

### Заключение

Проведено численное моделирование термического соединения оптических волокон с одинаковыми показателями преломления. Показана зависимость энергетических потерь от изменения показателя преломления и величины зоны термического соединения. Однако моделирование потерь было проведено при условии, что концы свариваемых волокон не имеют искривленных сердцевин, перетяжки и пр., т.е. они представляют собой геометрически правильные фигуры.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.
2. Гладких В.А., Кривошеев И.А. Френелевские потери энергии при соединении оптических линий связи // Информатика и системы управления. – 2011. – №3(29). – С. 18-25.
3. Убайдуллаев Р.Р. Волоконно-оптические сети. – М.: ИТЦ "Эко – Трендз", 2000.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.И. Смагиным.*

*E-mail:*

*Гладких Вячеслав Александрович – gladkikh@as.khb.ru;*

*Попова Алена Валентиновна – raveinr@mail.ru;*

*Кривошеев Игорь Александрович – igork@as.khb.ru.*

УДК 519.622

© 2014 г. **Е.А. Новиков**, д-р физ.-мат. наук  
(Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ БИЛИАРНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ФЕЛЬБЕРГА С КОНТРОЛЕМ ТОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ\*

Рассмотрен шестистадийный метод Фельберга пятого порядка точности применительно к решению гибридных задач. Построены неравенства для контроля точности вычислений и устойчивости численной схемы. Получена формула для выбора шага интегрирования по точности и устойчивости с учетом поведения событийной функции. Приведены результаты расчета билиарной системы.

**Ключевые слова:** метод Фельберга, контроль точности и устойчивости, билиарная система.

### Введение

В настоящее время особое внимание привлекают сложные системы, при описании которых характерны как непрерывные режимы, так и дискретные пере-

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00047).

ключения с одного режима на другой в зависимости от поведения некоторой событийной функции [1 – 3]. Такие задачи встречаются в биологии при описании живых систем, при моделировании химико-технологических процессов и электроэнергетических систем, при расчете технических объектов и в других важных приложениях. Наиболее простым является случай, когда в правую часть системы дифференциальных уравнений входят разрывные коэффициенты или сама правая часть является разрывной. В современной терминологии системы с такими особенностями принято называть гибридными, или непрерывно-дискретными системами [4]. Простейшим примером является прыгающий мячик между двумя отражающими стенками [3]. Следует отметить, что при моделировании практических задач в гибридной идеологии предполагается, что в точках смены режимов могут изменяться число фазовых переменных, размерность задачи и даже тип дифференциальных уравнений. В такой ситуации при выборе величины шага интегрирования, наряду с точностью вычислений, необходимо достаточно точно вычислять точку смены режима, которая, как правило, является функцией неизвестного решения. В противном случае глобальное поведение численного решения может существенно отличаться от точного решения.

Применение гибридной идеологии для описания непрерывно-дискретных процессов приводит к определенным проблемам при использовании для численного анализа многошаговых методов, потому что требуются дополнительные ограничения на величину шага интегрирования при прохождении точек смены режима. Необходим «метод-щуп», который позволяет оценить обстановку на следующем шаге интегрирования.

В противном случае возможна ситуация, когда правая часть системы дифференциальных уравнений вычисляется в точке, где решения не существует. Применение такого «метода-щупа» в идеологии многошаговых методов является непростой задачей. Дело здесь не только в получении дополнительного неравенства, учитывающего односторонность событий. Многошаговые методы в таких точках вынуждены забывать всю историческую информацию, что приводит к значительному возрастанию вычислительных затрат. По сути дела, после прохождения точки смены режима необходимо начинать вычисления так же, как и в первой точке. В случае применения стартовой процедуры требуется осуществлять ее повторный запуск многократно.

В работах [1, 2] автору удалось построить двухшаговый метод с учетом гибридности модели. Однако при построении методов более высокого порядка возникают принципиальные трудности. Вследствие низкого порядка точности применяемых в [1, 2] численных формул такие методы могут использоваться для расчетов с небольшой точностью, что ограничивает спектр возможных режимов гибридной системы.

Здесь изучается метод Фельберга [5] пятого порядка точности применительно к решению гибридных задач. Построены неравенства для контроля точности вычислений и устойчивости численной схемы. Получена формула для выбора шага интегрирования по точности и устойчивости с учетом поведения событийной функции. Приведены результаты расчета билиарной системы [6].

