УДК 517:519.95

© 2014 г. **Чье Ен Ун**, д-р техн. наук
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск),
А.Б. Шеин, канд. техн. наук
(Чувашский государственный университет, Чебоксары)

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ. I

При моделировании электронных устройств часто возникает задача описания и вычисления параметров характеристик нелинейных или переменных во времени компонентов схем электронных устройств, а также воздействий произвольного вида. В работе предлагается один из возможных вариантов решения задачи интерполирования, приводящий к простым вычислительным алгоритмам. В первой части статьи излагаются алгоритмы интерполяции полиномами первой и второй степени.

Ключевые слова: интерполирование функций, степенные полиномы, приближенные и точные решения.

Введение

При моделировании электронных устройств часто возникает необходимость вместо функции действительной переменной $f(t)$, относящейся к некоторому широкому классу функций A, использовать функцию $\phi(t)$, принадлежащую более узкому классу функций B и в известном смысле представляющую функцию $f(t)$ на некотором промежутке времени t. Классом A может быть множество непрерывных функций, описывающих характеристики нелинейных или переменных по времени компонентов схем электронных устройств, а класс B могут составлять алгебраические или тригонометрические многочлены, которые широко применяются в качестве приближающих функций. При этом для расчетов на ЭВМ кривые характеристик компонентов устройства задаются опорными точками, а остальные точки определяются методом интерполяции. Примеры использования методов интерполяции для решения уравнений состояния электронных устройств при произвольных внешних воздействиях приведены в работах [1, 2].

Известно много способов приближения функций, – например, с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа, Ньютона, Эрмита – Маркова, интерполяционных формул Стирлинга и Бесселя и т.д. [3, 4], включая приближение с помощью трансцендентных функций. Это многообразие методов вызвано различными подходами и постановками при решении конкретных задач. Практический интерес к задаче не ослабевает, так как для решения инженерных и научно-исследовательских задач настоятельно требуются простые, быстрые, удобные и надежные методы интерполяции.

В работе предлагается один из возможных вариантов решения задачи приближения функций, когда приближающая функция $\varphi(t)$ – многочлен степени n – совпадает с функцией $f(t)$ в $(n+1)$ точках временного промежутка t, т.е. выполняются равенства $f(t_i)=\varphi(t_i)$ $\left(i=\overline{0,n}\right)$.

Постановка задачи

Пусть задано $n+1$ значение функции действительного переменного $x=f(t)$ в $n+1$ различных точках $t_0,t_1,...,t_n$, называемых узлами интерполяции: $x_0=f(t_0)$, $x_1=f(t_1),\ldots,\ x_n=f(t_n)$.

Требуется построить интерполянт-многочлен степени не выше n:

$$\varphi(t)=P_n(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+...+a_nt^n,$$

для которого значения в узлах интерполирования были бы равны значениям функции $f(t)$ в тех же узлах, т.е. должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned}
&a_0+a_1t_0+a_2t_0^2+...+a_nt_0^n=x_0;\\
&a_0+a_1t_1+a_2t_1^2+...+a_nt_1^n=x_1;\ \ ...,\\
&a_0+a_1t_n+a_2t_n^2+...+a_nt_n^n=x_n.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Из уравнений системы (1) надо определить неизвестные $a_0,a_1,...a_n$. Известно (теорема Кронекера – Капелли), что если ранг матрицы системы равенств (1) равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Предположим, что все x_i $(i=0,1,2,...,n)$ различны, тогда определитель системы уравнений (1)

$$\begin{vmatrix}
1 & t_0 & t_0^2 & ... & t_0^n\\
1 & t_1 & t_1^2 & ... & t_1^n\\
... & ... & ... & ... & ...\\
1 & t_n & t_n^2 & ... & t_n^n
\end{vmatrix},$$

называемый определителем Вандермонда, отличен от нуля и система равенств (1) имеет единственное решение, т.е. коэффициенты многочлена $P_n(t)$ могут быть найдены, причем единственным образом. Следовательно, рассматриваемая задача может быть сформулирована и так: найти многочлен $P_n(t)$, график которого проходил бы через $(n+1)$ заданные точки $(t_0,x_0),(t_1,x_1),...,(t_n,x_n)$, лежащие на графике функции $f(t)$.

Решение задачи

Самым простым видом интерполяции является линейная интерполяция, при которой два соседних узла интерполяции соединяются друг с другом прямой линией (рис. 1), а промежуточные точки определяются из уравнения этой прямой.

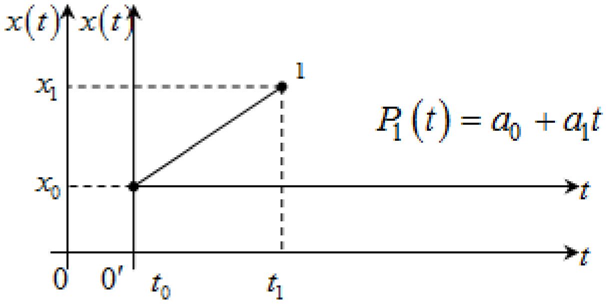

Рис. 1. Линейная интерполяция.

