



УДК: 517.938; 530.182

© 2013 г. **К.В. Шлюфман,**
Б.Е. Фишман, д-р пед. наук,
Е.Я. Фрисман, чл.-корр. РАН

(Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан)

ИНТЕРВАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Дано формальное определение интервально-периодического решения. Для качественного анализа решений одномерных рекуррентных уравнений предложено использовать портреты в псевдофазовом пространстве с большим лагом. Разработан эффективный алгоритм обнаружения интервально-периодических решений, реализующий процедуры кластерного анализа. Построены карты интервально-периодических решений логистического уравнения. Показано, что после каждой серии бифуркации следует серия интервально-периодических решений, завершающаяся чисто хаотической динамикой.

Ключевые слова: рекуррентное уравнение, интервально-периодическое решение, псевдофазовое пространство.

Введение

Существенную нерегулярность и зависимость решения детерминированных динамических систем от начальных условий принято называть хаосом, хотя универсального определения математического хаоса не существует [1 – 4]. Для идентификации динамического хаоса используются такие критерии как показатель Ляпунова и энтропия Колмогорова-Синая. Если решение системы характеризуется положительными показателями Ляпунова и имеет положительную конечную энтропию, то это решение классифицируется как хаотическая динамика [1, 5, 6].

Существенную зависимость от начальных условий на практике ассоциируют со свойством непредсказуемости [1, 2, 5]. Любые, даже малые погрешности в начальных условиях за сравнительно небольшой по продолжительности период времени могут приводить к отличающимся друг от друга решениям системы. Однако существуют такие неустойчивые по Ляпунову динамические режимы, для которых малые погрешности в начальных условиях в дальнейшем не влекут полную непредсказуемость. В качестве примера такого режима можно привести шумящий цикл [2, 7, 8].

* Исследования проведены при частичной финансовой поддержке РФФИ № 11-01-98512-р_восток_a.

Для одномерных рекуррентных моделей, как известно (например, [7]), шумящие циклы $\{x_n\}$ состоят из значений x_n , которые принадлежат конечному числу взаимно непересекающихся интервалов фазового пространства. К тому же имеет место циклическая регулярность обхода этих интервалов. Следовательно, о шумящем цикле можно говорить как об особом решении, называемом в дальнейшем интервально-периодическим, определив его формально следующим образом.

Упорядоченное множество $\{x_n\}$ будем называть интервально-периодической последовательностью, если:

1) можно указать не менее двух взаимно непересекающихся интервалов X_k , $k = \overline{1, l}$, $l \geq 2$, ($X_k \cap X_s = \emptyset$, $k \neq s$), содержащих все значения последовательности $\{x_n\}$;

2) можно пронумеровать интервалы X_k , $k = \overline{1, l}$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_l \in X_l, x_{l+1} \in X_1, x_{l+2} \in X_2, \dots, x_{m-l+k} \in X_k, \dots$$

Заметим, что если у одномерной рекуррентной модели существует интервально-периодическое решение $\{x_n\}$, то объединение $\bigcup_k X_k$ всех l его интервалов

X_k не покрывает полностью фазовое пространство этой модели. При этом если существует такое подмножество X фазового пространства, что: $\bigcup_k X_k \subset X$, для

любого начального условия $x_0 \in X \setminus \bigcup_k X_k$ через некоторое конечное количество

итераций n все последующие значения x_m ($m > n$) этой последовательности будут принадлежать $\bigcup_k X_k$; если в этой последовательности установится порядок обхода

интервалов X_k , $k = \overline{1, l}$, то интервально-периодическое решение одномерной рекуррентной модели может пониматься как устойчивое.

Исследование интервально-периодических решений в одномерных рекуррентных моделях представляет несомненный интерес. Во-первых, необходимо определить расположение таких решений в пространстве параметров модели. Во-вторых, перспективно использование на практике моделей, имеющих интервально-периодические решения. Это связано с тем, что интервально-периодические решения, будучи по характеру флуктуаций близкими к наблюдаемым качественно циклическим динамикам, не требуют включения в модель дополнительной случайной составляющей. Иными словами, нерегулярная динамика значений, принадлежащих каждому интервалу X_k , $k = \overline{1, l}$, представляет влияние неучтенных моделью дополнительных случайных факторов.

