



Заключение

В работе доказан тезис о корректности алгоритма решения частной обратной задачи медицинской диагностики и доказана теорема об эквивалентности его оптимизированной (параллельной модифицированной) и исходной версий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клещев А.С., Москаленко Ф.М., Черняховская М.Ю. Модель онтологии предметной области «Медицинская диагностика». Часть 1. Неформальное описание и определение базовых терминов // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2005. – № 12. – С.1-7.
2. Клещев А.С., Москаленко Ф.М., Черняховская М.Ю. Модель онтологии предметной области «Медицинская диагностика». Часть 2. Формальное описание причинно-следственных связей, причин значений признаков и причин заболеваний // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2006. – № 2. – С.19-30.
3. Москаленко Ф.М. Задача медицинской диагностики, методы и алгоритм ее решения. / Препринт. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. [URL: http://iacp.dvo.ru/is/publications/Preprint2_Algorithm.pdf].

E-mail:

Клещев Александр Сергеевич – kleshev@iacp.dvo.ru;

Москаленко Филипп Михайлович – philipmm@iacp.dvo.ru.

УДК 621.372.542

© 2013 г. А.Г. Шоберг, канд. техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск)

СХЕМА КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА ОДНОМЕРНОГО СИГНАЛА НА БАЗИСЕ ХААРА, ИНВАРИАНТНАЯ К НАПРАВЛЕНИЮ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Предлагаются модифицированные схемы кратномасштабных анализа и реконструкции сигнала с разделением коэффициентов вейвлет-преобразования и без такого разделения. Предложенные модифицированные схемы инвариантны к направлению обработки. Проведено моделирование. Реконструкция сигналов имеет место во всех случаях при низком уровне ошибок восстановления.

Ключевые слова: вейвлеты, преобразования, кратномасштабный анализ, реконструкция, одномерный сигнал.

Введение

Выполнение вейвлет-преобразования требует достаточно больших вычислительных затрат. Исключение перекрытий вейвлетов при данной процедуре ведет к устранению избыточности в ходе преобразования. Такое преобразование имеет

характерную иерархическую структуру. При большом количестве уровней разложения значительная часть информации о сигнале содержится в детализирующих коэффициентах преобразования. Существует возможность точного восстановления сигнала при использовании дополнительной аппроксимации с помощью масштабирующей функции [1, 2].

Обработка сигнала осуществляется с помощью масштабирующей функции и вейвлет-функции, во многих случаях асимметричных. Поэтому изменение направления реконструкции сигнала может приводить к высоким значениям ошибок восстановления. Кроме того, увеличение уровня разложения должно приводить к росту ошибки реконструкции. Такая же тенденция будет наблюдаться для многомерных сигналов.

В публикациях по применению вейвлет-преобразования ограничиваются рассмотрением декомпозиции и реконструкции на основе традиционной схемы [3 – 5]. В то же время снижение количества операций при решении задач поиска, идентификации и др. может быть осуществлено при изменении направления обработки преобразованного сигнала. Задачей данной работы было формирование обратимого вейвлет-преобразования на основе базиса Хаара, инвариантного к направлению обработки.

Традиционная схема кратномасштабного анализа

В основе кратномасштабного анализа лежит разложение сигнала по ортогональному базису, образованному сдвигами и масштабированными копиями вейвлета [3, 5]. Свертка сигнала с вейвлетами позволяет выделить характерные особенности сигнала в области локализации этих вейвлетов, причем чем больший масштаб имеет вейвлет, тем более широкая область сигнала будет оказывать влияние на результат свертки [2]. Традиционная схема кратномасштабного разложения дискретных последовательностей по базису Хаара производится следующим образом [5, 6].

