (3). Наиболее общая закономерность может быть сформулирована здесь следующим образом: *в предположении достаточной гладкости функции $p(x)$ с ростом объема выборки n постепенно возрастает как порядок r оптимальной весовой функции* $\Phi(u)$, *так и достигаемый с ее помощью выигрыш в точности оценивания*. Наглядной иллюстрацией к этому последнему утверждению может служить табл. 1 из работы [6].

Разумеется, применение весовых функций старших порядков не может быть рекомендовано в тех случаях, когда нет оснований предполагать, что оцениваемая плотность вероятности $p(x)$ является достаточно гладкой функцией. Здесь, очевидно, следует использовать одну из весовых функций минимального (второго) порядка. Весовыми функциями второго порядка являются, в частности, все неотрицательные весовые функции.

Ниже приводится предложенный в работе [10, разд. 2] набор весовых функций $\Phi(u) = \Phi_r(u)$ порядков $r = 2, 4, \ldots, 12$:

$\Phi_2(u) = a_2(u)$,

$\Phi_4(u) = 3a_2(u) - 2a_3(u)$,

$\Phi_6(u) = 6a_2(u) - 8a_3(u) + 3a_4(u)$,

$\Phi_8(u) = 10a_2(u) - 20a_3(u) + 15a_4(u) - 4a_5(u)$,

$\Phi_{10}(u) = 15a_2(u) - 40a_3(u) + 45a_4(u) - 24a_5(u) + 5a_6(u)$,

$\Phi_{12}(u) = 21a_2(u) - 70a_3(u) + 105a_4(u) - 84a_5(u) + 35a_6(u) - 6a_7(u)$.

Каждая из весовых функций $\Phi_r(u)$ является линейной комбинацией полиномиальных B-сплайнов Шенберга $a_l(u)$, $l \leq 7$. Носителем каждой из весовых функций $\Phi(u) = \Phi_r(u)$ является конечный интервал, что существенно ускоряет вычисление оценки (3) плотности вероятности. При достаточно больших n правая часть этой последней формулы будет реально зависеть лишь от небольшой доли исходных наблюдений X_i.

Каждая из приведенных выше шести весовых функций $\Phi(u)$ допустима в том смысле, что не существует другой весовой функции $\Phi_*(u)$, которая была бы (в рамках критерия (2)) не хуже функции $\Phi(u)$ одновременно для всех плотностей вероятности $p(x)$ и для всех n и c из области их значений.

Еще одно семейство допустимых весовых функций с ограниченным носителем описывается формулой

$$\Phi(u) = \begin{cases} (1+\alpha)\left(1-|u|^{\alpha}\right)/2\alpha, & |u| \leq 1, \\ 0, & |u| > 1, \end{cases} \tag{6}$$

где $0 < \alpha \le 1$ (см. [11, формула (6)]). Функция (6) впервые была предложена в работе [12] (см. также [13, § 1]).

Опираясь на формулу

$$J(p_n) \equiv \mathsf{E}\int \left[p_n(x) - p(x)\right]^2 dx = (2\pi n)^{-1}\int \left|W(ct)\right|^2 \left(1 - \left|V(t)\right|^2\right)dt + \\ + (2\pi)^{-1}\int \left|V(t)\right|^2 \left|1 - W(ct)\right|^2 dt, \tag{7}$$

где $V(t) = \int p(x)\exp(itx)dx$ и $W(t) = \int \Phi(x)\exp(itx)\,dx$, Д.Б.Х. Клайн [14] установил, что условием допустимости весовой функции $\Phi(u)$ является соотношение $0 \le W(t) \le 1$. Ему же принадлежит термин «допустимая весовая функция». Формула (7) для величины $J(p_n)$ ранее была приведена (в несколько иных обозначениях) в работах [15, 16].