Методы исследования интервально-периодического решения

В настоящей работе предложены следующие два метода анализа характера хаотического решения одномерного рекуррентного уравнения:

метод качественного исследования решения с помощью портретов в псев-

дофазовом пространстве (x_n, x_{n+m}) с переменным лагом m ;

метод обнаружения интервально-периодических решений, реализующий процедуры кластерного анализа.

Метод качественного исследования решения с помощью портретов использует картину расположения точек (x_n, x_{n+m}) на портретах в псевдофазовых пространствах. Такой портрет строится парами значений последовательности решения $\{x_n\}$ рекуррентного уравнения, отстоящих друг от друга на m итераций (лаг).

Когда лаг $m=1$, тогда пары значений (x_n, x_{n+m}) располагаются на графике правой части $F(x)$ рекуррентного уравнения. При этом в случае периодического решения $\{x_n\}$ на портрете видно количество точек, равное периоду решения. В случае интервально-периодического решения на портрете видны фрагменты графика правой части уравнения, причем количество этих фрагментов равно количеству интервалов l интервально-периодического решения. В случае хаотического решения пары значений (x_n, x_{n+m}) выделяют один-единственный фрагмент графика.

Увеличение лага m псевдофазового пространства изменяет на портрете вид выделяемых парами (x_n, x_{n+m}) фрагментов отображения $\underbrace{F \dots F}_m(x) = F^{(m)}(x)$. Для системы, имеющей интервально-периодическое решение, при больших значениях лага ($m > 50$) выделенные l фрагментов отображения $F^{(m)}(x)$ преобразуются в l прямоугольных областей. Полученные области позволяют определять порядок обхода интервалов X_s , $s = \overline{1, l}$ интервально-периодическим решением. А для системы, имеющей хаотическое решение, единственный фрагмент отображения $F^{(m)}(x)$ преобразуется в один прямоугольник.

Прямоугольная форма областей отображает хаотическое поведение значений последовательности решений внутри интервалов X_s , $s = \overline{1, l}$.

Расположение областей в псевдофазовом пространстве зависит от соотношения значений m и l . В случае $m = l \cdot k + 1$, где k – натуральное число, на портрете области пар значений располагаются вдоль графика правой части $F(x)$. Во всех остальных случаях области не располагаются вдоль графика $F(x)$. Если $m = l \cdot k$, где k – натуральное число, то области выстраиваются на биссектрисе первого квадранта псевдофазового пространства. Это означает, что через m итераций значение x_{n+m} последовательности $\{x_n\}$ возвращается в тот же интервал X_k , которому принадлежало x_n .

Пусть $\text{НОД}(m, l) = d$. Тогда последовательность обхода интервалов X_s , $s = \overline{1, l}$, содержит d несвязанных подпоследовательностей. В частности, при $d = 1$ имеется одна последовательность обхода.

Для исследования распределения интервально-периодических решений в пространстве параметров рекуррентного уравнения разработан метод проверки интервально-периодического характера решения рекуррентного уравнения. Метод объединяет решение двух задач: 1) определение количества интервалов l и оценка

их границ; 2) проверка периодичности обхода интервалов решением уравнения.

Решение первой задачи опирается на метод кластерного анализа, позволяющий автоматически так распределить элементы множества на подмножества, чтобы выполнялось условие близости элементов в каждом подмножестве. При этом элементы из разных подмножеств не удовлетворяют используемому условию близости. Формально условие близости задается конкретной метрикой, определенной на распределяемом множестве.

Если разделение на кластеры приводит к тому, что в один и тот же кластер входят только те значения последовательности $\{x_n\}$, которые принадлежат одному интервалу X_s , то полученные кластеры характеризуют интервалы X_s , $s = \overline{1, l}$. При этом количество кластеров соответствует количеству интервалов l . Минимальные и максимальные элементы каждого кластера служат оценками границ соответствующих интервалов X_s , $s = \overline{1, l}$.