## Метод Фельберга

Рассмотрим задачу Коши для систем дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где  $y$  и  $f$  – вещественные  $N$ -мерные вектор-функции;  $t$  – независимая переменная. Для простоты часть выкладок проведем для автономной системы  $y' = f(y)$ , однако построенный ниже метод годится для решения неавтономных задач.

Для решения задачи (1) будем применять метод типа Рунге-Кутты вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 p_{li} k_i, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\ k_4 &= hf\left(t_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\ k_5 &= hf\left(t_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\ k_6 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right). \end{aligned} \quad (3)$$

При значениях коэффициентов

$$p_{51} = \frac{16}{135}, \quad p_{52} = 0, \quad p_{53} = \frac{6656}{12825}, \quad p_{54} = \frac{28561}{56430}, \quad p_{55} = -\frac{9}{50}, \quad p_{56} = \frac{2}{55} \quad (4)$$

формула (2) совпадает с методом Фельберга и имеет пятый порядок точности. Известен другой набор коэффициентов [5]:

$$p_{41} = \frac{25}{16}, \quad p_{42} = p_{46} = 0, \quad p_{43} = \frac{1408}{2565}, \quad p_{44} = \frac{2197}{4104}, \quad p_{45} = -\frac{1}{5}, \quad (5)$$

при которых схема (2) имеет четвертый порядок точности.

### Контроль точности вычислений

При расчетах по схеме (2), (3) в каждой точке имеем два приближения к решению, вычисленных методами четвертого и пятого порядков. Поэтому для контроля точности можно использовать оценку ошибки [7]:

$$\varepsilon_{n,5} = \frac{17}{24} \sum_{i=1}^6 (p_{5i} - p_{4i}) k_i,$$

где  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , определены формулами (3). В результате для контроля точности вычислений можно применять неравенство

$$\|\varepsilon_{n,5}\| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – требуемая точность расчетов;  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ . Из (3) видно, что

приращение  $k_5$  вычисляется в точке  $t_{n+1}$ , и поэтому нет необходимости в дополнительном неравенстве для выбора величины шага интегрирования [7].

### Контроль устойчивости численной схемы

Применяя (2), (3) для решения задачи

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \operatorname{Re}(\lambda) < 0,$$

получим  $y_{n+1} = Q_5(x)y_n$ , где функция устойчивости  $Q_5(x)$  имеет вид

$$Q_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{2080}x^6.$$

Здесь смысл  $\lambda$  – некоторое собственное число матрицы Якоби системы (1). При  $|Q_5(x)| \leq 1$  метод (2), (3) будет устойчивым. На рис.1 приведена область устойчивости – линии уровня  $|Q_5(x)| = s$ , при  $s$  равном 1, 0.3 и 0.1 – метода (2), (3) пятого порядка точности с коэффициентами (4).

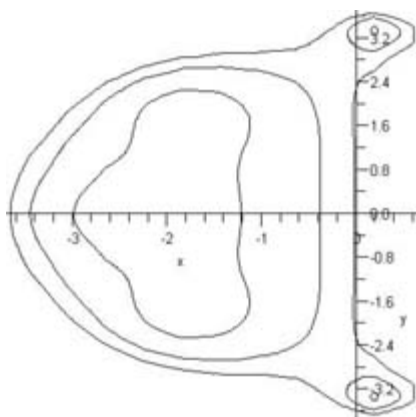


Рис. 1. Область устойчивости метода пятого порядка.

Аналогично для метода (2), (3) с коэффициентами (5) четвертого порядка точности имеем  $y_{n+1} = Q_4(x)y_n$ , где функция устойчивости  $Q_4(x)$  имеет вид

$$Q_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{104}x^5.$$

Область устойчивости схемы четвертого порядка приведена на рис. 2.

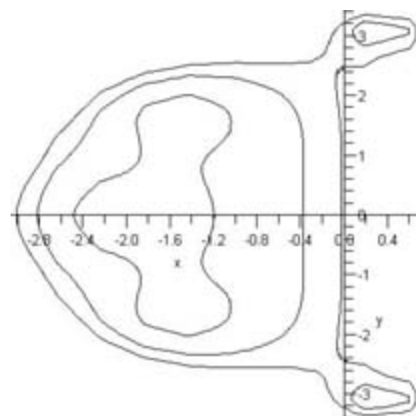


Рис. 2. Область устойчивости метода четвертого порядка.