Наряду с весовыми функциями (ядрами) конечных порядков $r < \infty$, рассмотрим весовую функцию бесконечного порядка (синк-ядро)

$$\Phi(u) = (\sin u)/\pi u, \tag{8}$$

преобразование Фурье которой описывается формулой

$$W(t) \equiv \int \Phi(u)\, e^{itu}\, du = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 1/2, & |t| = 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Оценка плотности вероятности типа (3) с использованием ядра (8) рассматривалась ранее в статьях [6, 8, 14, 16 – 19] и в монографии [20, гл. 5, § 11]. Благоприятные асимптотические свойства оценки плотности вероятности, конструируемой с помощью синк-ядра (8), указаны, в частности, в работе [19, теоремы 1, 2]. Следует, однако, иметь в виду, что при малых значениях объема выборки n весовая функция (8) ни в коей мере не является оптимальной. Ее преимущество перед весовыми функциями конечных порядков проявляется лишь при достаточно больших n (здесь мы имеем возможность снова указать на таблицу 1 из работы [6]). Но при больших n расход времени при вычислении оценки $p_n(x)$, конструируемой с помощью ядра (8), может оказаться неприемлемо большим, так как носителем ядра (8) является вся бесконечная прямая (за исключением лишь счетного множества точек вида $u=k\pi$, где k −целое число, $k \ne 0$). Здесь следует иметь в виду, что оценка плотности вероятности $p(x)$ вычисляется обычно не для двух – трех значений аргумента x, а для существенно более обширного набора его значений. Учитывая последнее обстоятельство, приходим к выводу, что оценка $p_n(x)$ с ядром (8) не может быть рекомендована в качестве приоритетной оценки плотности вероятности. Сходная рекомендация может быть найдена в монографии [20, с. 142].

До сих пор все наши рассмотрения касались лишь функционального параметра $\Phi(u)$ в формуле (3). Что же касается числового параметра (параметра сглаживания) $c = c(n)$ в той же формуле, то его выбор обсуждается едва ли не в каждой работе, посвященной статистическому оцениванию плотности вероятности. В этой связи мы укажем лишь на работы [8, 21 – 23] и на обзоры [9, 24]. Заметим, однако, что в каждой из работ [8, 21 – 24] вводятся те или иные предположения, касающиеся ограниченности или степени гладкости оцениваемой плотности вероятности. По-видимому, наименее ограничительно предположение работы [8, теорема 4.1]. Здесь предполагается лишь, что плотность вероятности $p(x)$ ограничена.

Сопоставляя работы [8, 9, 21 – 24], автор этих строк не может указать на какую-то одну из них, рекомендациям которой он отдал бы предпочтение. Задача отыскания оптимального значения параметра сглаживания c, очевидно, не из простых, и полной ясности здесь пока еще нет. Можно утверждать, однако, что при фиксированном n с каждым переходом к весовой функции $\Phi(u)$ очередного более высокого *конечного* порядка оптимальное значение параметра c возрастает. Если же мы переходим к весовой функции $\Phi(u)$ бесконечного порядка, то возможны случаи как возрастания, так и убывания оптимального значения параметра c. Наглядной иллюстрацией к этому последнему утверждению может служить табл. 2 из работы [6].

3. Оценки плотности вероятности. *C*-подход

В настоящем разделе будет коротко рассмотрено построение оценки плотности вероятности в рамках *C*-подхода. Напомним, что сходимость последовательности функций $p_n(x)$ к функции $p(x)$ в рамках *C*-подхода означает ее равномерную сходимость в пределах заданного отрезка $[a, b]$. В дальнейшем оцениваемую плотность вероятности $p(x)$ будем считать заданной на всей бесконечной прямой, поэтому отрезок $[a, b]$ преобразуется здесь в множество $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$. Ранее равномерная сходимость оценок плотности вероятности изучалась в работах [25 – 31].

Как и в разделе 2, наши рекомендации по выбору весовой функции (ядра) $\Phi(u)$ будут существенным образом зависеть от априорных предположений исследователя относительно степени гладкости оцениваемой плотности вероятности. Пусть априорные сведения позволяют нам предполагать, что оцениваемая плотность вероятности $p(x)$ дифференцируема m раз, $m = 0, 1, 2, \ldots$, и ее m-я производная является функцией из класса Lip α, где $0 < \alpha \le 1$. Последнее означает, что для любых точек x' и x'' на прямой x выполнено неравенство

$$\left|f^{(m)}(x') - f^{(m)}(x'')\right| \le M\left|x' - x''\right|^{\alpha},$$

где M – некоторая постоянная. Величину $\beta = m + \alpha$ будем называть параметром гладкости плотности вероятности $p(x)$.