В этом случае согласно системе равенств (1) можно записать матрично-векторное уравнение вида

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 1 & t_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \text{ или } \underbrace{\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{bmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{x}, \quad (2)$$

где $t_{00} = 1$; $t_{01} = t_0$; $t_{10} = 1$; $t_{11} = t_1$. Первая цифра двузначного индекса при t означает номер соответствующего момента времени, для которого представлено значение x_i $\left(i = \overline{0, n}\right)$, а вторая показывает степень этого момента времени.

В общем случае решение матрично-векторного уравнения $T \cdot a = x$, развернутая форма записи которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & \ldots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

относительно коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, может быть получено по правилу Крамера

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} T_{00} & T_{10} & \ldots & T_{n0} \\ T_{01} & T_{11} & \ldots & T_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{0n} & T_{1n} & \ldots & T_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ или}$$

$$a_i = \frac{1}{\det T}\left(T_{0i}x_0 + T_{1i}x_1 + \ldots + T_{ni}x_n\right) = \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} t_{00} & \ldots & x_0 & \ldots & t_{0n} \\ t_{10} & \ldots & x_1 & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n0} & \ldots & x_n & \ldots & t_{nn} \end{vmatrix} = \frac{D_i}{D}, \quad (4)$$

где определитель D_i, стоящий в числителе, получается из определителя

$$D = \det T = \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} & \ldots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{vmatrix},$$

заменой i-го столбца на столбец x, а T_{ik} – алгебраические дополнения к элементам t_{ik} – определяются следующим образом:

$$T_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{0,k-1} & t_{0,k+1} & \cdots & t_{0n} \\ t_{10} & t_{11} & t_{1,k-1} & t_{1,k+1} & \cdots & t_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{i-1,0} & t_{i-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & t_{i-1,n} \\ t_{i+1,0} & t_{i+1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & t_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n,k-1} & t_{n,k+1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для системы линейных уравнений $T \cdot a = x$ при $D = \det T \neq 0$ получим единственное решение $(a_0, a_1, ..., a_n)$, где $a_i = D_i / D, \left(i = \overline{0,n}\right)$.

Решение матрично-векторного уравнения (2) по формуле (4) позволяет найти коэффициенты a_0 и a_1. Так как $a_i = \dfrac{1}{\det T}(T_{0i}x_0 + T_{1i}x_1)$, $(i = 0,1)$, где $\det T = t_{00}t_{11} - t_{01}t_{10} = t_1 - t_0$, $T_{00} = t_{11} = t_1$, $T_{10} = -t_{01} = -t_0$, $T_{01} = -t_{10} = -1$, $T_{11} = t_{00} = 1$.

Тогда $a_0 = \dfrac{1}{\det T}(T_{00}x_0 + T_{10}x_1) = \dfrac{t_1 x_0 - t_0 x_1}{t_1 - t_0}$, $a_1 = \dfrac{1}{\det T}(T_{01}x_0 + T_{11}x_1) = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$.

Следовательно, по известной информации об x_0 и x_1 для моментов времени t_0 и t_1 могут быть найдены коэффициенты линейного многочлена $P_1(t) = a_0 + a_1 t$:

$$a_0 = \frac{t_1 x_0 - t_0 x_1}{t_1 - t_0}, \ a_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}. \tag{5}$$

При этом величина рассматриваемого интервала времени может быть любой.

Для квадратичной интерполяции (рис. 2) имеем систему равенств вида

$$\begin{aligned} a_0 + t_0 a_1 + t_0^2 a_2 &= x_0, \\ a_0 + t_1 a_1 + t_1^2 a_2 &= x_1, \\ a_0 + t_2 a_1 + t_2^2 a_2 &= x_2, \end{aligned} \tag{6}$$

в матрично-векторной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Решение матрично-векторного уравнения (7) относительно коэффициентов a_0, a_1, a_2 находим по правилу Крамера, используя для этого запись уравнения (7) в виде матрично-векторного уравнения (3) и формулу для его решения (4).

При этом решение по формуле (4) может быть найдено двумя способами.

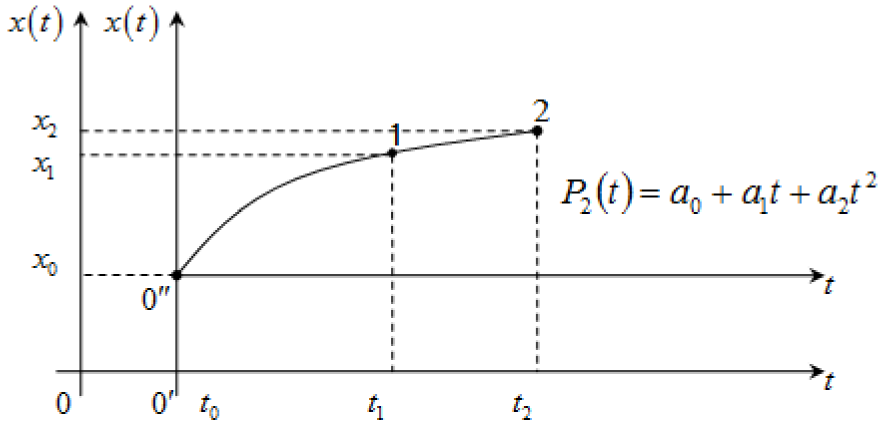

Рис. 2. Квадратичная интерполяция.

