



УДК 684.511

© 2014 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук,  
**Л.В. Чепак**, канд. техн. наук  
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

## РОБАСТНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С ФИЛЬТР-КОРРЕКТОРОМ ДЛЯ ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается синтез системы управления нелинейным объектом с запаздыванием по состоянию со скалярными входом и выходом. В предлагаемом робастном законе управления используются оценки недоступных прямым измерениям переменных состояния, полученные с помощью фильтр-корректора, включенного в основной контур управления.

**Ключевые слова:** нелинейная система, робастный закон управления, критерий гиперустойчивости, фильтр-корректор, запаздывание по состоянию.

### Введение

В современной теории управления одним из актуальных направлений является разработка систем слежения за эталонным сигналом для нелинейных объектов с запаздываниями, функционирующих в условиях априорной неопределенности. Решение подобных задач часто осложняется невозможностью измерения переменных состояния объекта, наличием внешних и внутренних возмущений. В отечественных и зарубежных публикациях разработке законов управления нелинейными объектами уделяется достаточно внимания, что объясняется разнообразием типов нелинейностей и особенностями функционирования этого класса систем управления. В частности, работы [1, 2] посвящены построению на основе прямого метода Ляпунова систем управления нелинейными объектами различных типов, в [3, 4] авторы предлагают способы преобразования исходных нелинейных систем к каноническим формам. Проблемы разработки нелинейных систем управления по выходу решались также в [5 – 7], но вопросы компенсации произвольных внешних и внутренних возмущений при наличии запаздываний в нелинейном объекте пока изучены недостаточно.

В данной работе, в рамках применения критерия гиперустойчивости [8], разрабатывается робастный алгоритм управления для нелинейного скалярного объекта с запаздыванием по состоянию. При синтезе системы управления используется фильтр-корректор, позволяющий без измерения переменных состояния объекта построить систему, обладающую желаемой динамикой в условиях априорной неопределенности, нестационарности и при наличии существенных помех.

## Постановка задачи

Рассматривается нелинейный объект управления ( $OY$ ) с запаздыванием по состоянию:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-\tau), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad x(s) = \mathcal{G}(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad (1)$$

где  $x(t) \in R^n$  – вектор состояния;  $u(t) \in R$  – управление;  $\tau$  – известное постоянное запаздывание;  $x(0) = x_0$  – вектор начальных условий;  $\mathcal{G}(t)$  – начальная ограниченная векторная функция;  $f(x(t), x(t-\tau), u(t))$  – гладкая вектор-функция  $n$ -го порядка;  $f(0, 0, 0) = 0$  и выполняется условие

$$\frac{\partial f_i(x(t), x(t-\tau), u)}{\partial u} = f_{iu}(x(t), x(t-\tau)), \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. функции  $f_{iu}$  не зависят от управления при всех  $x \in \Omega_x$ ;  $\Omega_x = \{x: \|x\| \leq M < \infty\}$  – некоторая область пространства  $R^n$ , включающая точку  $x = 0$ .

Рассматривая функционирование  $OY$  (1) в условиях априорной параметрической неопределенности, аналогично [9], опишем его динамику в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A(\xi) + B_0 \alpha^T(x, \xi))x + D(\xi)x(t-\tau) + B(x, \xi)u(t) + B(x, \xi)\psi(x, t), \\ y(t) &= L^T x(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A = A(\xi)$  – произвольная матрица в форме Фробениуса порядка  $n \times n$ ;  $D = D(\xi)$  – постоянная матрица порядка  $n \times n$ ;  $\xi$  – неизвестный параметр, принадлежащий известному множеству  $\Xi$ ;  $B(x, \xi) = B_0(1 + \beta(x, \xi))$ ;  $B_0$  – постоянный вектор порядка  $n$ ,  $B_0 = [0, 0, \dots, 1]^T$ ;  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – произвольные соответственно векторная и скалярная функции;  $0 < \beta(x) < \beta_0$ ,  $\beta_0 = const > 0$ ;  $y(t) \in R$  – выход объекта;  $L$  – постоянный вектор порядка  $n$ ,  $L^T = [1, 0, \dots, 0]$ ;  $D = B_0 d^T$ ;  $d$  – постоянный вектор порядка  $n$ ;  $\psi(x, t)$  – скалярная функция (локально липшицева по  $x$  равномерно по  $t$ ), описывающая внутренние и внешние возмущения и удовлетворяющая ограничению  $|\psi(t)| \leq \psi_0$ ;  $\psi_0 = const > 0$  – может быть большим.

