УДК 519.651

© 2013 г. **С.Н. Чуканов,** д-р техн. наук
(Омский филиал Института математики СО РАН имени С.Л. Соболева),
И.А. Полонский
(Сибирская автомобильно-дорожная академия, Омск)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ

В работе предложен метод формирования интерполяционных сплайнов для точек многообразий, являющихся элементами однопараметрических групп Ли $SO(3)$ и $SE(3)$, основанный на применении алгоритма регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: интерполяция, метод регуляризации Тихонова, группа Ли, винтовое движение твердого тела.

Введение

Задачи интерполяции [1], имеющие применения в робототехнике, механике движения твердого тела, компьютерной графике и САПР, традиционно решаются на основе алгоритма de Casteljau, используемого для интерполяции полиномиальными сплайнами точек евклидового пространства. В работе [2] алгоритма de Casteljau использован для решения задач интерполяции на многообразиях, представляемых однопараметрическими группами Ли, – например группами $SO(3)$, $SE(3)$. Следует отметить, что можно построить не один сплайн, проходящий через заданные точки евклидового пространства. В настоящей работе рассмотрено применение метода регуляризации академика А.Н. Тихонова, используемого для интерполяции и аппроксимации точек евклидового пространства $\mathbf{R}^3$ радиальными базисными функциями (radial basis functions – RBF) функциями [3, 4] . Метод регуляризации А.Н.Тихонова распространен на алгоритмы формировании интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемым лиевыми группами $SO(3)$ и $SE(3)$. Метод регуляризации позволяет построить интерполяционные сплайны, к которым предъявляется не только требование прохождения через заданные точки, но и требование к форме сплайна.

Метод регуляризации А.Н. Тихонова

При интерполяции функций полиномиальными и дробно-линейными сплайнами [1] не выполняется свойство универсальности аппроксимации (универсальные аппроксиматоры – функциональные зависимости, обеспечивающие аппроксимацию с любой степенью точности). В настоящей работе выбраны радиальные базисные функции (radial basis function – RBF [3, 4]) для целей интерполяции/аппроксимации, которые являются универсальными аппроксиматорами [5].

Рассмотрим метод регуляризации А.Н.Тихонова [6 – 8] с использованием RBF функций. Пусть: X – множество элементов $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N); \mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^D; i = 1, \ldots, N$; пространство V – множество функций $v(\mathbf{x}): \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}^D; \|v\|_V < \infty$; существуют ограничения на значения функций $v(\mathbf{x})$: $\boldsymbol{\lambda}_i = v(\mathbf{x}_i); (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_N); \boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbf{R}^D; i = 1, \ldots, N$. При введении скалярного произведения: $\langle u, v \rangle_V = \int\limits_{\Omega} \langle Lu(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{x}$ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^D$ и нормы: $\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle_V}$; пространство V будет предгильбертовым. Для $v \in V; \mathbf{x} \in X$ определим функционал регуляризации А.Н.Тихонова

$$I(v, \mathbf{x}) = \left(\int\limits_{\Omega} \langle Lv(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{R}^D} d\mathbf{x} \right) + C \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{\lambda}_i - v(\mathbf{x}_i)\|^2_{\mathbf{R}^D} \tag{1}$$

и найдем $v \in V$, минимизирующий функционал $I(v, \mathbf{x})$. Оператор L определяет «энергию» первого слагаемого функционала; например, если $v(\mathbf{x})$ – скорость тела, то $2L$ – масса этого тела. Значение коэффициента $C \in \mathbf{R}$ изменяется от $C = 0$ (при этом задача сводится к минимизации первого слагаемого в (1) без учета ограничений) до $C \to \infty$ (при этом задача сводится к интерполяции функции на значениях ограничений $(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_N)$). Определим первую вариацию функционала $I(v, \mathbf{x})$:

$$\delta I = \left. \partial \big/ \partial \varepsilon \, I(v + \varepsilon w, \mathbf{x}) \right|_{\varepsilon = 0} = 2 \langle v, w \rangle_V - 2C \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{\lambda}_i - v(\mathbf{x}_i), w(\mathbf{x}_i) \rangle_{\mathbf{R}^D};$$

и потребуем выполнения условия: $\delta I = 0$.