Из анализа результатов расчетов алгоритмами с контролем устойчивости следует, что при получении оценки максимального собственного числа матрицы

Якоби можно ограничиться рассуждениями для линейной задачи с постоянными коэффициентами вида  $y' = Ay + b$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $t \geq 0$  [7]. Запишем  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  применительно к данной задаче, т.е.:

$$k_1 = h(Ay_n + b), \quad k_2 = k_1 + \frac{1}{4}(hA)k_1,$$

$$k_3 = k_1 + \frac{3}{8}(hA)k_1 + \frac{9}{128}(hA)^2 k_1.$$

Отсюда получим

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{4}(hA)k_1, \quad \frac{32}{9}k_3 - \frac{16}{3}k_2 + \frac{16}{9}k_1 = \frac{1}{4}(hA)^2 k_1.$$

Введем обозначение

$$V_n = \frac{1}{9} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(32k_3 - 48k_2 + 16k_1)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|.$$

В результате, с использованием степенного метода оценки максимального собственного числа, для контроля устойчивости (2), (3) с коэффициентами (4) можно применять неравенство  $v_n \leq 3.6$  [7]. В данном неравенстве используется число 3.6, которому примерно равна длина интервала устойчивости схемы (2), (3), (4). По мнимой оси область устойчивости также ограничена числом 3.6.

Заметим, что если в случае нелинейной задачи в представлениях  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  в виде рядов Тейлора имеются дополнительные слагаемые, т.е.:

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{4}h^2 f'_n f_n + \frac{1}{32}h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4),$$

$$\frac{32}{9}k_3 - \frac{16}{3}k_2 + \frac{16}{9}k_1 = \frac{1}{4}h^3 f_n'^2 f_n + \frac{4}{3}h^3 f''_n f_n^2 + O(h^4),$$

то они будут вносить искажения в оценку максимального собственного числа. Поэтому выбирая шаг интегрирования будем учитывать грубость оценки. Учитывая, что  $\varepsilon_{n,5} = O(h^5)$ ,  $v_n = O(h)$ , определим два числа –  $q$  и  $r$  – из равенств  $q^5 \varepsilon_{n,5} = \varepsilon$  и  $rv_n = 3.6$ . Шаг по точности и устойчивости  $h_{n+1}$  может быть выбран по формуле

$$h_{n+1} = \min(qh_n, rh_n).$$

Однако в силу грубости оценки максимального собственного числа данное соотношение приводит к неоправданным колебаниям величины шага интегрирования. Результаты расчетов показывают, что для прогноза величины шага более надежной является формула

$$h_{n+1} = \max \{h_n, \min(qh_n, rh_n)\}. \quad (6)$$

Формула (6) позволяет стабилизировать поведение величины шага интегрирования на участке установления решения, где определяющим является устойчивость численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то он выбирается равным последнему успешному шагу интегрирования, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа матрицы Якоби. Из анализа результатов расчетов жестких задач алгоритмом с контролем точности и устойчивости следует примерно полуторакратное повышение эффективности за счет дополнительного контроля устойчивости.

## Выбор шага интегрирования для гибридных систем

Рассмотрим одностороннюю гибридную систему, записанную в виде задачи Коши с ограничениями, т.е.:

$$y' = f(t, y), \quad g(t, y) < 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (7)$$

где  $g(t, y)$  – событийная функция, или нелинейный предохранитель. Поскольку многие представляющие интерес модели  $g(t, y)$  линейны, будем рассматривать их как наиболее важный класс событийных функций. Любой нелинейный предохранитель можно привести к линейному виду добавлением дополнительной фазовой переменной  $z = g(t, y)$ . В результате задачу (7) можно переписать в виде

$$y' = f(t, y), \quad z' = \frac{\partial g(t, y)}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial g(t, y)}{\partial t},$$

$$y(t_0) = y_0, \quad z < 0, \quad t_0 \leq t \leq t_k.$$

При применении гибридной идеологии особое внимание следует обратить на выбор метода интегрирования. Полностью неявный метод использовать нельзя, потому что он требует вычисления функции  $f(t, y)$  в потенциально опасной области, где модель не определена. Перепишем метод (2), (3) с коэффициентами (4) в виде общего одношагового безытерационного метода, т.е.:

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \varphi(t_n, y_n, h_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В этом случае событийная динамика описывается соотношением

$$g_{n+1} = g(t_n + h_{n+1}^{ef}, y_n + h_{n+1}^{ef} \varphi_n).$$

Разлагая функцию  $g_{n+1}$  в ряд Тейлора и учитывая линейность  $g(t, y)$ , имеем

$$g_{n+1} = g_n + h_{n+1}^{ef} \left( \frac{\partial g_n}{\partial y} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right).$$

В итоге получили зависимость  $g_{n+1}$  от прогнозируемого шага  $h_{n+1}^{ef}$ . Можно доказать, что выбор шага по формуле [3]

$$h_{n+1}^{ef} = (\gamma - 1) \left( \frac{\partial g_n}{\partial x} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right)^{-1} \cdot g_n, \quad \gamma \in (0, 1)$$

обеспечивает поведение событийной динамики как устойчивой линейной системы, которая приближается к поверхности  $g(t, y) = 0$ . Кроме того, если  $g(t_0, y_0) < 0$ , то  $g(t_n, y_n) < 0$  для всех  $n$ . Из результатов расчетов следует, что для эффективных вычислений можно выбрать  $\gamma = 0.5$ . Учитывая (6), шаг интегрирования по точности и устойчивости с учетом событийной функции можно вычислить по формуле

$$h_{n+1} = \min \left\{ h_{n+1}^{ef}, \max [h_n, \min (qh_n, rh_n)] \right\}.$$

Применение данной формулы позволит вычислять точки смены режима с задаваемой точностью интегрирования  $\varepsilon$ .

## Билиарная система

Рассматриваемая модель дифференциальных уравнений с бинарными компонентами в правой части взята из [6]. Переход от одного события к другому происходит в зависимости от значений бинарных компонент, которые определя-

ют вид правой части при наступлении определенных событий в системе. Билиарная система живого организма приведена на рис. 3.

Желчь образуется в гепатоцитах печени и поступает в желчные капилляры, внутрипеченочные и внепеченочные ходы 3. Часть желчи около 10% проходит по холедоху 6 и через сфинктер Одди 7 поступает в двенадцатиперстную кишку 8. Другая часть, примерно 90%, проходя по печеночному протоку 5, депонируется по пузырному протоку 4 через сфинктер Люткенса 2 в желчный пузырь 1. В желчном пузыре желчь концентрируется и затем выбрасывается вновь через сфинктер Люткенса в холедох и затем в двенадцатиперстную кишку. После сокращения тонус желчного пузыря снижается, и он начинает вновь заполняться желчью. Регуляция функций желчного пузыря осуществляется нейрогуморальным путем под управлением нейрокоманд, поступающих при приеме пищи, работе, стрессах и при других раздражителях.

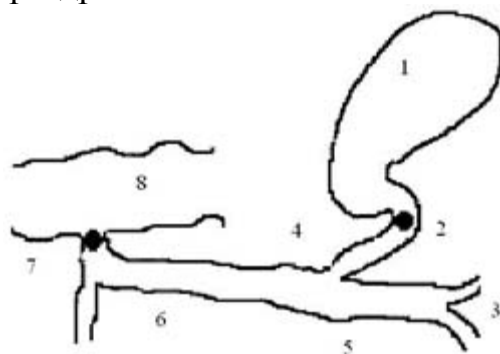


Рис. 3. Билиарная система.

Движение желчи по билиарному тракту зависит от событий, которые происходят в организме и вне организма. Пищеварительный период, прием пищи рассматривается как одно из событий в организме и сопровождается активной моторикой желчного пузыря с выбросом желчи в пищеварительный тракт. Желчекаменная болезнь и другие патологии также в данном случае рассматриваются как уникальные совокупности событий, при этом динамика желчи будет иметь свои особенности и различное модельное описание.

Для описания двигательной активности билиарной системы без патологии вводятся следующие обозначения:  $x_1$  – количество (уровень) желчи в холедохе;  $x_2$  – количество (уровень) желчи в желчном пузыре;  $Q(t) = 0$ , если сфинктер Одди открыт для депонирования желчи в двенадцатиперстную кишку;  $Q(t) = 1$ , если сфинктер Одди закрыт и не депонирует желчь в двенадцатиперстную кишку;  $I(t) = 0$ , если нейрокоманда не поступила,  $I(t) = 1$ , если поступила команда на моторику желчного пузыря и выброс желчи;  $L(t) = 0$ , если сфинктер Люткенса открыт для приема желчи в желчный пузырь;  $L(t) = 1$ , если через сфинктер Люткенса происходит выброс желчи в холедох.

