УДК 510:512.8

© 2013 г. **Чье Ен Ун,** д-р техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск),
А.Б. Шеин, канд. техн. наук
(Чувашский государственный университет, Чебоксары)

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ. III

Для нахождения корней многочлена с заданной точностью предлагается простой и наглядный метод, основанный на получении итерационных формул, за счет выделения из многочленов простых и квадратичных множителей, с последующим сопоставлением записей многочленов с остатком, когда корни являются приближенными, и без остатка, когда значения корней являются точными.

Ключевые слова: многочлены, нахождение корней, итерационные формулы, приближенные и точные решения.

Введение

Предлагаемая работа является продолжением ранее опубликованных статей [1, 2], при этом сохранена сквозная нумерация формул.

Количество итераций процесса нахождения корней характеристического уравнения (1) в работе [1] можно сократить, если правильно задать их первоначальные значения. Так, для определения значений корней характеристического уравнения (1) четной степени используются равенства (39) – (41) из работы [2], для которых первоначальные значения могут быть найдены из выражений, получаемых по следующей цепочке преобразований:

$$\begin{aligned}
P(p) &= A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + A_{n-2} p^{n-2} + A_{n-3} p^{n-3} + A_{n-4} p^{n-4} + \\
&+ A_{n-5} p^{n-5} + \ldots + A_5 p^5 + A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = \\
&= (p - p_1^{(1)})(p - p_2^{(1)})(C_n p^{n-2} + C_{n-1}^{(1)} p^{n-3} + C_{n-2}^{(1)} p^{n-4} + C_{n-3}^{(1)} p^{n-5} + \\
&+ \ldots + C_5^{(1)} p^3 + C_4^{(1)} p^2 + C_3^{(1)} p) + (p - p_1^{(1)})(p - p_2^{(1)}) C_2^{(1)} + \\
&+ (p - p_1^{(1)}) C_1^{(1)} + B_0^{(1)} = \left\lfloor p^2 - (p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) p + p_1^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \right\rfloor \cdot \\
&\cdot \Big(C_n p^{n-2} + C_{n-1}^{(1)} p^{n-3} + C_{n-2}^{(1)} p^{n-4} + C_{n-3}^{(1)} p^{n-5} + \ldots + C_5^{(1)} p^3 + \\
&+ C_4^{(1)} p^2 + C_3^{(1)} p \Big) + \left\lfloor p^2 - (p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) p + p_1^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \right\rfloor C_2^{(1)} + \\
&+ (p - p_1^{(1)}) C_1^{(1)} + B_0^{(1)} = \ldots = C_n p^n + \left\lfloor -(p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) C_n + C_{n-1}^{(1)} \right\rfloor p^{n-1} + \\
&+ \left\lfloor p_1^{(1)} p_2^{(1)} C_n - (p_1^{(1)} + p_2^{(1)}) C_{n-1}^{(1)} + C_{n-2}^{(1)} \right\rfloor p^{n-2} +
\end{aligned}$$

$$+\left\lfloor p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_{n-1}^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_{n-2}^{(1)}+C_{n-3}^{(1)}\right\rfloor p^{n-3}+$$
$$...$$
$$+\left\lfloor p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_5^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_4^{(1)}+C_3^{(1)}\right\rfloor p^3+$$
$$+\left\lfloor p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_4^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_3^{(1)}+C_2^{(1)}\right\rfloor p^2+$$
$$+\left\lfloor p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_3^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_2^{(1)}+C_1^{(1)}\right\rfloor p+$$
$$+\left(p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_2^{(1)}-p_1^{(1)}C_1^{(1)}+B_0^{(1)}\right).$$

В результате имеем:

$$A_n=C_n,$$
$$A_{n-1}=-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_n+C_{n-1}^{(1)},$$
$$A_{n-2}=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_n-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_{n-1}^{(1)}+C_{n-2}^{(1)},$$
$$A_{n-3}=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_{n-1}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_{n-2}^{(1)}+C_{n-3}^{(1)},$$
$$...$$
$$A_3=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_5^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_4^{(1)}+C_3^{(1)},$$
$$A_2=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_4^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_3^{(1)}+C_2^{(1)},$$
$$A_1=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_3^{(1)}-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_2^{(1)}+C_1^{(1)},$$
$$A_0=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_2^{(1)}-p_1^{(1)}C_1^{(1)}+B_0^{(1)}.$$

Так как рассматривается случай выделения первого квадратичного множителя с корнями p_1 и p_2, то для определения значений этих корней в первом приближении согласно вышеприведенной системе равенств можно записать:

$$A_2=C_2,\ A_1=-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})C_2^{(1)}+C_1^{(1)},\ A_0=p_1^{(1)}p_2^{(1)}C_2-p_1^{(1)}C_1^{(1)}+B_0^{(1)}. \quad (46)$$

Из уравнений (46) видно, что для нахождения первоначальных значений корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ необходимо задать коэффициенты $C_1^{(1)}$ и $B_0^{(1)}$ и решить систему уравнений (46) относительно неизвестных $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$.