Обрабатывается вся дискретная последовательность $x[n]$. Для четных компонент получаемого преобразования используется функция:

$$\phi_{2k}[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } n = 2k, 2k + 1, \\ 0, & \text{остальные,} \end{cases} \quad (1)$$

а для нечетных компонент функция, указанная ниже:

$$\phi_{2k+1}[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } n = 2k, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{при } n = 2k + 1, \\ 0, & \text{остальные.} \end{cases} \quad (2)$$

Вектор X аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов преобразования рассчитывается на основе (3) и (4):

$$X[2k] = \langle \phi_{2k}, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x[2k] + x[2k + 1]), \quad (3)$$

$$X[2k + 1] = \langle \phi_{2k+1}, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x[2k] - x[2k + 1]). \quad (4)$$

Реконструкция дискретного сигнала осуществляется по формуле

$$x[n] = \sum_{k \in Z} X[k] \varphi_k[n]. \quad (5)$$

Такая схема приводит к формированию двухканального банка фильтров, содержащего фильтры анализа и синтеза, причем фильтр анализа делит спектр сигнала на низкочастотную L и высокочастотную H части (рис. 1). Рассчитанные коэффициенты будут чередоваться в результирующей последовательности.

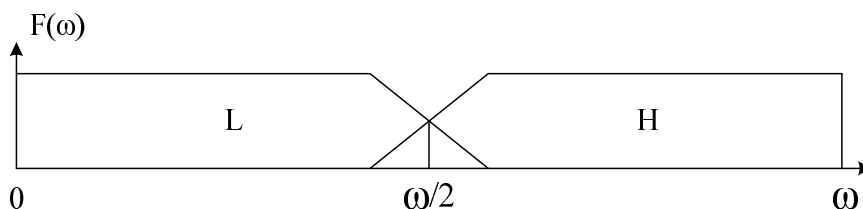


Рис. 1. Разделение спектра, производимое двухканальным банком фильтров.

Далее вейвлет-преобразование выполняется путем рекурсивного применения описанной схемы к низкочастотной части. Восстановление сигнала осуществляется на основе низкочастотных и высокочастотных частей по формуле (5).

Модифицированная схема кратномасштабного анализа

При четном количестве элементов дискретной последовательности изменение направления преобразования на основе вейвлета Хаара (от последнего элемента к первому) изменяет порядок расположения коэффициентов на обратный. Модули амплитуд результирующих коэффициентов не изменяются. Только у детализирующих коэффициентов изменяется знак на противоположный. Данные особенности используются в формировании следующей схемы.

Для дискретной последовательности x с четным количеством элементов длиной в $2l$ базисные функции ϕ'_{2k} и ϕ'_{2k+1} для четных и нечетных элементов будут содержать компоненты (6) и (7). Значения этих функций будут изменяться в зависимости от того, находится ли обрабатываемый элемент до середины последовательности или после.

$$\phi'_{2k}[n] = \begin{cases} -\phi_{2k+1}[n], & \text{при } n < l, \\ \phi_{2k}[n], & \text{при } n > l. \end{cases} \quad (6)$$

$$\phi'_{2k+1}[n] = \begin{cases} \phi_{2k}[n], & \text{при } n < l, \\ \phi_{2k+1}[n], & \text{при } n > l. \end{cases} \quad (7)$$

Коэффициенты преобразования X получаются на основе скалярных произведений $\langle \phi'_{2k}, x \rangle$ и $\langle \phi'_{2k+1}, x \rangle$. В результате такого модифицированного преобразования формируются четыре группы коэффициентов (рис. 2), соответствующих двум низкочастотным L1, L2 и двум высокочастотным диапазонам H1, H2.

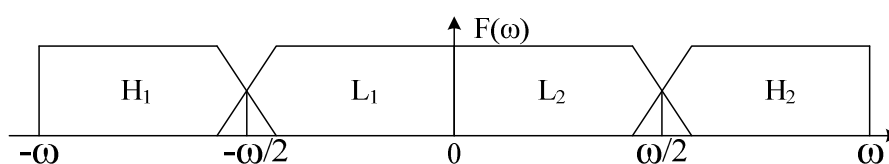


Рис. 2. Сформированные полосы частот с использованием модифицированной схемы.

При этом низкочастотные диапазоны непосредственно примыкают к друг другу и могут рассматриваться как один непрерывный низкочастотный от $-\omega/2$ до $\omega/2$, а высокочастотные находятся в противоположных концах спектра.

Восстановление осуществляется с помощью выражения (5), где базисные функции взяты из (6) и (7).

Разделение коэффициентов в модифицированной схеме

Для упрощения алгоритма выполнения многоуровневого вейвлет-преобразования необходимо отделять аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты друг от друга и сохранять их в различных частях результирующей последовательности.