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  – области допустимых значений соответственно  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Из физических соображений следует, что уровни желчи  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  есть неотрицательные величины. Для уровня желчи в холедохе  $x_1(t)$  очевидным условием является  $x_1(t) < x_1^*$  для любого  $t$ , где  $x_1^*$  – критический уровень желчи в холедохе, при котором возникает патология внутреннего давления желчи на стенки холедоха,

т.е. новое событие в организме. Поэтому область допустимых значений  $D_1$  для  $x_1(t)$  будет  $[0, x_1^*]$ .

Так как желчный пузырь не может вместить более чем  $x_2^*$  желчи вследствие ограничения объема, то  $D_2$  есть  $[0, x_2^*]$ . Поэтому рассматривается область  $\Omega = D_1UD_2$  и вектор состояний  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ ,  $D \in \Omega$  для всех  $t$ .

Бинарный вектор  $B(t) = (I(t), Q(t), L(t))^T$  называется вектором управления процессом желчеотделения или вектором событий. В зависимости от значений  $B(t)$  перераспределяется движение потоков желчи, и в соответствии с этим каждое новое состояние  $B(t)$  имеет персональную физиологическую интерпретацию и описывается разными уравнениями потоков на интервале наблюдения  $[t_0, t_k]$ . Ниже через  $\bar{I}(t)$ ,  $\bar{Q}(t)$  и  $\bar{L}(t)$  обозначаются отрицания для  $I(t)$ ,  $Q(t)$  и  $L(t)$ .

Рассмотрим  $B(t_1) = (0, 0, 0)^T$ . Это означает, что с некоторого момента  $t_1 \in [t_0, t_k]$  отсутствует нейрокоманда на моторику желчного пузыря, сфинктер Люткенса настроен на прием желчи желчным пузырем до 90% от общего потока, а сфинктер Одди открыт для депонирования желчи в двенадцатиперстную кишку через холедох. Если воспользоваться описанием динамики потоков [8, 9], получим

$$x_1' = 0.1f(t) - F_1(x_1), \quad x_2' = 0.9f(t), \quad t > t_1, \quad (8)$$

где  $f(t)$  – функция секреции желчи печенью;  $F_1(x_1)$  – нелинейная функция интенсивности выхода желчи в двенадцатиперстную кишку или выходной темп [8] желчи через сфинктер Одди. Начальные условия  $x_{10}(t_1)$  и  $x_{20}(t_1)$  здесь и в дальнейшем опускаются ввиду их очевидного определения;  $t_i$  – моменты наступления  $i$ -го события в билиарной системе,  $i \geq 1$ .

Учитывая ограниченную пропускную способность сфинктера Одди,  $F_1(x_1)$  задается как нелинейная функция с насыщением, т.е.  $F_1(x_1) = k_1x_1$  при  $x_1 < F_1^*/k_1$  и  $F_1(x_1) = F_1^*$  при  $x_1 \geq F_1^*/k_1$ . Здесь  $k_1$  – нормирующий коэффициент;  $F_1^*$  – предельно возможная интенсивность выхода желчи. Понижение тонуса сфинктера Одди означает уменьшение  $k_1$ . При полном ослаблении тонуса  $k_1 = 0$ .

При поступлении нейрокоманды в момент времени  $t_2$ ,  $t_0 \leq t_2 < t_k$ ,  $t_2 \neq t_1$  наступает новое событие – активизируется моторика желчного пузыря и происходит выброс желчи через сфинктер Люткенса, т.е.  $L = 1$ . При этом  $B = (1, 0, 1)^T$  и динамика билиарного тракта описывается новой системой

$$x_1' = f(t) + F_2(x_2) - F_1(x_1), \quad x_2' = -F_2(x_2), \quad t > t_2, \quad (9)$$

где  $F_2(x_2)$  – интенсивность выброса желчи при моторике желчного пузыря. Функция  $F_2(x_2)$  имеет тот же физический смысл, что и  $F_1(x_1)$ . Она задается следующим образом:  $F_2(x_2) = k_2x_2$  при  $x_2 < F_2^*/k_2$  и  $F_2(x_2) = F_2^*$  при  $x_2 \geq F_2^*/k_2$ . Здесь  $k_2$  – тонус сфинктера Люткенса;  $F_2^*$  – предельно допустимая пропускная способность пузыря протока.