Пусть $C_1^{(1)}=0$ и $B_0^{(1)}=0$, т. е. "остаточные" члены в формулах (5) и (7) [1] равны нулю. Тогда имеем следующую систему равенств:

$$A_1=-(p_1^{(1)}+p_2^{(1)})A_2, \quad (47)$$
$$A_0=p_1^{(1)}p_2^{(1)}A_2. \quad (48)$$

Из уравнения (47) получим: $p_2^{(1)}=-\dfrac{A_1}{A_2}-p_1^{(1)}$. Подставляя полученное выражение для $p_2^{(1)}$ в равенство (48), находим уравнение $\left(p_1^{(1)}\right)^2+\dfrac{A_1}{A_2}p_1^{(1)}+\dfrac{A_0}{A_2}=0$ [3], решение которого позволяет найти значения первого корня:

$$p_{1(1,2)}^{(1)}=-0{,}5\frac{A_1}{A_2}\pm\sqrt{0{,}25\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2-\frac{A_0}{A_2}}. \quad (49)$$

Значения второго корня определяются из уравнения

$$p_{2(1,2)}^{(1)} = -\frac{A_1}{A_2} - p_{1(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\frac{A_1}{A_2} \mp \sqrt{0{,}25\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{A_0}{A_2}}. \qquad (50)$$

Следовательно, если выполняется условие $0{,}25\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 > \frac{A_0}{A_2}$, то имеем действительные корни $p_{1(1,2)}^{(1)}$ и $p_{2(1,2)}^{(1)}$. В противном случае корни будут комплексно-сопряженными и взаимно-сопряженными: $p_{1(1,2)}^{(1)} = -\alpha \pm j\beta$ и $p_{2(1,2)}^{(1)} = -\alpha \mp j\beta$. При этом для нахождения точных значений корней p_1 и p_2 по формулам (39) достаточно задать одну из пар их первоначальных приближений: $p_1^{(1)} = -\alpha + j\beta,\ p_2^{(1)} = -\alpha - j\beta$ или $p_1^{(1)} = -\alpha - j\beta,\ p_2^{(1)} = -\alpha + j\beta,$ как это было сделано в примере 2 работы [2].

При выделении второго квадратичного множителя первое приближение для корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ многочлена (1) находим, используя равенства, которые нетрудно получить путем реализации аналогичных вышеприведенным преобразований. Многочлен $P(p)$ представим в виде:

$$\begin{aligned}P(p) &= A_n p^n + A_{n-1}p^{n-1} + A_{n-2}p^{n-2} + A_{n-3}p^{n-3} + A_{n-4}p^{n-4} + \\ &+ A_{n-5}p^{n-5} + \ldots + A_5p^5 + A_4p^4 + A_3p^3 + A_2p^2 + A_1p + A_0 = \\ &= (p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0)(F_np^{n-4} + F_{n-1}^{(1)}p^{n-5} + \\ &+ F_{n-2}^{(1)}p^{n-6} + F_{n-3}^{(1)}p^{n-7} + F_{n-4}^{(1)}p^{n-8} + F_{n-5}^{(1)}p^{n-9} + \ldots + F_9^{(1)}p^5 + \\ &+ F_8^{(1)}p^4 + F_7^{(1)}p^3 + F_6^{(1)}p^2 + F_5^{(1)}p + F_4^{(1)}) + (p^3 + d_2p^2 + d_1p + \\ &+ d_0)F_3^{(1)} + (p^2 + s_1p + q_1)D_2^{(1)} + (p - p_1)C_1^{(1)} + B_0^{(1)}, \qquad (51)\end{aligned}$$

где $s_1 = -(p_1 + p_2),\ q_1 = p_1p_2;\quad b_3 = s_1 - (p_3^{(1)} + p_4^{(1)}),\ b_2 = q_1 - s_1(p_3^{(1)} + p_4^{(1)}) + p_3^{(1)}p_4^{(1)};$ $b_1 = -q_1(p_3^{(1)} + p_4^{(1)}) + s_1p_3^{(1)}p_4^{(1)};\ b_0 = q_1p_3^{(1)}p_4^{(1)};\ d_2 = s_1 - p_3^{(1)},\ d_1 = q_1 - s_1p_3^{(1)},\ d_0 = q_1p_3^{(1)}.$

Раскрывая выражение (51), получим:

$$\begin{aligned}&A_np^n + A_{n-1}p^{n-1} + A_{n-2}p^{n-2} + A_{n-3}p^{n-3} + A_{n-4}p^{n-4} + \\ &+ A_{n-5}p^{n-5} + \ldots + A_5p^5 + A_4p^4 + A_3p^3 + A_2p^2 + A_1p + A_0 = \\ &= F_np^n + (b_3F_n + F_{n-1}^{(1)})p^{n-1} + (b_2F_n + b_3F_{n-1}^{(1)} + F_{n-2}^{(1)})p^{n-2} + \\ &+ (b_1F_n + b_2F_{n-1}^{(1)} + b_3F_{n-2}^{(1)} + F_{n-3}^{(1)})p^{n-3} + (b_0F_n + b_1F_{n-1}^{(1)} + b_2F_{n-2}^{(1)} + \\ &+ b_3F_{n-3}^{(1)} + F_{n-4}^{(1)})p^{n-4} + (b_0F_{n-1} + b_1F_{n-2}^{(1)} + b_2F_{n-3}^{(1)} + b_3F_{n-4}^{(1)} + \\ &+ F_{n-5}^{(1)})p^{n-5} + \ldots + (b_0F_9^{(1)} + b_1F_8^{(1)} + b_2F_7^{(1)} + b_3F_6^{(1)} + F_5^{(1)})p^5 + \\ &+ (b_0F_8^{(1)} + b_1F_7^{(1)} + b_2F_6^{(1)} + b_3F_5^{(1)} + F_4^{(1)})p^4 + (b_0F_7^{(1)} + b_1F_6^{(1)} + \\ &+ b_2F_5^{(1)} + b_3F_4^{(1)} + F_3^{(1)})p^3 + (b_0F_6^{(1)} + b_1F_5^{(1)} + b_2F_4^{(1)} + \\ &+ d_2F_3^{(1)} + D_2^{(1)})p^2 + (b_0F_5^{(1)} + b_1F_4^{(1)} + b_1F_3^{(1)} + s_1D_2^{(1)} + C_1^{(1)})p +\end{aligned}$$

$$+(b_0F_4^{(1)}+d_0F_3^{(1)}+q_1D_2^{(1)}-p_1C_1^{(1)}+B_0^{(1)}).$$

Откуда имеем:

$$\begin{aligned}
&A_n=F_n,\\
&A_{n-1}=b_3F_n+F_{n-1}^{(1)},\\
&A_{n-2}=b_2F_n+b_3F_{n-1}^{(1)}+F_{n-2}^{(1)},\\
&A_{n-3}=b_1F_n+b_2F_{n-1}^{(1)}+b_3F_{n-2}^{(1)}+F_{n-3}^{(1)},\\
&A_{n-4}=b_0F_n+b_1F_{n-1}^{(1)}+b_2F_{n-2}^{(1)}+b_3F_{n-3}^{(1)}+F_{n-4}^{(1)},\\
&A_{n-5}=b_0F_{n-1}+b_1F_{n-2}^{(1)}+b_2F_{n-3}^{(1)}+b_3F_{n-4}^{(1)}+F_{n-5}^{(1)},\\
&\dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (52)\\
&A_5=b_0F_9^{(1)}+b_1F_8^{(1)}+b_2F_7^{(1)}+b_3F_6^{(1)}+F_5^{(1)},\\
&A_4=b_0F_8^{(1)}+b_1F_7^{(1)}+b_2F_6^{(1)}+b_3F_5^{(1)}+F_4^{(1)},\\
&A_3=b_0F_7^{(1)}+b_1F_6^{(1)}+b_2F_5^{(1)}+b_3F_4^{(1)}+F_3^{(1)},\\
&A_2=b_0F_6^{(1)}+b_1F_5^{(1)}+b_2F_4^{(1)}+d_2F_3^{(1)}+D_2^{(1)},\\
&A_1=b_0F_5^{(1)}+b_1F_4^{(1)}+b_1F_3^{(1)}+s_1D_2^{(1)}+C_1^{(1)},\\
&A_0=b_0F_4^{(1)}+d_0F_3^{(1)}+q_1D_2^{(1)}-p_1C_1^{(1)}+B_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

Так как при выделении второго квадратичного множителя требуется минимальная реализация многочлена четвертой степени, то согласно системе равенств (52) можно записать:

$$A_4=F_4,\quad A_3=b_3F_4+F_3^{(1)},\ A_2=b_2F_4+d_2F_3^{(1)}+D_2^{(1)},$$

$$A_1=b_1F_4+d_1F_3^{(1)}+s_1D_2^{(1)}+C_1^{(1)},\ A_0=b_0F_4+d_0F_3^{(1)}+q_1D_2^{(1)}-p_1C_1^{(1)}+B_0^{(1)}. \quad (53)$$

Раскрывая равенства (53), получим:

$$\begin{aligned}
&A_4=F_4,\\
&A_2=[q_1-s_1(p_3^{(1)}+p_4^{(1)})+p_3^{(1)}p_4^{(1)}]F_4++[s_1-p_3^{(1)}]F_3^{(1)}+D_2^{(1)}, \qquad (54)\\
&A_1=[-q_1(p_3^{(1)}+p_4^{(1)})+s_1p_3^{(1)}p_4^{(1)}]F_4+[q_1-s_1p_3^{(1)}]F_3^{(1)}+s_1D_2^{(1)}+C_1^{(1)},\\
&A_0=q_1p_3^{(1)}p_4^{(1)}F_4+q_1p_3^{(1)}F_3^{(1)}+q_1D_2^{(1)}-p_1C_1^{(1)}+B_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

Для нахождения значений корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ в первом приближении полагаем, что $B_0^{(1)}=C_1^{(1)}=D_2^{(1)}=F_3^{(1)}=0$, т.е. “остаточные” члены в формулах (5), (7), (9) и (11) [1] равны нулю. Тогда уравнения (54) принимают вид:

$$A_3=[s_1-(p_3^{(1)}+p_4^{(1)})]A_4, \qquad (55)$$

$$A_2=[q_1-s_1(p_3^{(1)}+p_4^{(1)})+p_3^{(1)}p_4^{(1)}]A_4, \qquad (56)$$

$$A_1=[-q_1(p_3^{(1)}+p_4^{(1)})+s_1p_3^{(1)}p_4^{(1)}]A_4, \qquad (57)$$

$$A_0=q_1p_3^{(1)}p_4^{(1)}A_4. \qquad (58)$$

Система уравнений (55) – (58) является переопределенной, так как для нахождения неизвестных $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ достаточно совместного решения любых двух уравнений из этой системы. Например, из уравнения (58) следует, что $p_3^{(1)} p_4^{(1)} = \frac{1}{q_1} \frac{A_0}{A_4}$. Подставляя это выражение в равенство (57), получим $p_4^{(1)} = -p_3^{(1)} - \frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right)$. Обратная подстановка выражения $p_4^{(1)}$ в выражение произведения $p_3^{(1)} p_4^{(1)}$ дает уравнение для нахождения значений корня $p_3^{(1)}$:

$$(p_3^{(1)})^2 + \frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right) p_3^{(1)} + \frac{1}{q_1}\frac{A_0}{A_4} = 0. \qquad (59)$$

Решая квадратное уравнение (59), получим:

$$p_{3(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right) \pm \sqrt{0{,}25\frac{1}{q_1^2}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right)^2 - \frac{1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}}. \qquad (60)$$

Используя уравнение взаимосвязи неизвестных $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$, находим выражение для определения значений корня $p_4^{(1)}$:

$$p_{4(1,2)}^{(1)} = -\,0{,}5\frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right) \mp \sqrt{0{,}25\frac{1}{q_1^2}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right)^2 - \frac{1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}}. \qquad (61)$$

Как и в случае нахождения первоначального приближения корней при выделении первого квадратичного множителя, имеем действительные корни $p_{3(1,2)}^{(1)}$ и $p_{4(1,2)}^{(1)}$, если выполняется условие $0{,}25\frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right)^2 > \frac{A_0}{A_4}$, или $\frac{A_1}{A_4} > \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4} \pm 2\sqrt{q_1\frac{A_0}{A_4}}$ и комплексно-сопряженные и взаимно-сопряженные корни $p_{3(1,2)}^{(1)}$ и $p_{4(1,2)}^{(1)}$, если это условие не выполняется.