Выделенные кластеры состояний позволяют исследовать характер решения $\{x_n\}$. Нумеруются кластеры состояний. Затем номера r кластеров присваиваются значениям, образовавшим кластер: $x_{n,r}$. Таким образом, получается последовательность с двойной индексацией: $\{x_{n,r}\}$. Первый индекс n соответствует номеру итерации рекуррентного уравнения, а второй r – номеру кластера, к которому отнесено значение.

Благодаря такой двойной индексации появляется возможность исследовать порядок обхода последовательностью $\{x_{n,r}\}$ кластеров значений. Если в последовательности состояний в порядке изменения номера итерации n наблюдается периодичность в индексации по кластерам, то можно говорить о интервально-периодическом характере решения рекуррентного уравнения.

Для множества значений решения $\{x_n\}$ рекуррентного уравнения в качестве меры близости значений x_i и x_j использована естественная мера $\rho(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$.

Основным параметром процедуры построения кластеров является пороговая величина, в сравнении с которой принимается решение о включении двух элементов в один кластер. Так, для построения кластеров значений x_n задается пороговая величина ρ_{\max} , с которой сравнивается расстояние $\rho(x_i, x_j)$ между двумя значениями x_i и x_j . В случае, если расстояние $\rho(x_i, x_j) < \rho_{\max}$, то значения x_i и x_j считаются принадлежащими одному кластеру. Вместе с тем корректное выделение кластеров означает, что пороговое значение ρ_{\max} выбрано меньшим, чем минимальное расстояние между интервалами X_s , $s = \overline{1, l}$. Если такое условие не выполняется, то происходит объединение нескольких интервалов X_s в один кластер.

Выбор порогового значения ρ_{\max} влияет на необходимую величину N – длину последовательности значений $\{x_n\}$. При достаточности имеющейся статистики (соответствия величин ρ_{\max} и N) для каждого значения x_n интервала X_s

последовательности $\{x_n\}$ найдется хотя бы одно значение x_k в последовательности $\{x_n\}$, принадлежащее тому же интервалу X_s и отдаленное от x_n не более чем на ρ_{\max} : $\rho(x_n, x_k) < \rho_{\max}$. В противном случае образуется несколько кластеров, состоящих из значений x_n , принадлежащих одному интервалу X_s .

Примеры

В качестве иллюстрации рассмотрим интервально-периодические решения хорошо изученного однопараметрического логистического уравнения [10, 11]:

$$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n). \quad (1)$$

Логистическое уравнение часто используется в нелинейной динамике [11 – 13] и имеет большое прикладное значение в популяционной биологии [9].

На рис. 1 представлено влияние лага m на портреты в псевдофазовом пространстве логистического отображения (1) при $a = 3.580$ (при этом исключалось влияние начального значения x_0 путем отбрасывания первых 200 значений). Из рис. 1 видно, что при $m = 1$ портрет содержит четыре фрагмента графика функции $F(x) = a \cdot x \cdot (1 - x)$ правой части уравнения (1). Увеличение лага m приводит к тому, что пары значений (x_n, x_{n+m}) заполняют l ограниченных областей, напоминающих прямоугольники ($l = 4$). Причем вне этих областей портреты не содержат ни одной пары (x_n, x_{n+m}) .