Каждый уровень прямого вейвлет-преобразования будет рассчитываться по следующему выражению

$$X[n] = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \psi[k]x[n-k], & 1 \leq n \leq \frac{1}{2}l, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi[k]x[n-k], & \frac{1}{2}l+1 \leq n \leq \frac{3}{2}l, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \psi[k]x[n-k], & \frac{3}{2}l+1 \leq n \leq 2l, \end{cases} \quad (8)$$

где φ и ψ – коэффициенты аппроксимирующих и детализирующих фильтров; N – количество коэффициентов в фильтре.

Новый уровень разложения применяется к аппроксимирующим коэффициентам, количество которых в каждом случае должно быть четным числом.

Результаты моделирования

Моделирование на основе (8) осуществлялось по следующим выражениям.

При прямом вейвлет-преобразовании (9) формировались коэффициенты, принадлежащие четырем диапазонам.

Каждый новый уровень преобразования применялся к вдвое меньшему количеству коэффициентов.

$$\begin{aligned} X[n] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x[n] + x[n+1]), & \text{при } 1 \leq n \leq l, \\ X\left[n + \frac{1}{2}l\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x[n] + x[n+1]), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X[n+l] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x[n] + x[n+1]), & \text{при } l+1 \leq n \leq 2l. \\ X\left[n + \frac{3}{2}l\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x[n] - x[n+1]), \end{aligned}$$

Реконструкция сигнала на каждом уровне производилась в соответствии с (10):

$$\begin{aligned} x[2n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X \left[n + \frac{1}{2}l \right] - X[n] \right), \\ x[2n+1] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X \left[n + \frac{1}{2}l \right] + X[n] \right), \end{aligned} \quad \text{при } 1 \leq n \leq l, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x[2n] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X[n+l] + X \left[n + \frac{3}{2}l \right] \right), \\ x[2n+1] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(X[n+l] - X \left[n + \frac{3}{2}l \right] \right), \end{aligned} \quad \text{при } l+1 \leq n \leq 2l.$$

При этом реконструкция производилась как в прямом, так и обратном (реверсивном) порядке последовательности X .

В качестве модельных использовались как искусственные последовательности (линейные, гармонические), так и реальные сигналы. Производилось прямое вейвлет-преобразование от первого до четвертого уровней с последующей реконструкцией. На рис. 1. представлен образец реального сигнала и его вейвлет-преобразования по традиционной, со смещенной в центр низкочастотной составляющей, и модифицированной схемам.

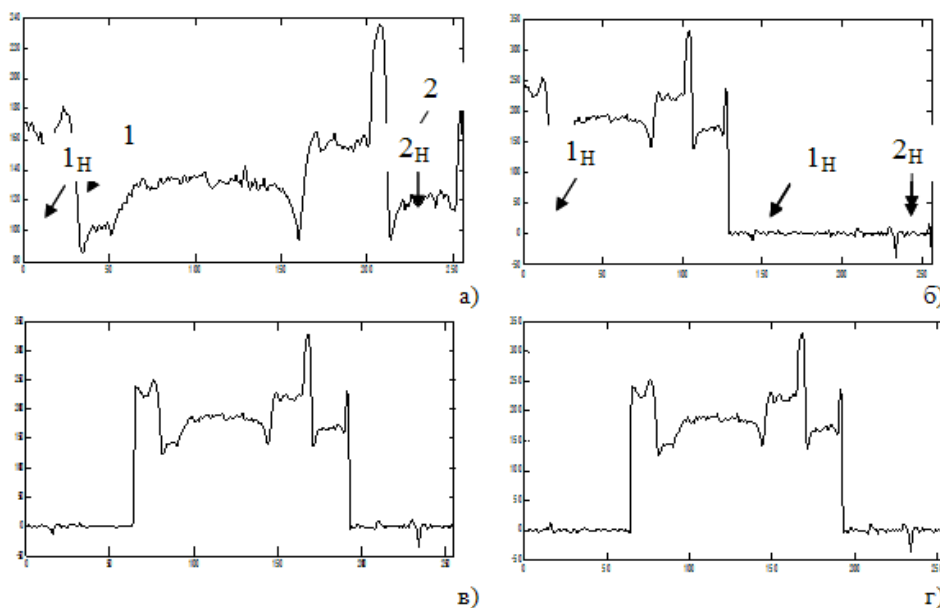


Рис. 1. Реальный сигнал (а) и его вейвлет-преобразования первого уровня (б – по традиционной, в – со смещенной в центр низкочастотной составляющей, г – модифицированной схеме).