Введем обозначения: $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{Id}_{(4 \times 4)}$ – матричная функция, где $G: \mathbf{R}^D \times \mathbf{R}^D \to \mathbf{R}$ – функция Грина оператора L; коэффициенты:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = C(\boldsymbol{\lambda}_i - v(\mathbf{x}_i)) \in \mathbf{R}^D. \tag{2}$$

Тогда: $\langle \boldsymbol{\lambda}_i - v(\mathbf{x}_i), w(\mathbf{x}_i) \rangle_{\mathbf{R}^D} = \langle G(\cdot, \mathbf{x}_i)(\boldsymbol{\lambda}_i - v(\mathbf{x}_i)), w(\mathbf{x}_i) \rangle_V$; $i = 1, \ldots, N$. Так как $\langle \boldsymbol{\alpha}, w \rangle_{\mathbf{R}^D} = \langle L \cdot L^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha}, w \rangle_{\mathbf{R}^D} = \langle \mathbf{K}(\cdot, \mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}, w \rangle_V = \langle G(\cdot, \mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}, w \rangle_V$, то $\delta I = 2 \left\langle v - C \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_i G(\cdot, \mathbf{x}_i), w \right\rangle_V = 0$ и $v \in V$, минимизирующий функционал $I(v, \mathbf{x})$ определяется из выражения [9]:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\alpha}_i G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i). \tag{3}$$

Коэффициенты $\boldsymbol{\alpha}_i; i = 1, \ldots, N$ можно определить из соотношения:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N)^T = \left(\mathbf{S} + C^{-1} \mathbf{Id}_{(N \times N)}\right)^{-1} (\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_N)^T, \tag{4}$$

где матрица $\mathbf{S}$: $\mathbf{S} = (S_{ij}) = (G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) \in \mathbf{R}^{N \times N}; i, j = 1, \ldots, N$. Выберем функции Грина в матрице $\mathbf{S}$ в форме RBF функций Гаусса:

$$\mathbf{S} = (S_{ij}) = \left(\exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2} \right) \right). \tag{5}$$

В качестве примера рассмотрим интерполяцию четырех векторов $\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix}0{,}707 & 0{,}707 & 0\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{pmatrix}0{,}707 & 0 & 0{,}707\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ в точках $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ соответственно.

Пример 1.

Пусть: $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ 0{,}707 & 0 & 0{,}707 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$. При $\sigma = 1$ и $C = 0{,}5$ получим:

$$\left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & -0{,}366 & -0{,}376 & 0{,}024 \\ -0{,}366 & 0{,}93 & -0{,}166 & -0{,}056 \\ -0{,}376 & -0{,}166 & 1{,}136 & -0{,}432 \\ 0{,}024 & -0{,}056 & -0{,}432 & 0{,}889 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (4) имеем:

$\boldsymbol{\alpha}_0 = \begin{pmatrix}0{,}604 & -0{,}25 & 0{,}048\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}0{,}052 & 0{,}678 & -0{,}2\end{pmatrix}$;

$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}0{,}478 & -0{,}272 & 0{,}324\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}-0{,}202 & 0{,}051 & 0{,}553\end{pmatrix}$.