Комбинация нулей и единиц бинарного вектора  $B$ , определяющего уравнения динамики билиарной системы, приводит к комплексу систем дифференциальных уравнений типа (8), (9), причем общее число уравнений  $N = 2^3$ . Объединение уравнения (8), (9) через их правые части введением бинарных компонент вектора  $B$  приводит к системе уравнений вида



$$\begin{aligned}
x_1' &= 0.1f(t) + 0.9f(t)I(t)\bar{L}(t) + 0.9f(t)L(t) + \\
&+ F_2(x_2)I(t)L(t) - F_1(x_2)\bar{Q}(t), \\
x_2' &= [0.9f(t)\bar{I}(t)\bar{L}(t) - F_2(x_2)I(t)L(t)]P(x_1),
\end{aligned}
\tag{10}$$

где  $P = 0$ , при  $x_1 < x_1^*$  и  $P = 1$ , при  $x_1 \geq x_1^*$ . Бинарная компонента  $P$  введена для имитации нового события – патологии по давлению. Это событие при  $P = 1$  приводит к застою желчи в холедохе и желчном пузыре. Застой желчи происходит, начиная с некоторого момента  $t_3$ ,  $t_0 \leq t_3 < t_k$ ,  $t_3 \neq t_2$ , когда уровень желчи в холедохе  $x_1$  превышает допустимую норму  $x_1^*$ . При этом давление в общем желчном протоке становится критичным и во избежание появления трещин и «пропитываний» прекращается секреция желчи печенью, и моторика сфинктеров Люткенса и Одди ослабевает до 0. В билиарной системе наступает стационарный режим – застой желчи в холедохе и желчном пузыре. В этом режиме билиарная система описывается уравнениями  $x_1' = 0$ ,  $x_2' = 0$ ,  $t > t_3$ .

Выбор параметров модели билиарной системы выполняется из условия физиологической адекватности параметров модели [6]. Желчь синтезируется печенью с некоторой интенсивностью величиной  $f(t)$  [мл/час]. Процесс желчеотделения имеет периодический характер (сон, бодрствование и т.д.) с периодом в 24 часа, причем количество синтезированной за сутки желчи в здоровом организме в среднем остается величиной постоянной. Количество выделяемой за сутки желчи  $V$  [мл] можно определить исходя из того, что на 1 кг веса здорового человека выделяется 10-15 мл желчи. Учитывая периодичность процессов желчеотделения, в дальнейшем рассматриваем только один период  $t \in [0, 24]$ . Принятая закономерность синтеза желчи представлена на рис. 4 [6].

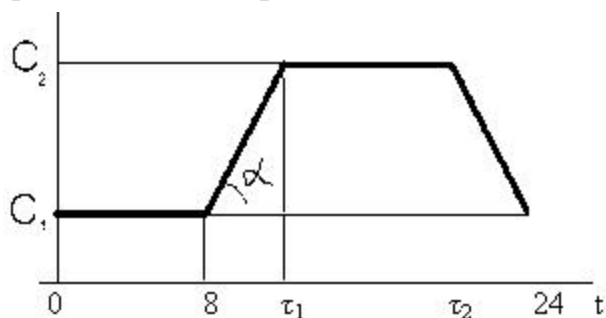


Рис. 4. Кусочно-линейная функция секреции желчи  $f(t)$ .