Относительно весовой функции $\Phi(u)$ в формуле (3) будем предполагать, что она непрерывна, четна, обращается в нуль вне интервала $(-1, 1)$, удовлетворяет, как и в разделе 2, условиям (5) и, кроме того, имеет непрерывную производную на интервале $(-1, 1)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема [31]. *Пусть задан параметр гладкости* $\beta > 0$, *причем* $2l < \beta \le 2(l+1)$, *где* l *– целое неотрицательное число. Если порядок* r *весовой функции* $\Phi(u)$ *равен* $2(l+1)$, *а последовательность* $c = c(n)$ *удовлетворяет условию*

$$c \sim \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/[2(1+\beta)]},$$

то с вероятностью 1:

$$\sup_x \left| p_n(x) - p(x) \right| = O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n} \right)^{\beta/[2(1+\beta)]} \right) \quad \textit{при } n \to \infty. \tag{9}$$

Нетрудно показать, что, ограничиваясь лишь неотрицательными весовыми функциями $\Phi(u)$, при всех $\beta > 2$ невозможно получить ничего лучшего, чем

$$\sup_x \left| p_n(x) - p(x) \right| = O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n} \right)^{1/3} \right). \tag{10}$$

Легко видеть, что скорость сходимости (9) оказывается более высокой, чем (10), если $\beta > 2$.

Наборы весовых функций старших порядков могут быть найдены в работах [32 – 34]. При этом максимальный порядок r весовой функции $\Phi(u) = \Phi_r(u)$ варьирует для разных наборов от $r = 6$ до $r = 20$. Носителем каждой из весовых функций, предложенных в работах [32 – 34], является конечный интервал. Разумеется, весовые функции $\Phi(u)$, предложенные в работах [10, 11] и воспроизведенные в разделе 2 настоящей работы, также могут быть использованы, хотя условие допустимости весовой функции в смысле [14] здесь уже значения не имеет.

Здесь надо заметить, что хотя весовая функция (6) была предложена в работе [12] для всех α из интервала (0, 2], в работе [11] и в разделе 2 настоящей работы указан более узкий интервал значений параметра α, так как в случае $1 < \alpha \le 2$ весовая функция (6) перестает быть допустимой в смысле [14]. Заметим также, что если в формуле (6) положить $\alpha = 2$ и, кроме того, параметр сглаживания c положить равным квадратному корню из 5, то функция $(1/c)\Phi(u/c)$ будет совпадать с ядром Епанечникова, определенным формулой (13) работы [35]. Легко видеть, что, наряду с функцией $\Phi(u)$, ядром оценки (3) плотности вероятности может служить функция $(1/c)\Phi(u/c)$, каково бы ни было $c > 0$: вместе с функцией $\Phi(u)$ она удовлетворяет условиям (5).

4. Оценка интеграла от квадрата плотности вероятности

В настоящем разделе нас будет интересовать статистическое оценивание нелинейного функционала от плотности вероятности $Q(p) = \int p^2(x)dx$. Непараметрические оценки функционала $Q(p)$ рассматривались ранее в работах [36 – 40], где может быть найдена дальнейшая библиография.

В качестве оценки функционала $Q(p)$ по выборке (1) рассмотрим случайную величину

$$Q_n(p) = \frac{1}{n(n-1)c} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi\left(\frac{X_j - X_k}{c} \right), \tag{11}$$

где весовая функция $\Phi(u)$ и последовательность $c = c(n)$ – те же, что и в формуле (3). Согласно [37, разд. 1],

$$\mathsf{E}\left[Q_n(p) - Q(p)\right]^2 = \frac{4}{n}\left\{ \int p^3(x)\,dx - \left[\int p^2(x)\,dx\right]^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{12}$$

каков бы ни был порядок $r < \infty$ весовой функции $\Phi(u)$, если только производная $p^{(r)}(x)$ плотности вероятности $p(x)$ ограничена, последовательность $c = c(n)$, в добавление к условиям (4), удовлетворяет условию

$$\lim_{n \to \infty} nc^{2r} = 0,$$

а весовая функция $\Phi(u)$, в добавление к условиям (5), удовлетворяет условию

$$\int u^m \left|\Phi(u)\right| du < \infty, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

В силу предположения об ограниченности весовой функции $\Phi(u)$ условие (13) выполняется автоматически, если носитель функции $\Phi(u)$ ограничен.