Пусть в уравнении (2) векторная функция  $\alpha(x)$  отвечает условиям

$$\alpha^T(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)), \quad |\alpha_i(x)| \leq \alpha_{0i}^2 = const, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

тогда синтез робастной системы управления, следуя методике, изложенной в работе [9], можно осуществить с единых позиций.

Зададим желаемую динамику  $OY$  (2) с помощью эталонной модели ( $ЭМ$ ):

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A_m \cdot x_m(t) + B_m \cdot r(t), \quad y_m(t) = L^T x_m(t), \quad (4)$$

где  $A_m$  – гурвицева матрица порядка  $n \times n$ ;  $B_m = B_0 a_0$ ,  $a_0 = const > 0$ ;  $r(t) \in R$  – кусочно-непрерывная, ограниченная функция задающего воздействия;  $y_m(t) \in R$  – выход эталона.

Передаточная функция  $ЭМ$  (4) имеет вид

$$W_{ЭМ}(s) = L^T (sE - A_m)^{-1} B_m = \frac{a_0}{a_m(s)}, \quad (5)$$

где  $a_m(s)$  – гурвицев полином,  $deg(a_m(s)) = n$ ,  $a_m(s) = s^n + a_{m1}s^{n-1} + a_{m2}s^{n-2} + a_{mn}$ .

Полагая, что для  $OY$  (2) и  $ЭМ$  (4) выполнено условие структурного согласования:

$$A = A_m + B_0 c_0^T, \quad (6)$$

где  $c_0$  – соответствующий вектор с постоянными коэффициентами, зададим закон управления следующим образом:

$$u(t) = u(x(t), y_m(t), r(t)). \quad (7)$$

*Основная задача управления.* Требуется в системе (1), (4), (7) или (2), (4), (7) определить явный вид закона управления (7) таким образом, чтобы при любых возмущениях  $\psi(t)$ , произвольном наборе неизвестных параметров  $\xi \in \Xi$  и начальных условиях обеспечивалось выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t)| \leq \sigma, \quad \sigma = const > 0. \quad (8)$$

Однако поскольку в  $OY$  (2) прямому измерению доступен только скалярный выход  $y(t)$ , а не вектор переменных состояния, технически реализовать робастный закон управления (7) невозможно. Поэтому с целью построения реального закона управления прежде рассмотрим решение вспомогательной задачи.

### Вспомогательная задача

С целью построения работоспособной системы робастного управления, опираясь на метод синтеза, предложенный в работе [10], включим в основной контур управления (на выход  $OY$ ) фильтр-корректор ( $\Phi K$ ).

Математическое описание  $\Phi K$ , сформированного в виде быстродействующего звена, опишем следующим образом:

$$\frac{dx_F}{dt} = A_F \cdot x_F + B_0 \cdot y(t), \quad z(t) = g^T x_F(t), \quad x_F(0) = 0, \quad (9)$$

где  $x_F \in R^n$  – переменные состояния;  $z(t) \in R$  – выход  $\Phi K$  или основного контура управления.

Уравнениям (9) соответствует передаточная функция

$$W_F(s) = g^T (sE - A_F)^{-1} B_0 = \frac{g(s)}{(Ts + 1)^n}, \quad (10)$$

где  $g(s)$  – известный гурвицев полином,  $g(s) = g_n s^{n-1} + g_{n-1} s^{n-2} + \dots + g_1$ ,  $g_1 = 1$ ;  $T$  – малая постоянная времени, значение которой должно удовлетворять некоторым условиям. Отметим, следуя [11], что для обеспечения требований критерия гиперустойчивости коэффициенты полинома  $g(s)$  выбраны таким образом, чтобы его корни совпадали с  $(n - 1)$  корнями характеристического уравнения  $ЭМ$   $a_m(s) = 0$ .

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение (рис. 1) обобщенный объект управления ( $ООУ$ ), состоящий из последовательно соединенных  $OY$  (2) и  $\Phi K$  (9).

При этом, подобно [11, 12], во-первых, осуществим эквивалентное преобразование математического описания  $ООУ$ , представляя его в виде (рис. 2) видоизмененного обобщенного объекта управления ( $ВООУ$ ) с блоком структурного возмущения ( $БСВ$ ), во-вторых, выполним упрощение преобразованной системы, исключив из рассмотрения  $БСВ$  (рис. 3).