Смысл принятой закономерности синтеза желчи состоит в том, что в состоянии сна процессы замедлены при  $t \in [0, 8]$ , за ночь выделяется  $v_1$  [мл] желчи. Считается, что на этом интервале секреция равномерна, причем  $f(t) = c_1 = \text{const}$  или  $c_1 = v_1/8$ . В период бодрствования  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  секреция увеличивается в среднем вдвое, поэтому  $c_2 = v_1/4$ . Периоды перехода от сна к бодрствования и назад имеют одинаковую закономерность, а следовательно, одинаковые коэффициенты наклона на переходных интервалах  $t \in [8, \tau_1]$  и  $t \in [\tau_2, 24]$ , но с противоположными знаками. Точки  $\tau_1$  и  $\tau_2$  находятся из геометрических соображений:

$$\tau_1 = 48 - \frac{8V}{v_1}, \quad \tau_2 = \frac{8V}{v_1} - 16.$$

Нетрудно видеть, что имеет место [6]:

$$\frac{c_1}{10} \leq k_1 x_1 \leq \frac{c_2}{10}.$$

Холедох рассматривается как тонкостенная цилиндрическая трубка радиусом  $r_1$  и длиной  $l_1$ . Тогда усредненный объем желчи в холедохе  $\omega$  равен уровню  $x_1$ , которым заполняется холедох при здоровой динамике, т.е.  $\omega = x_1 = \pi r_1^2 l_1$ . Тогда оценка для значения  $k_1$  имеет вид

$$\frac{c_1}{10\omega} \leq k_1 \leq \frac{c_2}{10\omega}.$$

Если холедох может растягиваться при выбросах желчи из желчного пузыря в  $b$  раз, то объем или предельно допустимый уровень желчи в холедохе составит

$$x_1^* = \pi r_1^2 l_1 b^2.$$

Предельно допустимая пропускная способность сфинктера Одди  $F_1^* = k_1 x_1^*$ . С учетом приведенных выше соотношений, получим оценку для  $F_1^*$ , т.е.

$$\frac{c_1 b^2}{10} \leq F_1^* \leq \frac{c_1 b^2}{5}.$$

Для  $F_2^*$  имеем [6]:

$$\frac{R_2 c_1 b^2}{10 R_1} \leq F_2^* \leq \frac{R_2 c_1 b^2}{5 R_1},$$

где  $R_2$  – радиус пузырного протока со сфинктером Люткенса;  $R_1$  – проток со сфинктером Одди.

## Результаты расчетов

Численный эксперимент заключается в следующем. При ненулевых начальных условиях имитировались три режима – без патологии при  $0 \leq t < 16$ , непроходимость желчи в двенадцатиперстную кишку через сфинктер Одди при  $16 < t < 20$  и период восстановления сфинктера Одди при  $20 \leq t \leq 24$ . В расчетах не рассматривается патология пузырного протока со сфинктером Люткенса, и поэтому  $L(t)$  повторяет  $I(t)$  [6]. Результаты расчетов для суточного интервала даны на рис. 5.

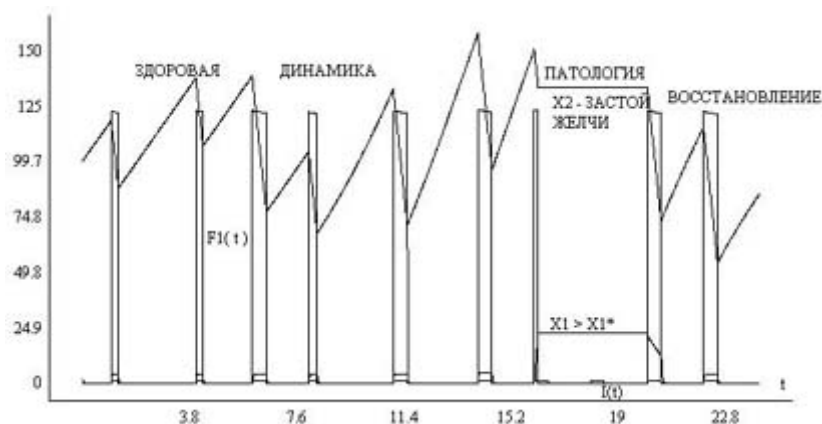


Рис. 5. Динамика билиарной системы без патологии ( $t < 16$ ), с патологией сфинктера Одди ( $16 \leq t < 20$ ) и восстановлением от патологии пузырного протока ( $t \geq 20$ ).