В целом процесс нахождения первоначальных значений корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ определяется необходимой парой коэффициентов, – например, A_0 и A_1 (см. выше), A_1 и A_2, A_2 и A_3 и т.д. “минимального” многочлена (1) [1], через которые эти корни выражаются путем совместного решения соответствующих уравнений (55) – (58). При этом необходимая пара коэффициентов выбирается после анализа структуры минимального многочлена, в котором некоторые коэффициенты могут отсутствовать, т.е. применительно к конкретному многочлену. Необходимо учитывать, что с ростом индекса коэффициентов многочлена формулы для нахождения значений корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$, выраженные через эти коэффициенты, становятся более сложными.

Пример 5. Требуется найти первоначальные значения корней $p_1^{(1)}$, $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$, $p_4^{(1)}$ многочлена $P(p) = A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$, где $A_4 = 1$, $A_3 = 20$,

$A_2 = 1{,}11 \cdot 10^8$, $A_1 = 1{,}11 \cdot 10^9$, $A_0 = 1 \cdot 10^{15}$ (см. пример 2.), по формулам (49), (50) и (60), (61).

Подставляя значения коэффициентов A_0, A_1 и A_2 в формулу (49), получаем:

$$p_{1(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\frac{A_1}{A_2} \pm \sqrt{0{,}25\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{A_0}{A_2}} = -5 \pm j3001{,}5.$$

"Точное" значение корня p_1, полученное в примере 2 работы [2], после выполнения трех итераций: $p_1 = -5 + j3144$.

По формуле (50) находим первоначальное значение корня p_2:

$$p_{2(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\frac{A_1}{A_2} \mp \sqrt{0{,}25\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{A_0}{A_2}} = -5 \mp j3001{,}5$$ "точное" значение которого равно $p_2 = -5 - j3144$.

Видно, что определение первоначальных значений корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ выполнено с достаточно высокой точностью, так как значения корней, полученные в первом приближении, весьма близки к их точным значениям. Нетрудно убедиться, что при таких первоначальных значениях корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$, "точное" их значение при расчете по формулам (39) находится практически за одну, две итерации.

Принимаем первоначальные значения корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ равными: $p_1^{(1)} = -5 + j3000, p_2^{(1)} = -5 - j3000$. Тогда последовательно находим:

$$s_1^{(1)} = -\left(p_1^{(1)} + p_2^{(1)}\right) = 10, q_1^{(1)} = p_1^{(1)} p_2^{(1)} = 9000025,$$
$$B_4 = A_4 = 1, B_3^{(1)} = A_3 + p_1^{(1)} B_4 = 15 + j3000,$$
$$B_2^{(1)} = A_2 + p_1^{(1)} B_3^{(1)} = 1{,}01999 \cdot 10^8 + j30000,$$
$$B_1^{(1)} = A_1 + p_1^{(1)} B_2^{(1)} = 5{,}10005 \cdot 10^8 + j3{,}05996 \cdot 10^{11},$$
$$B_0^{(1)} = A_0 + p_1^{(1)} B_1^{(1)} = 8{,}201 \cdot 10^{13};$$
$$C_4 = B_4 = 1, C_3^{(1)} = B_3^{(1)} + p_2^{(1)} C_4 = 10;$$
$$C_2^{(1)} = B_2^{(1)} + p_2^{(1)} C_3^{(1)} = 1{,}01998 \cdot 10^8, C_1^{(1)} = B_1^{(1)} + p_2^{(1)} C_2^{(1)} = 0;$$
$$s_1^{(2)} = s_1^{(1)} + \frac{C_1^{(1)}}{C_2^{(1)}} = s_1^{(1)} = 10, q_1^{(2)} = q_1^{(1)} - \frac{p_1^{(1)} C_1^{(1)} - B_0^{(1)}}{C_2^{(1)}} = q_1^{(1)} + \frac{B_0^{(1)}}{C_2^{(1)}} = 9804060.$$

Имеем $p^2 + 10p + 9804060 = 0$. Откуда $p_{1,2} = -5 \pm j3131$.

Так как в рассмотренных примерах порядки коэффициентов минимального многочлена различаются весьма значительно, то при нахождении корней вручную всегда возникает ошибка округления чисел. Поэтому можно считать, что корни p_1 и p_2 в примерах 2 и 5 совпадают с высокой точностью. Если для дальнейших расчетов требуется более высокая точность определения значений корней, это обеспечивается за счет выполнения дополнительных итераций по соответствующим формулам итерационного алгоритма.

Первоначальные значения корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ находим по формулам (60) и (61). При этом могут быть использованы как приближенные значения корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$, полученные по формулам (49) и (50), так и "точные" значения этих корней, определенные с помощью итерационной процедуры (39). Поэтому верхний индекс, означающий номер итерации (приближения) при коэффициентах $s_1 = -(p_1 + p_2)$ и $q_1 = p_1 p_2$, в формулах (60) и (61) отсутствует.

Пусть для нахождения корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ используются значения корней $p_1^{(1)} = -5 + j3000$ и $p_2^{(1)} = -5 - j3000$. Тогда по формуле (60) можно определить значение корня $p_3^{(1)}$: $s_1 = -(p_1 + p_2) = 10$, $q_1 = p_1 p_2 = 9000025$;

$$p_{3(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\frac{1}{q_1}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right) \pm \sqrt{0{,}25\frac{1}{q_1^2}\left(\frac{A_1}{A_4} - \frac{s_1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}\right)^2 - \frac{1}{q_1}\frac{A_0}{A_4}} = 0 \pm j10535{,}653.$$

"Точное" значение корня p_3, полученное в примере 2 из работы [2], равно $p_3 = -5 + j10059$.