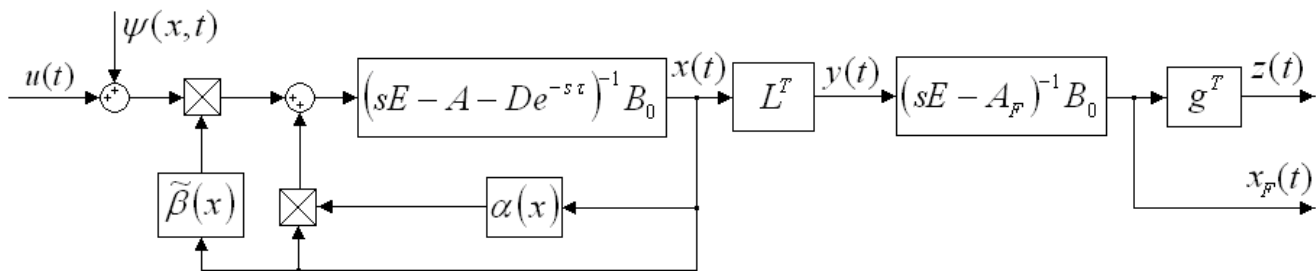


Рис. 1. Исходная схема ООУ.

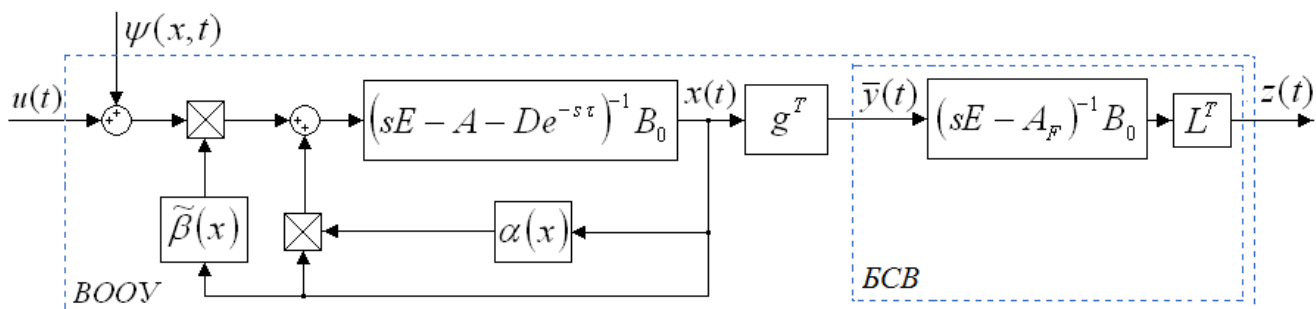


Рис. 2. Эквивалентная схема ООУ.

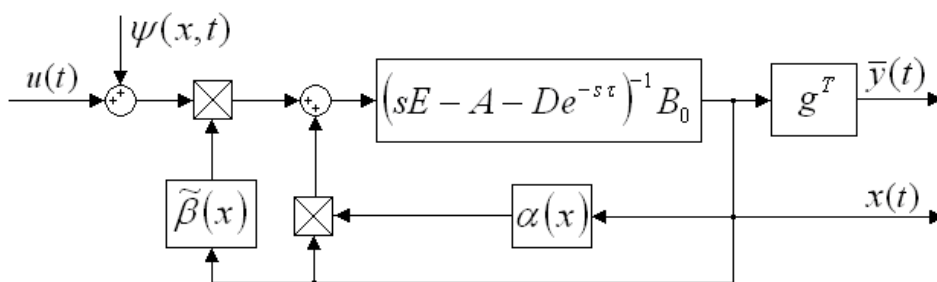


Рис. 3. Упрощенная схема ООУ.

Теперь, следуя [10, 11], для упрощенного ООУ можно построить систему управления с робастным регулятором и определить условия работоспособности систем робастного управления как для BOOU, так и для ООУ.