Результат интерполяции: $\boldsymbol{\lambda}(x) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i G(x, x_i)$;

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = \begin{pmatrix}0{,}604 & -0{,}25 & 0{,}048\end{pmatrix} \cdot \exp\left(-0{,}5(x-0)^2\right) + \begin{pmatrix}0{,}052 & 0{,}678 & -0{,}2\end{pmatrix} \cdot \exp\left(-0{,}5(x-1)^2\right) +$$
$$+ \begin{pmatrix}0{,}478 & -0{,}272 & 0{,}324\end{pmatrix} \cdot \exp\left(-0{,}5(x-2)^2\right) + \begin{pmatrix}-0{,}202 & 0{,}051 & 0{,}553\end{pmatrix} \cdot \left(-0{,}5(x-3)^2\right).$$

Формирование интерполяционных сплайнов для многообразий

В случае $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N); x_i \in \mathbf{R}; i = 1, \ldots, N$ и $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_N\}; \boldsymbol{\lambda}_i \in GL(d, \mathbf{R}); i = 1, \ldots, N$, где $GL(d, \mathbf{R})$ – группа обратимых вещественных $(d \times d)$ матриц [10], векторные коэффициенты $\boldsymbol{\alpha}_i \in GL(d, \mathbf{R}); i = 1, \ldots, N$ определяются из соотношения (4):

$$\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N\right)^T = \left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(N\times N)}\right)^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_N\right)^T,$$

где $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_N\right\}; \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i \in \mathbf{R}^D; D = d \times d; i = 1, \ldots, N$; а компоненты вектора $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i; i = 1, \ldots, N$ соответствуют компонентам матрицы $\boldsymbol{\lambda}_i$: $\lambda_i^{(k,l)} = \hat{\lambda}_i^{(kd+l)}$; $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_N\}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \in \mathbf{R}^D$; $D = d \times d; i = 1, \ldots, N$, а компоненты вектора $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_i; i = 1, \ldots, N$ соответствуют компонентам матрицы $\boldsymbol{\alpha}_i$: $\alpha_i^{(k,l)} = \hat{\alpha}_i^{(kd+l)}$.

Если элементы множества $\boldsymbol{\lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_N\}$ являются элементами другой матричной группы Ли (например, $SO(n, \mathbf{R})$ или $SE(n, \mathbf{R})$ [10]), то можно сформировать соответствие компонент вектора $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$ и матрицы $\boldsymbol{\lambda}_i$, отличное от соответствия для группы $GL(d, \mathbf{R})$. Например, для 9 компонент матрицы специальной ортогональной группы $\boldsymbol{\lambda}_i \in SO(3, \mathbf{R})$ можно сформировать соответствие в форме трех компонент вектора конечного поворота $\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{pmatrix}\Phi_i^{(1)} & \Phi_i^{(2)} & \Phi_i^{3}\end{pmatrix}$ (так, из 9 компонент матрицы $\boldsymbol{\lambda}_i$ только 3 являются независимыми):

$$\Phi_i^{(1)} = 2\hat{\lambda}_i^{(1)} \Big/ \hat{\lambda}_i^{(0)}; \Phi_i^{(2)} = 2\hat{\lambda}_i^{(2)} \Big/ \hat{\lambda}_i^{(0)}; \Phi_i^{(3)} = 2\hat{\lambda}_i^{(3)} \Big/ \hat{\lambda}_i^{(0)}, \qquad (6)$$

где компоненты кватерниона $\hat{\lambda}_i^{(0)}, \hat{\lambda}_i^{(1)}, \hat{\lambda}_i^{(2)}, \hat{\lambda}_i^{(3)}$ определяются из выражений [11]:

$$\hat{\lambda}_i^{(1)} = \frac{\lambda_i^{(2.3)} - \lambda_i^{(3.2)}}{4\hat{\lambda}_i^{(0)}}; \hat{\lambda}_i^{(2)} = \frac{\lambda_i^{(3.1)} - \lambda_i^{(1.3)}}{4\hat{\lambda}_i^{(0)}}; \hat{\lambda}_i^{(3)} = \frac{\lambda_i^{(1.2)} - \lambda_i^{(2.1)}}{4\hat{\lambda}_i^{(0)}}; \qquad (7)$$

$$\hat{\lambda}_i^{(0)} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \lambda_i^{(1,1)} + \lambda_i^{(2,2)} + \lambda_i^{(3,3)}}.$$

В качестве примера рассмотрим метод регуляризации А.Н. Тихонова для интерполяция параметров группы $SO(3)$.