Так как корни $p_{3(1,2)}^{(1)}$ и $p_{4(1,2)}^{(1)}$ являются комплексно-сопряженными и взаимно-сопряженными, имеем $p_{4(1,2)}^{(1)} = 0 \mp j10535{,}653$ ("точное" значение корня $p_4 = -5 - j10059$).

Поскольку для определения первоначальных значений корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ были использованы коэффициенты A_0 и A_1 минимального многочлена, то вторичное использование этих коэффициентов в формулах (60) и (61), предназначенных для нахождения корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ при выделении второго квадратичного множителя, приводит к тому, что действительная часть этих корней оказывается равной нулю. Поэтому для определения первоначальных значений корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ необходимо использовать формулы, выраженные через коэффициенты A_2 и A_3 второго квадратичного множителя. Эти формулы нетрудно получить путем совместного решения уравнений (55) и (56). При этом имеем:

$$p_{3(1,2)}^{(1)} = 0{,}5\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right) \mp \sqrt{0{,}25\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right)^2 + \left[q_1 - s_1\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right) - \frac{A_2}{A_4}\right]}; \qquad (62)$$

$$p_{4(1,2)}^{(1)} = 0{,}5\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right) \mp \sqrt{0{,}25\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right)^2 + \left[q_1 - s_1\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right) - \frac{A_2}{A_4}\right]}. \qquad (63)$$

Корни $p_{3(1,2)}^{(1)}$ и $p_{4(1,2)}^{(1)}$ будут действительными и равными, если выполняется неравенство $0{,}25\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right)^2 > -\left[q_1 - s_1\left(s_1 - \frac{A_3}{A_4}\right) - \frac{A_2}{A_4}\right]$, и комплексно-сопряженными и взаимно-сопряженными, если это условие не выполняется.

Для рассматриваемого примера имеем:

$p^{(1)}_{3(1,2)} = -5 \pm j10099{,}497,\ p^{(1)}_{4(1,2)} = -5 \mp j10099{,}497.$

Так как “точное” значение корней равно: $p_3 = -5 + j10059$, $p_4 = -5 - j10059$, то первоначальные значения корней $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ определены по формулам (62) и (63) с достаточно высокой точностью.

Таким образом, для нахождения корней многочлена (1) из [1] четной степени можно использовать сквозной алгоритм, когда первая итерация проходит через все выделяемые квадратичные множители, или поэтапный алгоритм, когда на первом этапе “точно” определяются значения корней первого квадратичного множителя, а затем эти значения корней используются для “точного” нахождения корней второго квадратичного множителя и т.д.

При нахождении корней многочлена (1) из [1] нечетной степени сначала определяется первоначальное значение действительного корня по формуле [3]:

$$p_1^{(1)} = -\frac{A_0}{A_1}. \tag{64}$$

Затем значение корня $p_1^{(1)}$ уточняется по формуле (42) работы [2] и используется для нахождения первоначальных значений $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$ первого квадратичного множителя, “точное” значение которых определяется по формуле (43) из [2]. По известным значениям корней p_1, p_2 и p_3 находятся первоначальные значения корней $p_4^{(1)}$ и $p_5^{(1)}$ второго квадратичного множителя, значения которых уточняются по формулам (44) и т.д. Таким образом, реализуется поэтапный алгоритм нахождения корней многочлена (1) нечетной степени.

Формулы для определения первоначальных значений корней квадратичных множителей находятся по изложенной выше методике. Для этого многочлен

$$\begin{aligned} P(p) = {} & A_n p^n + A_{n-1}p^{n-1} + A_{n-2}p^{n-2} + A_{n-3}p^{n-3} + A_{n-4}p^{n-4} + \\ & + A_{n-5}p^{n-5} + \ldots + A_5 p^5 + A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0, \end{aligned}$$

представим в виде:

$$\begin{aligned} P(p) = {} & (p - p_1)P_1(p) + B_0^{(1)} = (p - p_1)\left[\left(p - p_2^{(1)}\right)P_2(p) + C_1^{(1)}\right] + B_0^{(1)} = \\ & = D_n p^n + \left(D_{n-1}^{(1)} + k_2 D_n\right)p^{n-1} + \left(D_{n-2}^{(1)} + k_2 D_{n-1}^{(1)} + k_1 D_n\right)p^{n-2} + \\ & + \left(D_{n-3}^{(1)} + k_2 D_{n-2}^{(1)} + k_1 D_{n-1}^{(1)} + k_0 D_n\right)p^{n-3} + \left(D_{n-4}^{(1)} + k_2 D_{n-3}^{(1)} + k_1 D_{n-2}^{(1)} + k_0 D_{n-1}^{(1)}\right)p^{n-4} + \\ & + \left(D_{n-5}^{(1)} + k_2 D_{n-4}^{(1)} + k_1 D_{n-3}^{(1)} + k_0 D_{n-2}^{(1)}\right)p^{n-5} + \ldots + \\ & + \left(D_5^{(1)} + k_2 D_6^{(1)} + k_1 D_7^{(1)} + k_0 D_8^{(1)}\right)p^5 + \left(D_4^{(1)} + k_2 D_5^{(1)} + k_1 D_6^{(1)} + k_0 D_7^{(1)}\right)p^4 + \\ & + \left(D_3^{(1)} + k_2 D_4^{(1)} + k_1 D_5^{(1)} + k_0 D_6^{(1)}\right)p^3 + \left(k_2 D_3^{(1)} + k_1 D_4^{(1)} + k_0 D_5^{(1)} + D_2^{(1)}\right)p^2 + \\ & + \left(k_1 D_3^{(1)} + k_0 D_4^{(1)} + l_1 D_2^{(1)} + C_1^{(1)}\right)p + \left(k_0 D_3^{(1)} + l_0 D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)}\right), \end{aligned}$$