Учитывая, что для исходного ООУ математическое описание имеет вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_{OOY} X(t) + D_{OOY} X(t - \tau) + B_{OOY} \tilde{\alpha}^T(x) X(t) \quad (11)$$

$$+ B_{OOY} \tilde{\beta}(x) u(t) + B_{OOY} \tilde{\beta}(x) \psi(x, t), \quad z(t) = L_{OOY}^T X(t),$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x^T(t) & x_F^T(t) \end{pmatrix}^T, \quad A_{OOY} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \tilde{A} & A_F \end{pmatrix}, \quad D_{OOY} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{OOY} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{OOY}^T = \begin{pmatrix} 0 & g^T \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ L^T \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ d^T \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}^T(x) = \begin{pmatrix} \alpha^T(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta}(x) = 1 + \beta(x),$$

для упрощенного ООУ можно получить следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + B_0 \vartheta(t), \quad \bar{y}(t) = g^T x(t), \\ \vartheta(t) = \alpha^T(x)x + d^T x(t - \tau) + (1 + \beta(x))(u(t) + \psi(x, t)), \end{cases} \quad (12)$$

а его желаемую динамику описать соотношениями:

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = A_m \cdot x_m(t) + B_m \cdot r(t), \quad \bar{y}_m(t) = g^T x_m(t). \quad (13)$$

*Вспомогательная задача управления.* Требуется для системы (7), (12), (13), при любых начальных условиях, ограниченных возмущениях  $\psi(t)$  и заданном уровне априорной неопределенности  $\Xi$ , синтезировать явный вид закона управления  $u(t)$  таким образом, чтобы было выполнено предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{y}_m(t) - \bar{y}(t)| \leq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \text{const} > 0. \quad (14)$$

Для решения такой задачи, аналогично [11, 12], выполним следующее:

синтезируем робастный закон управления, обеспечивая выполнение требований критерия гиперустойчивости для упрощенной системы управления (11), (12), считая (см. схемы *ООУ* на рис. 1 – 3), что в ней измерению доступны все переменные вектора состояния  $x(t)$ ;

введем в синтезированную систему *БСВ* и обеспечим видоизмененной системе управления за счет выбора величины постоянной времени  $T$  свойство *L*-диссипативности. При этом диссипативной окажется и эквивалентная ей исходная система (2), (4), (7), (9);

заменяем в робастном законе управления вектор  $x(t)$  на  $x_F(t)$ , т.е. получим работоспособный закон управления.

### Решение вспомогательной задачи робастного управления

Вводя в рассмотрение сигнал рассогласования  $e(t) = x_m(t) - x(t)$ , эквивалентное математическое описание системы (12), (13) можно получить в виде

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = A_m e(t) + B_0 \mu(t), \quad v(t) = \bar{y}_m(t) - \bar{y}(t) = g^T e(t), \\ \mu(t) = a_0 r(t) - (c_0 + \alpha(x))^T x(t) d^T x(t - \tau) - (1 + \beta(x))(u(t) + \psi(x, t)). \end{cases} \quad (15)$$

При этом в ходе осуществления типовых этапов синтеза, в рамках применения критерия гиперустойчивости [8 – 10], явный вид робастного закона управления (7) можно синтезировать следующим образом:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n h_{1i} \cdot x_i^2(t) \cdot v(t) + \sum_{i=1}^n h_{2i} \cdot x_i^2(t - \tau) \cdot v(t) + h_3 \cdot r^2(t) \cdot v(t) + h_4 \cdot v(t), \quad (16)$$

где  $h_{1i}, h_{2i}, h_3, h_4 = \text{const} > 0$ .

Итак, для упрощенной системы (12), (13), (16) явный вид робастного закона управления получен – вспомогательная задача решена.

### Решение основной задачи робастного управления

Введение *БСВ* в систему (12), (13), (16) позволяет ее передаточную функцию записать в виде

$$W(s) = \frac{g(s)}{(Ts + 1)^n a_m(s) - g(s)}. \quad (17)$$

Поскольку характеристическое уравнение передаточной функции (17) аналогично уравнению (40) работы [11], для  $\Phi K$  (9) значение параметра  $T$  следует

задавать из условия:  $0 < T < T^*$ , где величина  $T^*$  – меньшее из значений, удовлетворяющих неравенствам:

$$T_1^* \leq \frac{0.93}{(n-1)a_{m1}}, T_2^* \leq \frac{0.465 \cdot a_{m1}}{na_{m2}}. \quad (18)$$

При этом, следуя [11], система (12), (13), (16), с учетом введенного в нее БСВ, и исходная система (2), (4), (9), (16) окажутся  $L$ -диссипативными.