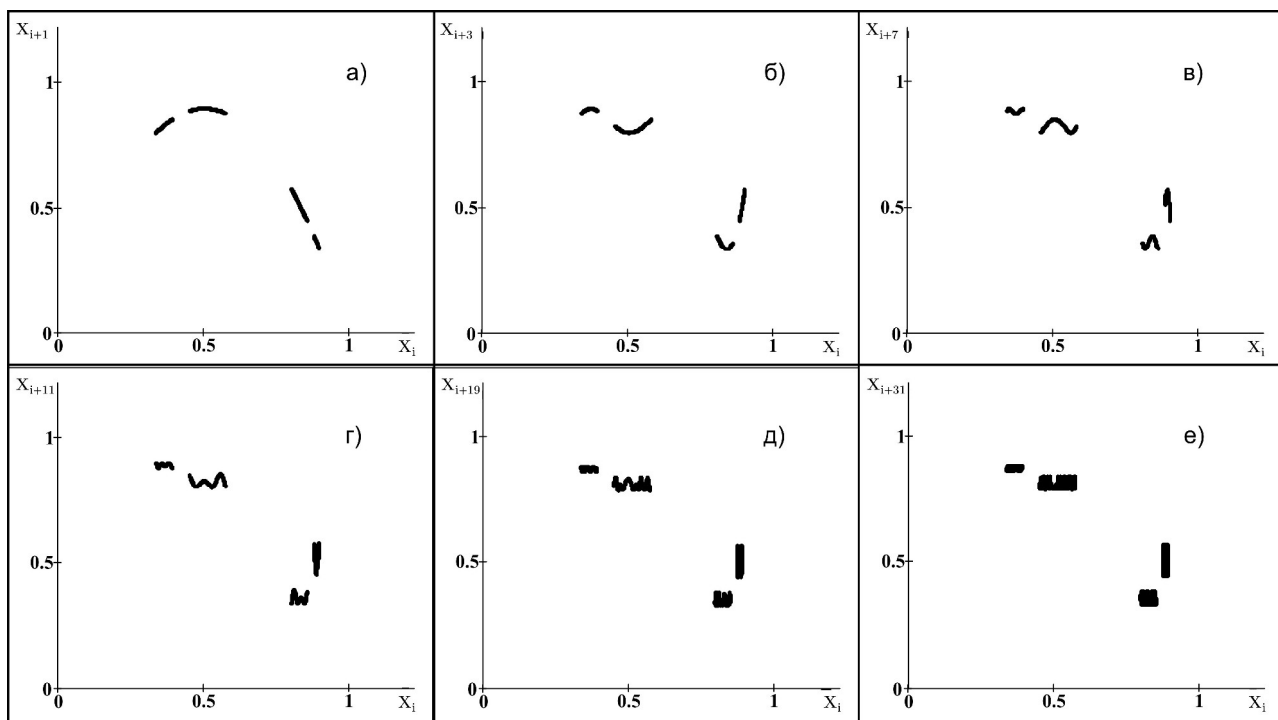


Рис. 1. Влияние лага m на портреты в псевдофазовом пространстве логистического отображения (1) при $a = 3.580$: а) – $m = 1$; б) – $m = 3$; в) – $m = 7$; г) – $m = 11$; д) – $m = 19$; е) – $m = 31$.

При $m > 31$ пары значений группируются на портрете, образуя $l = 4$ прямоугольных областей. Количество областей l не зависит значения лага m .

На рис. 2 показано, как меняется расположение l областей ($l = 6$), образованных парами значений решения уравнения (1) при изменении m для $a = 3.635$.