где $k_2 = -p_1 - \left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right)$, $k_1 = p_1\left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right) + p_2^{(1)}p_3^{(1)}$, $k_0 = -\,p_1 p_2^{(1)} p_3^{(1)}$,

$$l_1 = -\left(p_1 + p_2^{(1)}\right),\ l_0 = p_1 p_2^{(1)}.$$

Сопоставление исходного и полученного многочленов дает возможность записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&A_n = D_n,\\
&A_{n-1} = D_{n-1}^{(1)} + k_2 D_n,\\
&A_{n-2} = D_{n-2}^{(1)} + k_2 D_{n-1}^{(1)} + k_1 D_n,\\
&A_{n-3} = D_{n-3}^{(1)} + k_2 D_{n-2}^{(1)} + k_1 D_{n-1}^{(1)} + k_0 D_n,\\
&A_{n-4} = D_{n-4}^{(1)} + k_2 D_{n-3}^{(1)} + k_1 D_{n-2}^{(1)} + k_0 D_{n-1}^{(1)},\\
&A_{n-5} = D_{n-5}^{(1)} + k_2 D_{n-4}^{(1)} + k_1 D_{n-3}^{(1)} + k_0 D_{n-2}^{(1)},\\
&\ldots\\
&A_5 = D_5^{(1)} + k_2 D_6^{(1)} + k_1 D_7^{(1)} + k_0 D_8^{(1)},\\
&A_4 = D_4^{(1)} + k_2 D_5^{(1)} + k_1 D_6^{(1)} + k_0 D_7^{(1)},\\
&A_3 = D_3^{(1)} + k_2 D_4^{(1)} + k_1 D_5^{(1)} + k_0 D_6^{(1)},\\
&A_2 = k_2 D_3^{(1)} + k_1 D_4^{(1)} + k_0 D_5^{(1)} + D_2^{(1)},\\
&A_1 = k_1 D_3^{(1)} + k_0 D_4^{(1)} + l_1 D_2^{(1)} + C_1^{(1)},\\
&A_0 = k_0 D_3^{(1)} + l_0 D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Так как при совместном выделении простого и квадратичного множителей требуется минимальная реализация многочлена третьей степени, то согласно системе равенств (65), с учетом формул (5), (7) и (9) работы [1], имеем:

$$\begin{aligned}
&A_3 = D_3,\ A_2 = k_2 D_3 + D_2^{(1)},\ A_1 = k_1 D_3 + l_1 D_2^{(1)} + C_1^{(1)},\\
&A_0 = k_0 D_3 + l_0 D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Раскрывая равенства (66), получим:

$$\begin{aligned}
&A_3 = D_3,\ A_2 = \left[-p_1 - \left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right)\right] D_3 + D_2^{(1)},\\
&A_1 = \left[p_1\left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right) + p_2^{(1)} p_3^{(1)}\right] D_3 - \left(p_1 + p_2^{(1)}\right) D_2^{(1)} + C_1^{(1)},\\
&A_0 = -p_1 p_2^{(1)} p_3^{(1)} D_3 + p_1 p_2^{(1)} D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Для нахождения первоначальных значений корней $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$ полагаем, что остаточные члены $B_0^{(1)}$, $C_1^{(1)}$ и $D_2^{(1)}$ в формулах (67) равны нулю. Тогда уравнения (67) принимают вид:

$$A_2 = \left[-p_1 - \left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right)\right] A_3, \tag{68}$$

$$A_1 = \left[p_1\left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right) + p_2^{(1)} p_3^{(1)}\right] A_3, \tag{69}$$

$$A_0 = -p_1 p_2^{(1)} p_3^{(1)} A_3. \tag{70}$$

Так как коэффициент A_0 использован для нахождения первоначального значения корня $p_1^{(1)}$, то совместному решению подлежат уравнения (68) и (69). Из равенства (68) имеем:

$$p_3^{(1)} = -p_2^{(1)} - \left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right). \qquad (71)$$

Подставляя выражение (71) для неизвестного $p_3^{(1)}$ в уравнение (69), получим:

$$p_{2(1,2)}^{(1)} = -0.5\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right) \mp \sqrt{0{,}25\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right)^2 - \left[\frac{A_1}{A_3} + p_1\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right) \right]}. \qquad (72)$$

Используя равенство (71), находим:

$$p_{3(1,2)}^{(1)} = -0.5\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right) \mp \sqrt{0{,}25\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right)^2 - \left[\frac{A_1}{A_3} + p_1\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right) \right]}. \qquad (73)$$

Корни $p_{2(1,2)}^{(1)}$ и $p_{3(1,2)}^{(1)}$ будут действительными, если выполняется неравенство $0{,}25\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right)^2 > \frac{A_1}{A_3} + p_1\left(p_1 + \frac{A_2}{A_3} \right)$, и комплексно-сопряженными и взаимно-сопряженными, если это неравенство не выполняется.

Пример 6. Требуется найти первоначальные значения корней характеристического многочлена третьей степени: $P(p) = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$, где $A_3 = 1$, $A_2 = 20$, $A_1 = 1{,}01 \cdot 10^8$, $A_0 = 1{,}01 \cdot 10^9$.

Первоначальное значение действительного корня $p_1^{(1)}$ находим по формуле (64):

$$p_1^{(1)} = -\frac{A_0}{A_1} = -10.$$

Так как значение корня $p_1^{(1)}$ является точным $p_1^{(1)} = p_1$, то, следовательно, по формулам (72) и (73) сразу можно определить первоначальные значения корней $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$:

$$p_{2(1,2)}^{(1)} = -5 \pm j10049{,}869, \quad p_{3(1,2)}^{(1)} = -5 \mp j10049{,}869.$$

Таким образом, при определении первоначальных значений корней $p_1^{(1)}$, $p_{2,3}^{(1)}$ сразу получен “точный” результат, т.е. $p_1^{(1)} = p_1 = -10$, $p_{2,3}^{(1)} = p_{2,3} = -5 \pm j10050$. Следовательно, можно сделать вывод, что многочлен делится на простой и квадратичный множители без остатка.