Заменяя в законе управления системы (2), (4), (9), (19) недоступные измерению переменные состояния на их оценки – переменные состояния ФК (9), получаем технически реализуемый робастный регулятор:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n h_{1i} \cdot x_{Fi}^2(t) \cdot v(t) + \sum_{i=1}^n h_{2i} \cdot x_{Fi}^2(t - \tau) \cdot v(t) + h_3 \cdot r^2(t) \cdot v(t) + h_4 \cdot v(t), \quad (19)$$

где  $h_{1i}, h_{2i}, h_3, h_4 = const > 0$ .

С целью оценки качества управления в полученной системе и уточнения значений выбираемых параметров проведем вычислительный эксперимент – выполним имитационное моделирование системы управления (2), (4), (9), (19).

### Пример

Для иллюстрации работоспособности и качества функционирования предлагаемой робастной системы управления проведем вычислительный эксперимент – выполним имитационное моделирование системы управления (2), (4), (9), (19), в ходе которого определим значения параметров полученного закона регулирования (19).

Пусть для ОУ (2) имеют место следующие соотношения:

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, D(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\alpha^T(x, \xi) = (\alpha_1 \arctg(x_2) \quad \alpha_2 \sin(x_1 x_3) \quad \alpha_3 \sin^2(x_1)),$$

$$B(x) = B_0 (b_1 \arctg(x_1) + b_2) (b_3 \sin(x_1) + b_4) (b_5 \sin^2(x_2) + b_6) = B_0 (1 + \beta(x));$$

$$\tau = 2 \text{ сек.}$$

Уровень априорной параметрической неопределенности нелинейного объекта (20) задан следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} 0 < a_1 \leq 1, \quad 1 \leq a_2 \leq 3, \quad 0 \leq a_3 \leq 2, \quad 0.5 \leq \alpha_1 \leq 3, \quad 1 \leq \alpha_2 \leq 2, \\ 0.5 \leq \alpha_3 \leq 1.5, \quad -1.5 \leq d_1 \leq 0, \quad -4 \leq d_2 \leq -2, \quad -3 \leq d_3 \leq -1, \\ 0 \leq b_1 \leq 3, \quad 1 \leq b_2 \leq 3, \quad 0 \leq b_3 \leq 1, \quad 1 \leq b_4 \leq 2, \quad 0 \leq b_5 \leq 1, \quad 1 \leq b_6 \leq 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Функция внешних и внутренних возмущений в удовлетворяют условиям:

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^3 \psi_i(x_i) + \phi(t), \quad \psi_i(x_i) = x_i^3;$$

$$\text{если } |x_i^3| < \tilde{\psi}_i, \text{ то } \psi_i(x_i) = \tilde{\psi}_i \text{sign}(x_i^3);$$

$$\text{если } |x_i^3| \geq \tilde{\psi}_i, \text{ то } \tilde{\psi}_i \in [1, 50], \quad \phi(t) = 0.2 \sin(0.5t).$$

Параметры эталонной модели (4):

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Числитель передаточной функции фильтр-корректора (9), с учетом собственных значений матрицы  $A_m$  (22), задан в виде полинома  $g(s) = 6s^2 + 5s + 1$ .

Параметр  $T$  (удовлетворяющий соотношениям (18)) был выбран в ходе имитационного моделирования со значением 0.0001, что обеспечило получение достаточно малой зоны диссипативности,

На рис. 4 – 6 показаны результаты имитационного моделирования системы (2), (4), (9), (19) – (22). Представлен случай, когда значения априорно неопределенных параметров были выбраны произвольным образом из условий (21):

$$a_1 = 0.7, a_2 = 3, a_3 = 1, \alpha_1 = 0.64, \alpha_2 = 1.5, \alpha_3 = 1, d_1 = -0.8, d_2 = -3, \\ d_3 = -2, b_1 = 3, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = 2, b_5 = 1, b_6 = 1, \tilde{\psi}_i = 20.$$

На рис. 4 приведена динамика выходов  $OY$  (2), (20) и ЭМ (4), (22).