На рис. 1а стрелками 1 и 2 указаны резкие спады величины сигнала, для высокочастотной составляющей имеющие наиболее характерный вид. Для схем преобразования (рис. 1б, 1в) соответствующие этим спадам, вейвлет-коэффициенты, отмеченные как 1_H и 2_H , имеют одинаковые значения и знаки. Для разработанной модифицированной схемы (рис. 1г) коэффициенты (1_H), находящиеся до середины сигнала, меняют знак по сравнению с предыдущими схемами, а после середины – не меняют (2_H). Низкочастотная составляющая во всех случаях не изменяется, так как для масштабирующая функция для базиса Хаара имеет четную симметрию относительно оси проведенной через ее середину.

Для традиционной схемы вейвлет-преобразования реконструкция сигнала осуществляется только при прямом порядке коэффициентов. При реверсивном представлении вейвлет-последовательности реконструкция уже на первом уровне имеет низкую точность. Похожий результат дает и схема со смещением в центр низкочастотной составляющей (рис. 1в).

Реконструкция сигнала в обратном направлении и ошибка реконструкции для первого уровня преобразования представлены на рис. 2. Для максимального спада сигнала, отмеченного стрелкой 2 на рис. 1а, имеет место и максимальное значение ошибки (около 50), что сравнимо с уровнем сигнала (рис. 2б). Для больших уровней декомпозиции/реконструкции ошибка увеличивается.

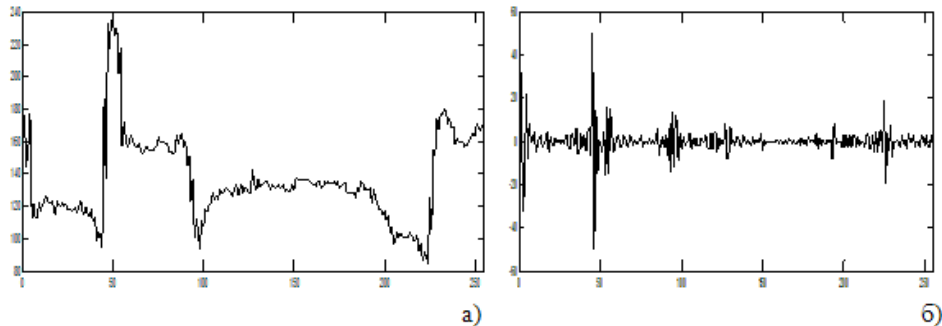


Рис. 2. Реконструкция сигнала в обратном направлении на основе его вейвлет-преобразования первого уровня по схеме со смещенной в центр низкочастотной составляющей (а – реконструированный сигнал, б – ошибка восстановления).

Во всех случаях при применении модифицированной схемы наблюдалось полное восстановление сигнала при использовании вейвлет-представления сигнала – как в прямом, так и реверсивном порядке (рис. 3) при всех промоделированных уровнях преобразования (до 4).