Подробное доказательство соотношения (12) в работе [37] не приводится, так как этот результат, по существу, совпадает с результатом работы [36, разд. 3].

Так как главный член правой части соотношения (12) не зависит от r, то при построении статистической оценки (11) проще всего воспользоваться весовой функцией $\Phi(u)$ второго порядка.

Заключение

Применение весовых функций старших порядков (знакопеременных весовых функций) при построении оценки плотности вероятности типа Розенблатта – Парзена может во многих случаях существенно улучшить качество оценивания плотности вероятности. Весовые функции до 20-го порядка включительно с ограниченным носителем могут быть найдены в указанной читателю литературе. Что же касается ядра бесконечного порядка (синк-ядра) (8), то его применение в качестве весовой функции оценки Розенблатта – Парзена в принципе возможно, но область применения ограничена. В качестве приоритетной весовой функции при построении оценки Розенблатта – Парзена ядро бесконечного порядка (синк-ядро) рекомендовано быть не может. Наконец, применение неотрицательных весовых функций (ядер второго порядка) также не исключается, но лишь в определенных условиях, за пределами которых они должны уступить место весовым функциям старших порядков. При этом, если ошибка оценивания измеряется в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$, то следует использовать допустимые (в смысле [14]) весовые функции, приведенные (со ссылками на работы [10, 11]) в разделе 2 настоящей работы. Если же ошибка оценивания измеряется в метрике пространства непрерывных функций $C(-\infty, \infty)$, то условие допустимости может быть опущено. В этом случае, наряду с весовыми функциями из раздела 2, могут быть использованы весовые функции из работ [32 – 34]. Во всех случаях выбор весовой функции $\Phi(u)$ существенным образом зависит от априорных предположений исследователя относительно степени гладкости оцениваемой плотности вероятности и от объема выборки n.

Рассмотренные в настоящей работе (разделы 2 и 3) подходы к статистическому оцениванию плотности вероятности, разумеется, не являются единственно возможными. Широко известен, в частности, L_1-подход, в рамках которого ошибка оценивания плотности вероятности описывается величиной $\mathsf{E}\int\left| p_n(x) - p(x)\right| dx$. В этой связи мы укажем на уже упоминавшуюся работу [20]. Некоторые дальнейшие подходы к статистическому оцениванию плотности вероятности могут быть найдены в работах [41, 42].