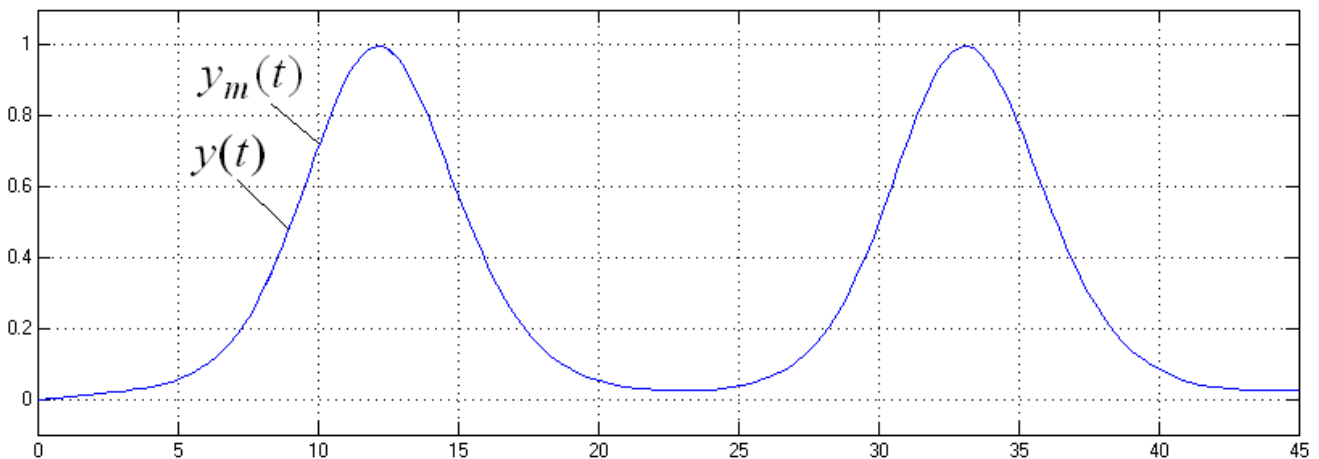


Рис. 4. Выходы  $OY$  и ЭМ.

На рис. 5 представлен график изменения сигнала рассогласования между выходами  $OY$  (2), (20) и эталона ЭМ (4), (22).

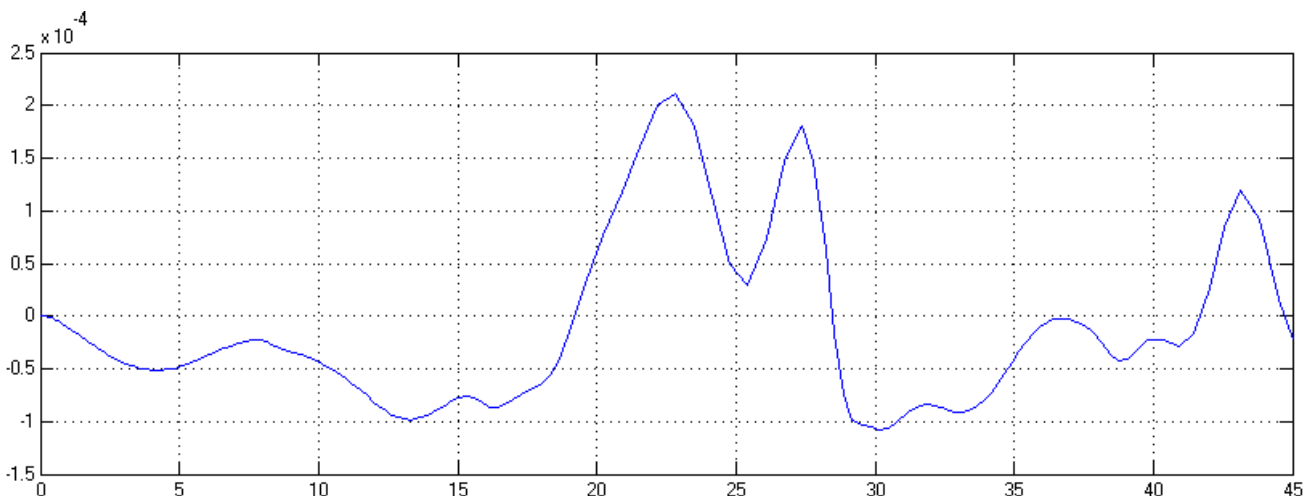


Рис. 5. Динамика ошибки регулирования  $y(t) - y_m(t)$ .

Характер изменения управляющего сигнала от робастного регулятора (19) показан на рис. 6.