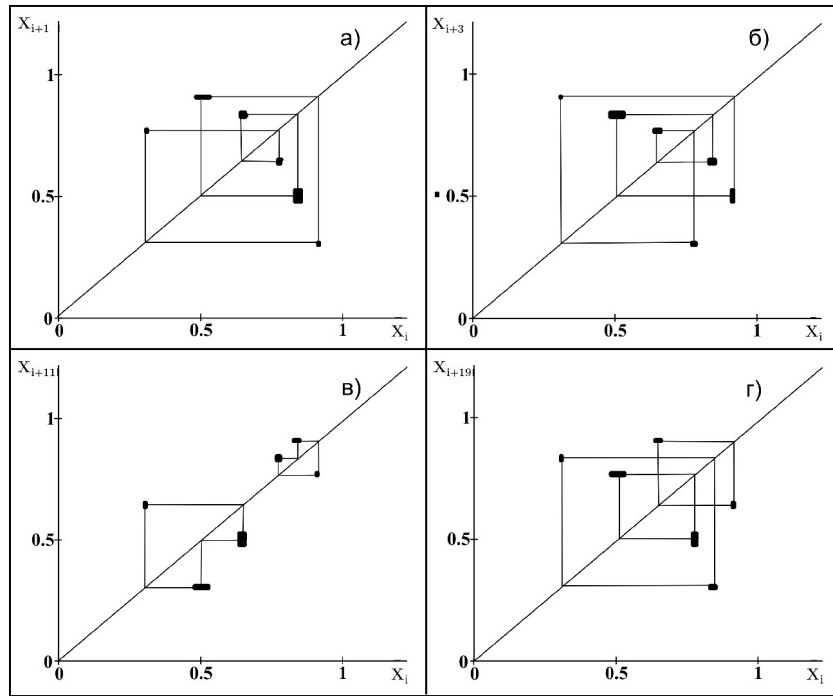


Рис. 2. Изменение расположения прямоугольных областей в зависимости от лага m на портретах в псевдофазовом пространстве логистического отображения (1) при $a = 3.635$: а) $m = 73$; б) $m = 71$; в) $m = 74$; г) $m = 75$.

Заметим, что при построении портретов на рис. 1 значения m подбирались так, чтобы области сгущения пар значений (x_n, x_{n+m}) находились в одних и тех же положениях. Иначе выбирались значения m для рис. 2. Значение $m = 73$ соответствует случаю $m = l \cdot k + 1$, где k – натуральное число. В этом случае области пар значений (x_n, x_{n+m}) располагаются вдоль графика правой части $F(x)$, а так как $d = 1$, то имеется одна последовательность обхода интервалов:

$$[0.301, 0.309] \rightarrow [0.765, 0.775] \rightarrow [0.632, 0.652] \rightarrow [0.824, 0.844] \rightarrow [0.477, 0.525] \rightarrow [0.906, 0.909] \rightarrow [0.301, 0.309] \rightarrow \dots$$

В случае, когда $m = 71$ (рис. 2б), лаг m взаимно прост с количеством областей $l = 6$, т.е. $d = 1$. Последовательность обхода интервалов та же, что и выше, но расположение областей изменилось.

В случае, представленном на рис. 2в, когда $m = 74$ (т.е. m не взаимно просто с l и $d = 2$), имеются 2 несвязанные подпоследовательности обхода интервалов X_s , $s = \overline{1, 6}$:

$$[0.301, 0.309] \rightarrow [0.632, 0.652] \rightarrow [0.477, 0.525] \rightarrow [0.301, 0.309] \rightarrow \dots$$

$$[0.765, 0.775] \rightarrow [0.824, 0.844] \rightarrow [0.906, 0.909] \rightarrow [0.765, 0.775] \rightarrow \dots$$

А в случае, представленном на рис. 2г, когда $m = 75$ (т.е. $d = 3$), имеются 3 несвязанные подпоследовательности обхода интервалов X_s , $s = \overline{1, 6}$:

$$[0.301, 0.309] \rightarrow [0.824, 0.844] \rightarrow [0.301, 0.309] \rightarrow \dots$$

$$[0.477, 0.525] \rightarrow [0.765, 0.775] \rightarrow [0.477, 0.525] \rightarrow \dots$$

$$[0.632, 0.652] \rightarrow [0.906, 0.909] \rightarrow [0.632, 0.652] \rightarrow \dots$$

Таким образом, при достаточно больших значениях лага m в псевдофазовом пространстве формируются области прямоугольного вида на портрете пар значе-

ний (x_n, x_{n+m}) . При этом прямоугольная форма областей указывает на хаотическое поведение решений внутри интервалов.

В общем случае порядок обхода областей определяется d -связной периодической последовательностью, где $d = \text{НОД}(l, m)$. Наиболее простым становится анализ, если в качестве m используется простое число.

Применение кластерного анализа решения рекуррентного уравнения (1) позволяет исследовать распределение интервально-периодических решений рекуррентного уравнения (1). В качестве примера рассмотрим интервал $a = \overline{3,5; 4}$. Результаты представлены на рис. 3 с помощью градиентной карты.