Для определения первоначальных значений корней многочлена может быть использована более простая процедура, подобная вышеизложенной, но не требующая представления многочлена в общем виде, что значительно уменьшает количество математических преобразований.

Сущность процедуры заключается в том, что при нахождении первоначальных значений корней степень многочлена последовательно наращивается до степени n включительно и на каждом этапе для нахождения корней используется многочлен, степень которого определяется порядковым номером находимых корней. Например, для определения первоначального значения действительного корня многочлена нечетной степени n согласно равенству (3) из [1] имеем многочлен вида: $P(p) = \left(p - p_1^{(1)}\right)B_1 + B_0 = B_1 p + \left(B_0 - B_1 p_1^{(1)}\right) = A_1 p + A_0$.

Откуда получим $A_1 = B_1$, $A_0 = B_0 - B_1 p_1^{(1)}$. Для первоначального приближения полагаем, что при выделении действительного корня $p_1^{(1)}$ деление выполнено без остатка, т.е. $B_0 = 0$, хотя на самом деле деление может выполняться с остатком. Тогда имеем равенство $A_0 = -A_1 p_1^{(1)}$, откуда $p_1^{(1)} = -\frac{A_0}{A_1}$, т.е. получаем формулу (64) работы [3].

Первоначальные значения корней $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$ находим, используя формулы (20), (3), (6) и (8) из [1]: $P(p) = (p - p_1)P_1(p) + B_0^{(1)} = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$, следовательно, имеем: $A_3 = D_3$, $A_2 = \left[-p_1 - \left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right)\right]D_3 + D_2^{(1)}$,

$$A_1 = \left[p_1\left(p_2^{(1)} + p_3^{(1)}\right) + p_2^{(1)} p_3^{(1)}\right]D_3 - \left(p_1 + p_2^{(1)}\right)D_2^{(1)} + C_1^{(1)},$$

$$A_0 = -p_1 p_2^{(1)} p_3^{(1)} D_3 + p_1 p_2^{(1)} D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)}.$$

Таким образом, получена система уравнений (67), решение которой относительно $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$ при $D_2^{(1)} = C_1^{(1)} = B_0^{(1)} = 0$, выраженное через коэффициенты A_2 и A_3 минимального многочлена, находится по формулам (72) и (73).

Корни $p_4^{(1)}$ и $p_5^{(1)}$ находим, используя формулы (20), (10) и (12) и общую форму записи многочлена пятой степени (1) [1]. Для этого выполняем следующие преобразования:

$$P(p) = (p - p_1)P_1(p) + B_0^{(1)} = (p - p_1)\left[(p - p_2)P_2(p) + C_1^{(1)}\right] + B_0^{(1)} =$$
$$= A_5 p^5 + A_4 p^4 + A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0,$$

следовательно, имеем:

$$A_5 = G_5,\ A_4 = a_4 G_5 + G_4^{(1)},\ A_3 = a_3 G_5 + b_3 G_4^{(1)} + F_3^{(1)},$$
$$A_2 = a_2 G_5 + b_2 G_4^{(1)} + c_2 F_3^{(1)} + D_2^{(1)},\ A_1 = a_1 G_5 + b_1 G_4^{(1)} + c_1 F_3^{(1)} + d_1 D_2^{(1)} + C_1^{(1)},$$
$$A_0 = a_0 G_5 + b_0 G_4^{(1)} + c_0 F_3^{(1)} + d_0 D_2^{(1)} - p_1 C_1^{(1)} + B_0^{(1)},$$

где $a_4 = \left(s_1 + s_2^{(1)}\right) - p_1$, $a_3 = \left(q_1 + s_1 s_2^{(1)} + q_2^{(1)}\right) - p_1\left(s_1 + s_2^{(1)}\right)$,

$$a_2 = \left(q_1 s_2^{(1)} + s_1 q_2^{(1)}\right) - p_1\left(q_1 + s_1 s_2^{(1)} + q_2^{(1)}\right),$$
$$a_1 = q_1 q_2^{(1)} - p_1\left(q_1 s_2^{(1)} + s_1 q_2^{(1)}\right),\ a_0 = -p_1 q_1 q_2^{(1)};$$
$$b_3 = \left(s_1 - p_4^{(1)}\right) - p_1,\ b_2 = \left(q_1 - s_1 p_4^{(1)}\right) - p_1\left(s_1 - p_4^{(1)}\right),$$
$$b_1 = -q_1 p_4^{(1)} - p_1\left(q_1 - s_1 p_4^{(1)}\right),\ b_0 = p_1 q_1 p_4^{(1)};$$
$$c_2 = s_1 - p_1,\ c_1 = q_1 - p_1 s_1,\ c_0 = -p_1 q_1;\ d_1 = -(p_1 + p_2),\ d_0 = p_1 p_2;$$
$$s_1 = -(p_1 + p_2),\ q_1 = p_2 p_3,\ s_2^{(1)} = -\left(p_4^{(1)} + p_5^{(1)}\right),\ q_2^{(1)} = p_4^{(1)} p_5^{(1)}.$$

Полагая $G_4^{(1)} = F_3^{(1)} = D_2^{(1)} = C_1^{(1)} = B_0^{(1)} = 0$, получим:
$A_4 = \left[\left(s_1 + s_2^{(1)}\right) - p_1\right]A_5$, $A_3 = \left[\left(q_1 + s_1 s_2^{(1)} + q_2^{(1)}\right) - p_1\left(s_1 + s_2^{(1)}\right)\right]A_5$,
$A_2 = \left[\left(q_1 s_2^{(1)} + s_1 q_2^{(1)}\right) - p_1\left(q_1 + s_1 s_2^{(1)} + q_2^{(1)}\right)\right]A_5$, $A_1 = \left[q_1 q_2^{(1)} - p_1\left(q_1 s_2^{(1)} + s_1 q_2^{(1)}\right)\right]A_5$,
$A_0 = -p_1 q_1 q_2^{(1)} A_5$.