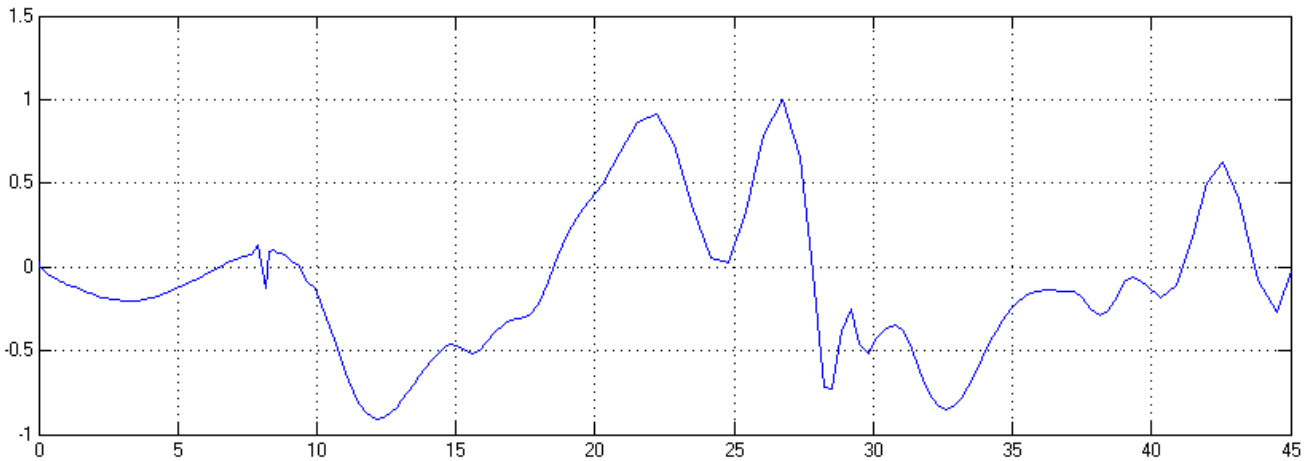


Рис. 6. Управление  $u(t)$ .

Представленные графики позволяют сделать вывод – синтезированная робастная система (2), (4), (19) – (22) обладает достаточно высоким качеством функционирования.

Кроме того, вычислительный эксперимент показал, что оценки переменных состояния  $x_F(t)$ , полученные с помощью  $\Phi K$ , практически не отличаются от недоступных измерению переменных состояния  $x(t)$ . В частности, при имитационном моделировании (специально для сравнения) были дополнительно выделены переменные состояния  $x(t)$ . На рис. 7 представлены невязки процесса фильтрации переменных состояния объекта.