Значения параметра a последовательно брались с шагом 0.00005, и методом простой итерации находилось решение $\{x_n\}$ с произвольным начальным значением x_0 . Начальные 200 итераций полученного решения, соответствующие переходному режиму, отбрасывались. Решение о включении двух значений x_i и x_j в один кластер принималось при пороговой величине $\rho_{\max} = 0.001$.

Из рис. 3 видно, что все окна периодичности, представленные на картах периодических решений, полностью повторились на картах интервально-периодических. Интервально-периодические решения при увеличении значения параметра a продолжают каждую серию бифуркаций. При этом последовательно уменьшается количество интервалов l до $l = 1$, т.е. до полного вырождения в хаотическое решение.

Заметим, что области существования интервально-периодических решений большой протяженности, – например, с количеством интервалов $l = 4$ и $l = 8$ на рис. 3б и с количеством интервалов $l = 3$ на рис. 3в – прерываются узкими окнами периодичности. В этих окнах также наблюдаются бифуркации с удвоением периода периодических решений и последующим уменьшением количества интервалов l интервально-периодических решений.

Область значений параметров, при которых возникают хаотические решения, существенно сократилась за счет выделения областей интервально-периодических.

На рис. 3 изображены наиболее крупные обнаруженные окна периодичности, которые хорошо видны в использованном масштабе. Большая детализация обеспечивается соответствующим уменьшением размера исследуемой области значений параметра a .

Так, на рис. 3 вынесены карты трех более узких областей:

а) – $a = \overline{3.562; 3.590}$;

б) – $a = \overline{3.620; 3.650}$;

в) – $a = \overline{3.825; 3.860}$.

Заключение

Таким образом, для анализа характера решения одномерной системы, представленной рекуррентным уравнением, продуктивно использовать портреты в псевдофазовых пространствах с большим лагом. Такие портреты позволяют четко

различать виды хаотического решения рекуррентного уравнения, а также визуально определять период интервально-периодического решения.

Применение метода кластерного анализа позволяет автоматически осуществлять идентификацию интервально-периодических решений. Становится возможным получить распределение интервально-периодических решений рекуррентных уравнений в пространстве значений параметров.