Наконец, заметим, что статистическое оценивание плотности вероятности $p(x)$ – это лишь одна из задач непараметрической статистики. Сходные методы и сходные (хотя и не тождественные) рекомендации остаются в силе и в таких разделах непараметрической статистики как спектральный и биспектральный анализ стационарных случайных процессов, выделение трендов (аддитивных детерминированных составляющих) некоторых классов случайных процессов и полей, статистическое оценивание интенсивности неоднородного процесса Пуассона, математического ожидания периодически коррелированного случайного процесса, а также кривых и поверхностей регрессии. В качестве предельно краткого списка литературы к перечисленным выше задачам непараметрической статистики могут быть указаны работы автора этой статьи [43 – 51] (последняя из них в соавторстве с В.А. Суходоевым).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лапко А.В.*, *Лапко В.А.* Анализ дисперсии среднеквадратической ошибки аппроксимации непараметрической оценки плотности вероятности ядерного типа // Информатика и системы управления. – 2012. – № 3(33). – С. 132-139.
2. *Алексеев В.Г.* Новые непрерывные фильтры нижних частот // Радиотехника (Москва). – 1998. – № 4. – С. 34-35.
3. *Алексеев В.Г.* Новый аналоговый фильтр нижних частот // Радиотехника (Москва). – 2005. – № 10. – С. 143-144.
4. *Алексеев В.Г.*, *Суходоев В.А.* Полиномиальные В-сплайны Шенберга нечетных степеней. Краткий обзор применений // Журнал вычислительной математики и матем. физики. – 2012. – Т. 52, № 10. – С. 1756-1767.
5. *Надарая Э.А.* Об интегральной среднеквадратической ошибке некоторых непараметрических оценок плотности вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – Т. 19, № 1. – С. 131-139.
6. *Алексеев В.Г.* О непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных // Проблемы передачи информации. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 22-29.
7. *Singh R.S.* MISE of kernel estimates of a density and its derivatives // Statist. and Probab. Letters. – 1987. – Vol. 5, № 2. – P. 153-159.
8. *Hall P.*, *Marron J.S.* Choice of kernel order in density estimation // Ann. Statist. – 1988. – Vol. 16, № 1. – P. 161-173.
9. *Izenman A.J.* Recent developments in nonparametric density estimation // Journ. American Statist. Association. – 1991. – Vol. 86, № 413. – P. 205-224.
10. *Алексеев В.Г.* Непараметрическое оценивание плотности вероятности и ее производных. L_2-подход // Автометрия. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 39-47.
11. *Алексеев В.Г.* О допустимых непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных // Проблемы передачи информации. – 1994. – Т. 30, № 2. – С. 36-41.
12. *Алексеев В.Г.* О выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса // Проблемы передачи информации. – 1971. – Т. 7, № 4. – С. 45-54.
13. *Журбенко И.Г.*, *Кожевникова И.А.* О сравнительных характеристиках статистик спектральных плотностей стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 64-77.

14. *Cline D.B.H.* Admissible kernel estimators of a multivariate density // Ann. Statist. – 1988. – Vol. 16, № 4. – P. 1421-1427.
15. *Mirzachmedov M.A.*, *Chashimov Sh. A.* On some properties of estimators of a probability density // Kybernetika (Praha). – 1973. – Vol. 9, № 4. – P. 242-250.
16. *Davis K.B.* Mean integrated square error properties of density estimates // Ann. Statist. – 1977. – Vol. 5, № 3. – P. 530-535.
17. *Davis K.B.* Mean square error properties of density estimates // Ann. Statist. – 1975. – Vol. 3, № 4. – P. 1025-1030.
18. *Ушаков В.Г.*, *Ушаков Н.Г.* Об одной ядерной оценке плотности // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5, № 3. – С. 67-73.
19. *Ushakov N.G.* A note on superkernel density estimators // Mathematical Methods of Statistics. – 2012. – Vol. 21, № 1. – P. 61-68.
20. *Деврой Л.*, *Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности. L_1-подход. – М.: Мир, 1988.
21. *Надарая Э.А.* Об интегральной среднеквадратической ошибке некоторых непараметрических оценок плотности распределения // Сообщ. АН Грузинской ССР, 1972. – Т. 68, № 1. – С. 33-36.
22. *Cheng P.E.*, *Serfling R.J.* Asymptotic mean integrated squared errors of some nonparametric density estimators // IEEE Trans. Information Theory. –1981. – Vol. IT-27, № 2. – P. 239-242.
23. *Добровидов А.В.* Автоматические методы выделения полезных сигналов на фоне помех в условиях непараметрической неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 2. – С. 56-70.
24. *Marron J.S.* Automatic smoothing parameter selection: a survey // Empirical Economics. – 1988. – Vol. 13, № 3/4. – P. 187-208.
25. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. – 1962. – Vol. 33, № 3. – P. 1065-1076.
26. *Woodroofe M.* On the maximum deviation of the sample density // Ann. Math. Statist. – 1967. – Vol. 38, № 2. – P. 475-481.
27. *Wegman E.J.* Nonparametric probability density estimation: I. A summary of available methods // Technometrics. – 1972. – Vol. 14, № 3. – P. 533-546.
28. *Silverman B.W.* Weak and strong uniform consistency of the kernel estimate of a density and its derivatives // Ann. Statist. – 1978. – Vol. 6, № 1. – P. 177-184.
29. *Хасьминский Р.З.* О границе снизу рисков непараметрических оценок плотности вероятности в равномерной метрике // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – Т. 23, № 4. – С. 824-828.
30. *Хашимов Ш.А.*, *Убайдуллаев К.Х.* О сильной состоятельности сплайн-оценки плотности распределения // Узбекский матем. журнал. – 2000. – № 1. – С. 60-66.
31. *Алексеев В.Г.* Непараметрическое оценивание плотности вероятности и ее производных. *С*-подход // Автометрия. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 65-72.
32. *Алексеев В.Г.* Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 42-48.
33. *Алексеев В.Г.* О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. – 1980. – Т. 16, № 1. – С. 42-49.
34. *Müller H.-G.* Smooth optimum kernel estimators of densities, regression curves and modes // Ann. Statist. – 1984. – Vol. 12, № 2. – P. 766-774.
35. *Епанечников В.А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. 14, № 1. – С. 156-161.
36. *Дмитриев Ю.Г.*, *Тарасенко Ф.П.* Об одном классе непараметрических оценок нелинейных функционалов плотности // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – Т. 19, № 2. – С. 404-409.
37. *Алексеев В.Г.* О статистических оценках некоторых функционалов от плотности вероятно-