Первый способ заключается в реализации первой “независимой части” формулы (4):

1) $$\begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где $t_{00} = 1, t_{01} = t_0, t_{02} = t_0^2$, $t_{10} = 1, t_{11} = t_1, t_{12} = t_1^2$, $t_{20} = 1, t_{21} = t_2, t_{22} = t_2^2$;

2) $$D = \det T = \begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1);$$

3) $$a_0 = \frac{1}{\det T}(T_{00}x_0 + T_{10}x_1 + T_{20}x_2),$$

где

$$T_{00} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_1 \cdot t_2(t_2 - t_1),\ T_{01} = -\begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_0 \cdot t_2(t_0 - t_2),$$

$$T_{20} = \begin{vmatrix} t_{01} & t_{02} \\ t_{11} & t_{12} \end{vmatrix} = t_0 \cdot t_1(t_1 - t_0),$$

$$a_0 = \frac{t_1 \cdot t_2(t_2 - t_1)x_0 + t_0 \cdot t_2(t_0 - t_2)x_1 + t_0 \cdot t_1(t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}; \tag{8}$$

4) $$a_1 = \frac{1}{\det T}(T_{01}x_0 + T_{11}x_1 + T_{21}x_2),$$

где

$$T_{01} = -\begin{vmatrix} t_{10} & t_{12} \\ t_{20} & t_{22} \end{vmatrix} = t_1^2 - t_2^2,\ T_{11} = \begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} \\ t_{20} & t_{22} \end{vmatrix} = t_2^2 - t_1^2,\ T_{21} = -\begin{vmatrix} t_{00} & t_{02} \\ t_{10} & t_{12} \end{vmatrix} = t_0^2 - t_1^2,$$

$$a_1 = \frac{(t_1^2 - t_2^2)x_0 + (t_2^2 - t_0^2)x_1 + (t_0^2 - t_1^2)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}; \tag{9}$$

5) $$a_2 = \frac{1}{\det T}(T_{02}x_0 + T_{12}x_1 + T_{22}x_2),$$

где

$$T_{02} = \begin{vmatrix} t_{10} & t_{11} \\ t_{20} & t_{21} \end{vmatrix} = t_2 - t_1,\; T_{12} = -\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{20} & t_{21} \end{vmatrix} = t_0 - t_2,\; T_{22} = -\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{vmatrix} = t_1 - t_0,$$

$$a_2 = \frac{(t_2 - t_1)x_0 + (t_0 - t_2)x_1 + (t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}. \qquad (10)$$

Для нахождения коэффициентов вторым способом используется вторая "независимая часть" формулы (4):

$$a_0 = \frac{1}{\det T}\begin{vmatrix} x_0 & t_{01} & t_{02} \\ x_1 & t_{11} & t_{12} \\ x_2 & t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = \frac{t_1 t_2(t_2 - t_1)x_0 + t_0 t_2(t_0 - t_2)x_1 + t_0 t_1(t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)};$$

$$a_1 = \frac{1}{\det T}\begin{vmatrix} t_{00} & x_0 & t_{02} \\ t_{10} & x_1 & t_{12} \\ t_{20} & x_2 & t_{22} \end{vmatrix} = \frac{(t_1^2 - t_2^2)x_0 + (t_2^2 - t_0^2)x_1 + (t_0^2 - t_1^2)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)};$$

$$a_2 = \frac{1}{\det T}\begin{vmatrix} t_{00} & t_{01} & x_0 \\ t_{10} & t_{11} & x_1 \\ t_{20} & t_{21} & x_2 \end{vmatrix} = \frac{(t_2 - t_1)x_0 + (t_0 - t_2)x_1 + (t_1 - t_0)x_2}{t_2^2(t_1 - t_0) + t_1^2(t_0 - t_2) + t_0^2(t_2 - t_1)}.$$

Результаты, полученные обоими способами, естественно, совпадают. При этом видно, что применение второго способа позволяет найти коэффициенты $a_i(i = 0,1,2)$ с меньшим количеством математических операций, но при этом приходится работать с матрицами большего размера, чем в случае решения системы уравнений по первому способу.

Заключение

Полученные формулы интерполирования функций просты, удобны и наглядны. В случае необходимости порядок интерполянтов может быть повышен до любой требуемой величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чье Ен Ун, Шеин А.Б.* Метод решения уравнений состояния электронных устройств // Проектирование и технология электронных средств. – 2012. – №1. – С.19-25.
2. *Чье Ен Ун, Шеин А.Б.* Решение уравнений состояния в задачах схемотехнического моделирования при произвольных воздействиях // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. – 2012. – №4. – С.45-51.
3. *Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф.* Специальный курс высшей математики (прикладные вопросы анализа). – М.: Высш. школа, 1976.
4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1975.

E-mail:
Чье Ен Ун – chye@ais.khstu.ru;
Шеин Александр Борисович – chye@ais.khstu.ru.