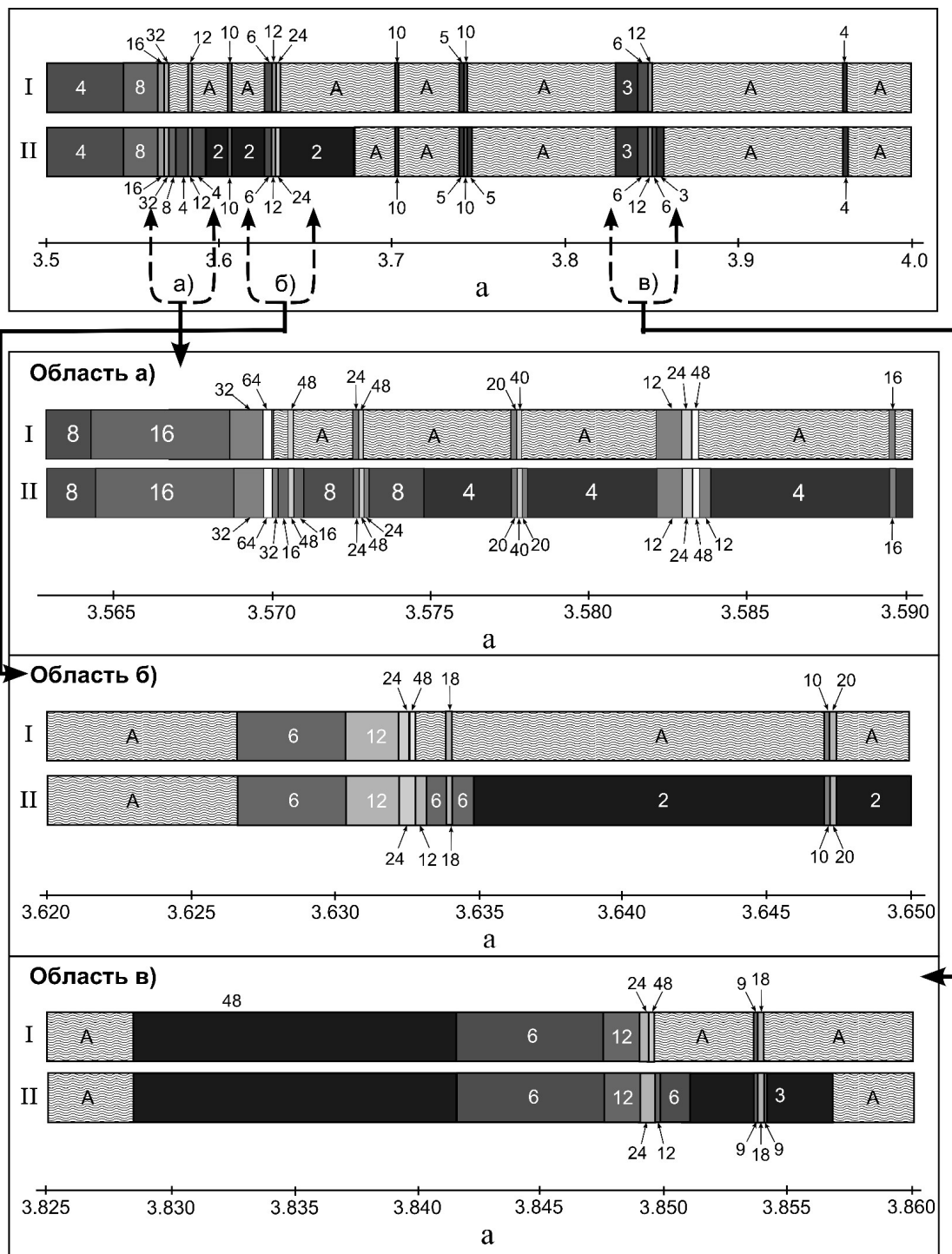


Рис. 3. Карты динамических режимов логистического уравнения на интервале $a = \overline{3,5; 4}$:
 I – карты периодических решений (при численном анализе решение относится либо к периодическим, либо к хаотическим); II – карты интервально-периодических решений (решение относится к периодическим либо к интервально-периодическим или хаотическим).
 Числами на картах обозначены периоды; A обозначает хаотическую динамику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. – М.: Наука, 1990.
4. *Мун Ф.* Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1990.
5. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – Изд. 2-е. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010.
6. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. – Изд. 2-е, доп. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
7. *Шлюфман К.В., Фишман Б.Е., Фрисман Е.Я.* Особенности динамических режимов одномерной модели Рикера // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2012. – №20(2). – С.12-28.
8. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. Изд. 2-е, перераб. и испр. – М.: Наука. 1981.
9. *Шапиро А.П., Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я.* Дискретные модели динамики численности локальной популяции // Математические модели популяций: Сб. науч. трудов. – Владивосток, 1979. – С.3-28.
10. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Биофизическая динамика продукционных процессов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
11. *Волкова Н.В., Думачев В.Н., Родин В.А.* Система рекуррентных уравнений на базе модели Ферхюльста-Пирла // Вестник ВГУ. Серия "Физика, Математика". – 2004. – №1. – С.88-95.
12. *Короткина М.Р.* Загадки логистического уравнения и стрела пространство-время // Лесной вестник. – 2002. – №1. – С.143-157.
13. *Ласунский А.В.* О Циклах дискретного периодического логистического уравнения // Труды Института математики и механики Уро РАН. – 2010. – Т. 16, №2. – С.154-157.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Чье Ен Уном.

E-mail:

Шлюфман Константин Владимирович – Shlufman@mail.ru;

Фишман Борис Ентильевич – bef942@mail.ru;

Фрисман Ефим Яковлевич – frisman@mail.ru.