сти // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомств. научный сборник (Киев). – 1976. – Вып. 15. – С. 3-9.
38. *Aubuchon J.S. Hettmansperger T.P.* A note on the estimation of the integral of $f^2(x)$ // Journ. of Statistical Planning and Inference. – 1984. – Vol. 9, № 3. – P. 321-331.
39. *Jones M.C.*, *Sheather S.J.* Using non-stochastic terms to advantage in kernel-based estimation of integrated squared density derivatives // Statist. and Probab. Letters. – 1991. – Vol. 11, № 6. – P. 511-514.
40. *Prakasa Rao B.L.S.* Nonparametric functional estimation: an overview // Asymptotics, nonparametrics and time series: Statistics Textbooks and Monografs, № 158. – New York: Marcel Dekker, 1999. – P. 461-509.
41. *Rosenblatt M.* Global measures of deviation for kernel and nearest neighbor density estimates // Lecture Notes in Mathematics, № 757. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1979. – P. 181-190.
42. *Eggermont P.P.B.*, *LaRiccia V.N.* Optimal convergence rates for Good's nonparametric maximum likelihood density estimator // Ann. Statist. – 1999. – Vol. 27, № 5. – P. 1600-1615.
43. *Алексеев В.Г.* К задаче о выделении тренда стационарного случайного процесса // Литовский матем. сборник, 1981. – Т. 21, № 2. – С. 3-8.
44. *Алексеев В.Г.* О методах выделения тренда некоторых классов случайных процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомств. научный сборник (Киев), 1982. – Вып. 27. – С. 3-10.
45. *Alekseev V.G.* On the use of alternating kernels in nonparametric statistical estimation // Lecture Notes in Mathematics, № 1021. – Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer-Verlag, 1983. – P. 15-25.
46. *Алексеев В.Г.* О непараметрических оценках кривых и поверхностей регрессии // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 7. – С. 81-87.
47. *Алексеев В.Г.* К задаче выделения тренда однородного случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомств. научный сборник (Киев), 1988. – Вып. 38. – С. 3-9.
48. *Алексеев В.Г.* О непараметрических оценках интенсивности неоднородного процесса Пуассона // Узбекский матем. журнал. – 1999. – № 5. – С. 15-20.
49. *Алексеев В.Г.* О непараметрических методах прикладного биспектрального анализа // Автометрия. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 13-22.
50. *Алексеев В.Г.* Об оценке тренда и математического ожидания периодически коррелированных временных рядов // Метеорология и гидрология. – 2010. – № 11. – С. 36-43.
51. *Алексеев В.Г.*, *Суходоев В.А.* Непараметрический спектральный анализ стационарных случайных процессов с дискретным временем // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19, № 4. – С. 481-497.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Лапко.

E-mail:
Алексеев Виктор Георгиевич – aleks.v.g@mail.ru.