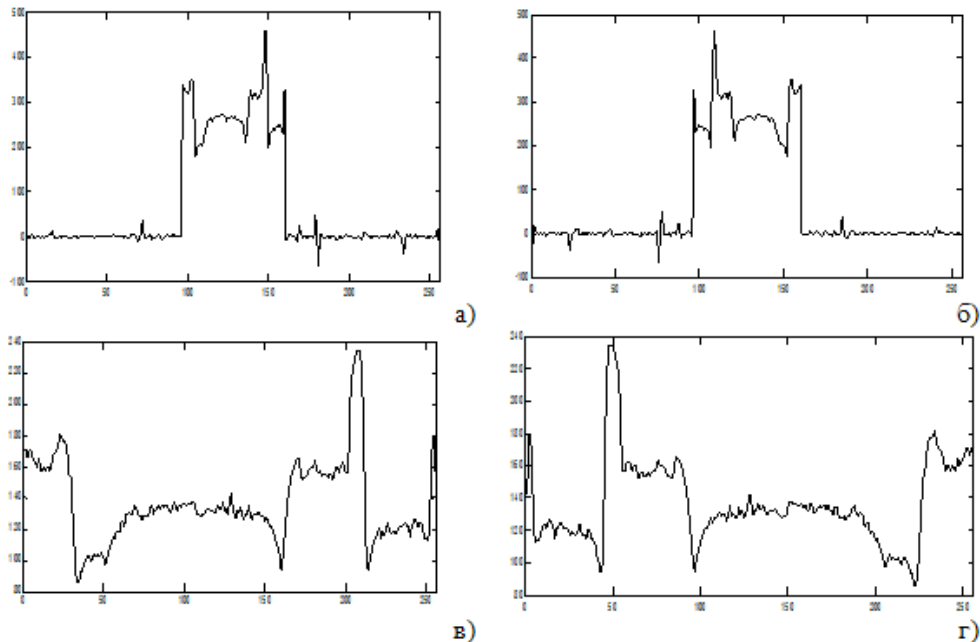


Рис. 3. Вейвлет-преобразование сигнала второго уровня на основе модифицированной схемы и его реконструкции (а, б – прямое и реверсивное представления; в, г – реконструкции сигнала по прямому и реверсивному представлениям).

При этом если при реконструкции используется обратный порядок коэффи-

циентов вейвлет-преобразования, то и реконструированная копия сигнала имеет обратный порядок (рис. 3г).

Ошибки реконструкции при моделировании имели порядок от 10^{-14} при использовании только первого уровня прямого вейвлет-преобразования, до 10^{-12} – при четвертом уровне (рис. 4).

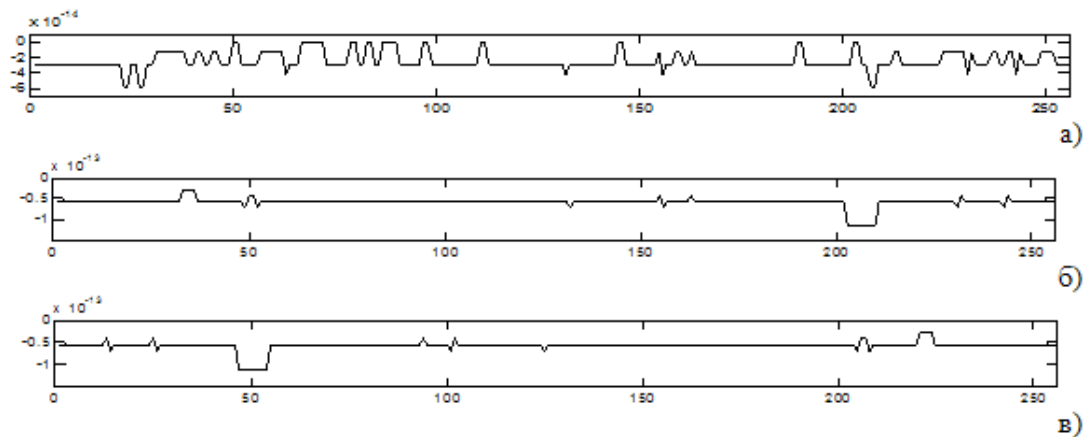


Рис. 4. Ошибки реконструкции (а – реконструкция по первому уровню; б, в – по второму уровню для прямого и реверсивного представления).

Ошибки реконструкции с использованием прямого (рис. 4б) и реверсивного (рис. 4в) порядка коэффициентов вейвлет-преобразования также имеют обратный порядок относительно друг друга.

Заключение

В данной статье рассмотрена традиционная схема кратномасштабной декомпозиции сигнала на основе вейвлет-преобразования. Предлагаются модифицированные схемы кратномасштабных анализа и реконструкции сигнала с разделением коэффициентов вейвлет-преобразования и без такого разделения. Важным отличием от традиционной схемы является то, что предложенные модифицированные схемы позволяют реконструировать сигнал в прямом и обратном направлении. В результате моделирования реконструкции сигналов получались во всех случаях с низким уровнем ошибок восстановления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005.
2. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: ВУС, 1999.
3. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005.
4. Столниц Э., Де Роуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
5. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003.
6. Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation" // IEEE Trans. on PAMI. – 1989. – Vol. 11, № 7. – P.674-693.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Чье Ен Уном.

E-mail:

Шоберг Анатолий Германович – shoberg @rambler.ru.