Для нахождения неизвестных $s_2^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$, а следовательно, и значений корней $p_4^{(1)}$ и $p_5^{(1)}$, решаем систему уравнений:

$$\left(s_1 + s_2^{(1)}\right) - p_1 = \frac{A_4}{A_5}, \tag{74}$$

$$\left(q_1 + s_1 s_2^{(1)} + q_2^{(1)}\right) - p_1\left(s_1 + s_2^{(1)}\right) = \frac{A_3}{A_5}, \tag{75}$$

так как корни $p_4^{(1)}$ и $p_5^{(1)}$ требуется выразить через коэффициенты A_3 и A_4 “минимального” многочлена (1) [1]. Из уравнения (74) имеем:

$$s_2^{(1)} = (p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}. \tag{76}$$

Решая уравнение (75) относительно $q_2^{(1)}$ с учетом равенства (76), получим:

$$q_2^{(1)} = \frac{A_3}{A_5} + (p_1 - s_1)\frac{A_4}{A_5} + \left[p_1(p_1 - s_1) + \left(s_1^2 - q_1\right)\right]. \tag{77}$$

Подстановка выражений $s_2^{(1)} = -\left(p_4^{(1)} + p_5^{(1)}\right)$ и $q_2^{(1)} = p_4^{(1)} p_5^{(1)}$ в равенства (76) и (77) соответственно, дает систему уравнений: $-\left(p_4^{(1)} + p_5^{(1)}\right) = (p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}$,
$p_4^{(1)} p_5^{(1)} = \frac{A_3}{A_5} + (p_1 - s_1)\frac{A_4}{A_5} + \left[p_1(p_1 - s_1) + \left(s_1^2 - q_1\right)\right]$, решение которой относительно неизвестных $p_4^{(1)}$ и $p_5^{(1)}$ позволяет получить следующие выражения:

$$p_{4(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\left[(p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}\right] \pm \sqrt{0{,}25\left[(p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}\right]^2 - \left\{\left[p_1(p_1 - s_1) + \left(s_1^2 - q_1\right)\right] + (p_1 - s_1)\frac{A_4}{A_5} + \frac{A_3}{A_5}\right\}}, \tag{78}$$

$$p_{5(1,2)}^{(1)} = -0{,}5\left[(p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}\right] \mp \sqrt{0{,}25\left[(p_1 - s_1) + \frac{A_4}{A_5}\right]^2 - \left\{\left[p_1(p_1 - s_1) + \left(s_1^2 - q_1\right)\right] + (p_1 - s_1)\frac{A_4}{A_5} + \frac{A_3}{A_5}\right\}}. \tag{79}$$

Таким образом, при нахождении корней многочлена (1) нечетной степени с использованием поэтапного алгоритма, вначале по формуле (64) определяется первоначальное значение действительного корня $p_1^{(1)}$, которое затем уточняется по формулам (29) или (31) из[1] до получения точного значения корня p_1. На втором этапе, имея точное значение действительного корня p_1, по формулам (72) и (73) находим первоначальные значения второго и третьего корней $p_2^{(1)}$ и $p_3^{(1)}$ первого квадратичного множителя многочлена (1) и по формулам (43) уточняем их значения, полученные при первом приближении. Третий этап предполагает определение по формулам (44) точных значений корней p_4 и p_5 второго квадратичного множителя многочлена (1) по их первоначальным значениям, полученным по формулам (78) и (79), с использованием точных значений корней p_1, p_2 и p_3 найденных ранее, и т.д.

Точно такой же алгоритм используется для нахождения корней многочлена (1) четной степени. Отличие состоит только в формулах, используемых для определения первоначальных и точных значений корней квадратичных множителей. Так, для нахождения первоначальных значений корней $p_1^{(1)}$ и $p_2^{(1)}$ первого квадратичного множителя используются формулы (49) и (50), а для уточнения значений этих корней применяют формулы (39). Первоначальные значения $p_3^{(1)}$ и $p_4^{(1)}$ второго квадратичного множителя находятся по формулам (62) и (63), а точные значения этих корней определяются по формулам (40) и т.д.

Заключение

Результаты реализации примеров нахождения корней многочленов, полученных при описании электромагнитных процессов, протекающих при работе различных электронных устройств, показали, что метод нахождения корней многочленов отличается от других своей универсальностью, простотой, наглядностью, точностью нахождения корней и несомненным удобством для пользователя.

Метод может применяться для нахождения корней многочленов как вручную, так и на ЭВМ, при разработке соответствующих машинно-ориентированных алгоритмов. Метод является логически завершенным, так как включает процедуру выбора первоначальных значений корней многочленов, подлежащих уточнению по полученным для этого формулам с любой заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чье Ен Ун, Шеин А.Б.* Метод нахождения корней многочленов. I // Информатика и системы управления. – 2012.– №4(34). – С.88-96.
2. *Чье Ен Ун, Шеин А.Б.* Метод нахождения корней многочленов. II // Информатика и системы управления– 2012. – №1(35). – С.108-118.
3. *Крутов В.И., Данилов Ф.М., Кузьмик П.К. и др.* Основы теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1984.

E-mail:
Чье Ен Ун – chye@ais.khstu.ru;
Шеин Александр Борисович – chye@ais.khstu.ru.