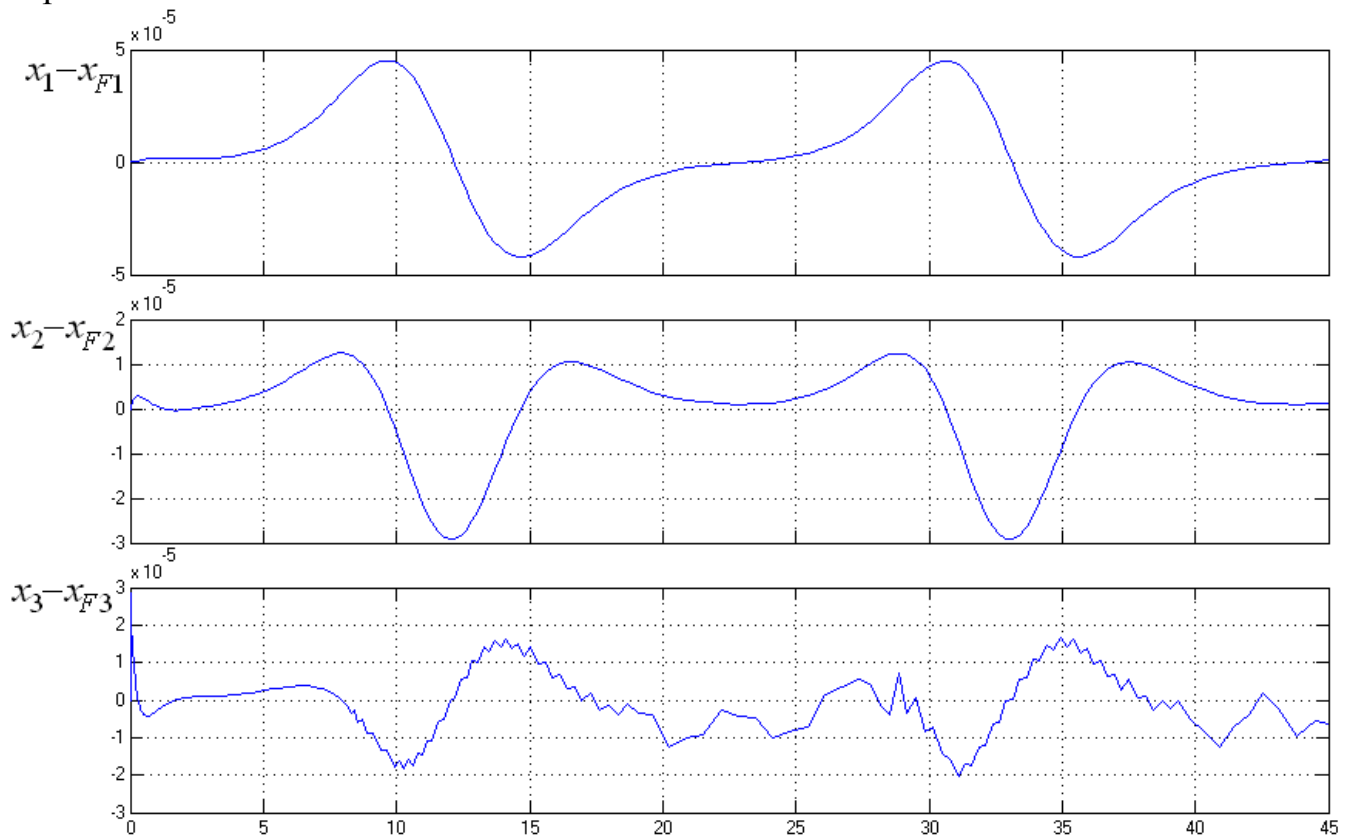


Рис. 7. Невязки фильтрации.



## Заключение

В работе изложен метод синтеза робастного закона управления нелинейным объектом управления с запаздыванием по состоянию, функционирующим в условиях априорной неопределенности, под влиянием внешних помех и внутренних параметрических возмущений, в условиях, когда измерению доступен только выход  $OУ$ .

Для решения проблемы недоступности переменных состояния в систему вводится  $ФК$  (9), переменные состояния которого используются в синтезированном робастном регуляторе (19) как оценки состояния объекта. Результаты имитационного моделирования показывают, что предлагаемый алгоритм управления обеспечивает в следящей системе управления высокую точность (ошибка между выходами  $OУ$  и  $ЭМ$  не превышает 0.02%).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Khalil H.J.* Nonlinear systems. – N.-J.: Prentice Hall, 1996.
2. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
3. *Isidori A.* Nonlinear control systems. – N.-Y.: Springer, 1995.
4. *Елкин В.И.* О редукции нелинейных управляемых систем к линейным // *АиТ.* – 2000. – №2. – С.45-55.
5. *Краснова С.А.* Каскадный синтез наблюдателя состояния для нелинейных систем при наличии внешних возмущений // *АиТ.* – 2003. – №1. – С.3-26.
6. *Бобцов А.А., Наговицина А.Г.* Адаптивное управление по выходу линейными нестационарными объектами // *АиТ.* – 2006. – №12. – С.163-74.
7. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально не определенного нелинейного объекта // *АиТ.* – 2011. – №1. – С.121-129.
8. *Еремин Е.Л.* Нелинейные преобразования алгоритмов прямого адаптивного управления непрерывными объектами: Автореф. дис... д-ра техн. наук / Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. – Владивосток, 1994.
9. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Робастное управление нелинейной системой с фильтр-корректором // *Информатика и системы управления.* – 2014. – №1(14). – С.115-126.
10. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Алгоритмы робастного нелинейного управления нестационарными скалярными объектами // *Информатика и системы управления.* – 2007. – №1(13). – С.149-160.
11. *Еремин Е.Л.*  $L$ -диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. III // *Информатика и системы управления.* – 2007. – № 2(14). – С.153-164.
12. *Еремин Е.Л.*  $L$ -диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. IV // *Информатика и системы управления.* – 2013. – №2(36). – С. 100-106.

*E-mail:*

*Еремин Евгений Леонидович – ereminel@mail.ru;*

*Чепак Лариса Владимировна – chepak@inbox.ru.*