Пример 2.

Пусть заданы элементы группы $SO(3)$:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3); x_0 = 0; \mathbf{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ -0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3); x_0 = 1; \mathbf{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}828 \end{pmatrix};$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0{,}707 & 0 & 0{,}707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}707 & 0 & 0{,}707 \end{pmatrix} \in SO(3); x_0 = 2; \mathbf{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}828 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3); x_3 = 0; \mathbf{\Phi}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\sigma = 1$ и $C = 0{,}5$ получим:

$$\left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & -0{,}366 & -0{,}376 & 0{,}024 \\ -0{,}366 & 0{,}93 & -0{,}166 & -0{,}056 \\ -0{,}376 & -0{,}166 & 1{,}136 & -0{,}432 \\ 0{,}024 & -0{,}056 & -0{,}432 & 0{,}889 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 & \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 \end{pmatrix}^T = \left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_0 & \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{\Phi}_2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}828 \\ 0 & -0{,}828 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

откуда: $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 & \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}059 & -0{,}293 \\ 0 & 0{,}319 & 0{,}794 \\ 0 & -0{,}794 & -0{,}319 \\ 0 & 0{,}293 & 0{,}059 \end{pmatrix}.$

Результат интерполяции: $\mathbf{\Phi}(x)=\sum_{i=0}^{3}\boldsymbol{\alpha}_i G(x,x_i)$;

$$\mathbf{\Phi}(x)=\begin{pmatrix}0 & -0{,}059 & -0{,}293\end{pmatrix}\cdot\exp\left(-0{,}5(x-0)^2\right)+\begin{pmatrix}0 & 0{,}319 & 0{,}794\end{pmatrix}\cdot\exp\left(-0{,}5(x-1)^2\right)+$$
$$+\begin{pmatrix}0 & -0{,}794 & -0{,}319\end{pmatrix}\cdot\exp\left(-0{,}5(x-2)^2\right)+\begin{pmatrix}0 & 0{,}293 & 0{,}059\end{pmatrix}\cdot\left(-0{,}5(x-3)^2\right).$$

Для 16 компонент матрицы специальной группы Евклида $\boldsymbol{\lambda}_i\in SE(3,\mathbf{R})$ можно сформировать соответствие в форме 6 компонент: трех компонент вектора конечного поворота $\mathbf{\Phi}_i=\begin{pmatrix}\Phi_i^{(1)} & \Phi_i^{(2)} & \Phi_i^{3}\end{pmatrix}$ (аналогично тому, как они формировались для компонент группы $SO(3,\mathbf{R})$) и трех компонент вектора переноса:

$$p_i^{(1)}=\lambda_i^{(1,4)};\ p_i^{(2)}=\lambda_i^{(2,4)};\ p_i^{(3)}=\lambda_i^{(3,4)}; \tag{8}$$

4 компоненты матрицы – элемента группы $SE(3,\mathbf{R})$ являются константами:

$$\lambda_i^{(4,1)}=\lambda_i^{(4,2)}=\lambda_i^{(4,3)}=0;\lambda_i^{(4,4)}=1;i=1,\ldots,N\,. \tag{9}$$

Рассмотрим пример применения метода регуляризации А.Н. Тихонова для интерполяция параметров группы $SE(3)$.

Пример 3.

Пусть заданы элементы группы $SE(3)$:

$$g_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in SE(3);\mathbf{p}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\mathbf{\Phi}_0=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix};$$

$$g_1=\begin{pmatrix}0{,}707&0{,}707&0&0\\-0{,}707&0{,}707&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in SE(3);\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\mathbf{\Phi}_1=\begin{pmatrix}0&0&0{,}828\end{pmatrix};$$

$$g_2=\begin{pmatrix}0{,}707&0&0{,}707&0\\0&1&0&1\\-0{,}707&0&0{,}707&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in SE(3);\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\mathbf{\Phi}_2=\begin{pmatrix}0&-0{,}828&0\end{pmatrix};$$

$$g_3=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\in SE(3);\mathbf{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\mathbf{\Phi}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получим матрицу $\mathbf{S}=\left(S_{ij}\right)=\left(\exp\left(-\dfrac{\left\|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j\right\|^2}{2\sigma^2}\right)\right)$; $i,j=0,\ldots,3$. При $\sigma=1$ и $C=0{,}5$ получим:

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}1&0{,}607&0{,}607&0{,}607\\0{,}607&1&0{,}368&0{,}368\\0{,}607&0{,}368&1&0{,}368\\0{,}607&0{,}368&0{,}368&1\end{pmatrix};\left(\mathbf{S}+C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}994&-0{,}27&-0{,}27&-0{,}27\\-0{,}27&0{,}811&-0{,}072&-0{,}072\\-0{,}27&-0{,}072&0{,}811&-0{,}432\\-0{,}27&-0{,}072&-0{,}072&0{,}811\end{pmatrix};$$

откуда:

$$(\boldsymbol{\alpha}_0 \quad \boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_2)^T = \left(\mathbf{S} + C^{-1}\mathbf{Id}_{(4\times4)}\right)^{-1}(\boldsymbol{\Phi}_0 \quad \boldsymbol{\Phi}_1 \quad \boldsymbol{\Phi}_2 \quad \boldsymbol{\Phi}_2)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}223 & -0{,}223 \\ 0 & 0{,}06 & 0{,}672 \\ 0 & -0{,}672 & -0{,}06 \\ 0 & 0{,}06 & -0{,}06 \end{pmatrix}.$$

Результат интерполяции: $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{3} \boldsymbol{\alpha}_i G(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)$;

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}) = (0 \quad 0{,}223 \quad -0{,}223)\cdot \exp\left(-0{,}5|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|\right)^2 + (0 \quad 0{,}06 \quad 0{,}672)\cdot \exp\left(-0{,}5|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|\right)^2 +$$
$$+ (0 \quad -0{,}672 \quad -0{,}06)\cdot \exp\left(-0{,}5|\mathbf{p} - \mathbf{p}_2|\right)^2 + (0 \quad 0{,}06 \quad -0{,}06)\cdot \exp\left(-0{,}5|\mathbf{p} - \mathbf{p}_3|\right)^2 .$$

Заключение

В работе рассмотрено применение метода регуляризации А.Н.Тихонова для использования в алгоритмах формирования интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемым лиевыми группами $SO(3)$ и $SE(3)$. Применение метода регуляризации А.Н. Тихонова позволяет сформировать интерполяционные сплайны, к которым предъявляются не только требование прохождения через заданные точки, но и требование к форме сплайна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Farin G.* Curves and surfaces for CAGD. – Academic Press Inc., 2002.
2. *Коблик А.А., Чуканов С.Н.* Формирование интерполяционных сплайнов для многообразий, представляемых однопараметрическими группами Ли // Информатика и системы управления. – 2012. – № 2(32). – С.74-81.
3. *Хайкин С.* Нейронные сети: Полный курс. – М.:ООО "И.Д. Вильямс", 2006.
4. *Buhmann M.D.* Radial Basis Functions: Theory and Implementations. – Cambridge University Press, 2004.
5. *Park J., Sandberg I.W.* Universal approximation using radial-basis-function networks // Neural Computation. – 1991. – Vol. 3. – P.246-257.
6. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач // ДАН СССР. – 1963. 151, № 3.
7. *Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач. – ДАН СССР. – 1963, 153, № 1.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
9. *Micheli M.* The Differential Geometry of Landmark Shape Manifolds: Metrics, Geodesics, and Curvature. – Ph.D. thesis, Brown University, Providence, Rhode Island, 2008.
10. *Baker A.* Matrix groups. – Springer-Verlag, 2002.
11. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. – М.: Физматлит, 2006.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Л. Ереминым.

E-mail:
Чуканов Сергей Николаевич – ch_sn@mail.ru;
Полонский Иван Александрович – ivanft@mail.ru.