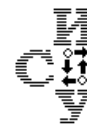
На рис. 5 приведены:  $F_1(t)$  – интенсивность депонирования желчи в 12-перстную кишку; нейрокоманды  $I(t) = \{0, 1\}$  активизации или ослабления моторики желчного пузыря; уровни желчи в холедохе  $x_1(t)$  и желчном пузыре  $x_2(t)$ . Из графиков следует, что резкое повышение уровня желчи в холедохе, начиная с момента  $t = 16$ , приводит к патологии застоя. В патологический период ввиду здоровой части организма, команды на выброс желчи из желчного пузыря – два импульса  $I(t)$  в период патологии. Таким образом, нервная система, следуя физиологическим принципам гомеостаза, пытается мобилизацией здоровой части организма поддержать здоровый баланс уровня желчи в организме. Однако выполнение команд нервной системы не происходит до тех пор, пока не восстановится проходимость пузырного протока через сфинктер Одди в двенадцатиперстную кишку при  $t \geq 20$ . Восстановление моторики сфинктера Одди с момента  $t = 20$  обеспечивает проходимость желчи из холедоха в двенадцатиперстную кишку. При этом давление в холедохе падает, что приводит к возобновлению секреции и активизации моторики сфинктеров Люткенса и Одди.

### Заключение

Рассмотренный пример билиарной системы представляется наиболее простым случаем гибридной системы, потому что переключение режимов связано только со временем и не зависит от неизвестного решения. Однако применение метода Фельберга с дополнительным контролем устойчивости позволяет повысить эффективность расчетов примерно в 1.4 раза при задаваемой точности расчетов  $\varepsilon = 10^{-4}$ . На участках установления решения практически отсутствуют возвраты за счет контроля устойчивости. Для проверки надежности неравенства для контроля точности приближенное решение вычислялось с высокой задаваемой точностью  $\varepsilon = 10^{-9}$ . Точность вычислений при  $\varepsilon = 10^{-4}$  соответствует задаваемой точности на всем интервале интегрирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Esposito J., Kumar V.M.* An Asynchronous Integration and Event Detection Algorithm for Simulating Multi-Agent Hybrid Systems // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. – 2004. – Vol. 14, № 4. – P. 336-358.
2. *Esposito J., Kumar V.* Event detection near singularities // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. – 2007. – Vol. 17. – P. 1-22.
3. *Новиков Е.А., Шорников Ю.В.* Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012.
4. *Шорников Ю.В.* Прикладное математическое, алгоритмическое и программное обеспечение компьютерного анализа гибридных систем: Дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск: НГТУ, 2009.
5. *Fehlberg E.* Klassische Runge-Kutta-Formeln funfter und siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle // Computing. – 1969. – № 4. – P. 93-106.
6. *Шорников Ю.В.* Компьютерное моделирование билиарной системы специализированными средствами ИСМА // Научный вестник НГТУ. – 2004. – № 2. – С. 24-36.
7. *Новиков Е.А.* Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука, 1997.
8. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971.



9. Бенькович Е.А., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Практическое моделирование динамических систем. – СПб.: БХВ, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Ереминым.

E-mail:

Новиков Евгений Александрович – novikov@ict.krasn.ru.

УДК 539.3+519.6

© 2014 г. **Н.В. Минеева**, канд. физ.-мат. наук,  
**А.И. Олейников**, д-р физ.-мат. наук  
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ДВУСТОРОННЕЙ ОЦЕНКИ ЭНЕРГИИ К МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННО-УПРУГОГО ТЕЛА

Рассматривается применение комбинированного алгоритма к некоторой модели гетерогенно-упругого (разномодульного) тела. Приведены результаты численных экспериментов. Представлен анализ влияния негладких слагаемых упругого потенциала.

**Ключевые слова:** вариационный принцип, гетерогенно-упругое тело, разномодульное тело, комбинированный алгоритм, упругая энергия.

### Введение

Современная теория упругости описывает, главным образом, поведение материалов с усложненными, существенно отличающимися от линейности, механическими свойствами и, как правило, требует специфических методов решения задач. Разработка численных методов решения нелинейных задач является одним из основных направлений развития теории. Широко применяемый в настоящее время метод конечных элементов часто не дает требуемой уверенности в качестве полученного результата, поскольку при решении задач физически нелинейной теории упругости нет возможности оценить его точность. Априорная оценка погрешности классическим двойственным методом также представляет значительную сложность, так как необходимое для его применения явное обращение определяющих зависимостей «напряжения – деформации» в рамках большинства нелинейных моделей упругих сред оказывается невозможным.

Представленный ранее [1] комбинированный алгоритм двустороннего приближения к экстремуму энергетического функционала позволяет получать двусторонние оценки решения задач нелинейной упругости без обращения опреде-