



УДК 62-50

© 2014 г. А.А. Рогоза

(Калужский филиал Московского государственного технического университета
им. Н.Э. Баумана)

ПРОЕКЦИОННО-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассматривается задача обеспечения желаемой динамики линейных систем в условиях интервальной неопределенности. Для поставленной задачи получен алгоритм синтеза робастного регулятора, обеспечивающего заданное качество функционирования всему семейству систем, порожденных входящей в математическую модель интервальной неопределенностью.

Ключевые слова: линейные системы, матричные операторы, интервальная неопределенность, робастное управление.

Введение

Современные системы управления проектируются с учетом возможной неопределенности либо порожденной отличием математической модели объекта, построенной на основе теории или в результате идентификации, от реальной технической системы, либо недостаточностью априорной информации о классе внешних возмущений, действующих на объект.

В настоящей работе предлагается один из возможных подходов синтеза регуляторов робастных по отношению к параметрическим неопределенностям, основанный на представлении сигналов в виде разложений по заданному ортонормированному базису некоторого банахова пространства B и описании системы с помощью матричных операторов. Данный подход позволяет решить задачу синтеза замкнутой системы методами математического программирования.

Постановка задачи синтеза

Рассмотрим задачу синтеза робастного регулятора для линейных систем с интервальной неопределенностью.

Положим, что уравнение неизменяемой части (как известно, неизменяемой частью системы называют передаточную функцию объекта управления, сюда же входят: передаточная функция исполнительных элементов, усилительных устройств, измерительных систем и т.д.) системы с интервальной неопределенно-

стью можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^n a_k^i x^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^m b_l^j u^{(l)}(t), \quad (1)$$

где коэффициенты исходной модели (1) являются постоянными и представлены в виде

$$a_k^i = \bar{a}_k + \Delta a_i, \quad b_l^j = \bar{b}_l + \Delta b_j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

\bar{a}_k и \bar{b}_l – номинальные значения коэффициентов, а Δa_i и Δb_j – возможные отклонения от этих значений или интервальная неопределенность.

Система, включающая в себя корректирующее устройство (КУ-регулятор) и объект управления (ОУ), представлена на рис. 1.

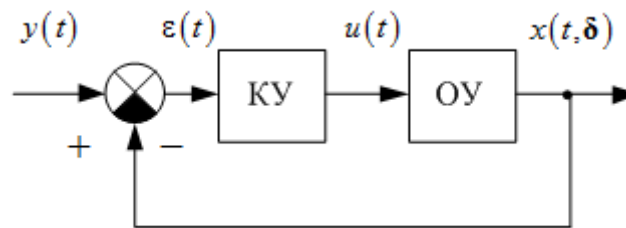


Рис. 1. Структурная схема линейной САУ с КУ.

Положим, что известен дифференциальный закон распределения $f_Q(\delta)$ и в соответствии с ним случайным образом выбираются параметры $\delta^i \in \Delta\delta$, где $\Delta\delta = \{\delta \in R^N : \delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}\}$ – множество неопределенности параметров δ^i ; $\delta_{\min}, \delta_{\max}$ – границы множества $\Delta\delta$. Таким образом можно рассмотреть семейство N систем, представленных на рис. 2.

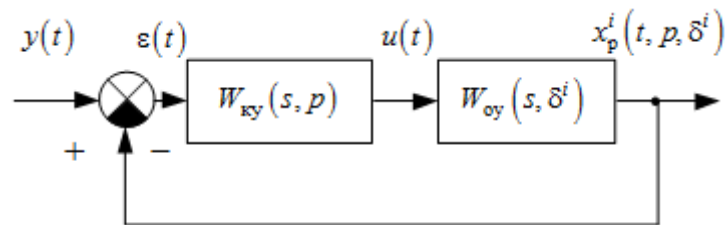


Рис. 2. Семейство N систем, порожденных выборкой $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^N$.

Понятие робастности подразумевает наличие регулятора с передаточной функцией $W_{ку}(s, p)$, семейства объектов, желаемой динамики системы.

Из вышесказанного следует основное положение, рассматриваемое в работе: спроектированная система должна быть работоспособна при оговоренных пределах изменения тех или иных параметров, т.е. должно быть обеспечено робастное качество функционирования системы.

Целевая функция, подлежащая минимизации, имеет вид:

$$J(p) = \sum_{k=10}^N \int (x_s(t) - x_p(t, p, \delta^k))^2 \rightarrow \min_p, \quad (3)$$

где $x_s(t)$ – желаемая динамика ОУ; p – вектор настраиваемых параметров регулятора; $x_p(t, p, \delta^k)$ – реальный выходной сигнал системы.

Алгоритм синтеза робастных регуляторов с интервальной неопределенностью

В основе предлагаемого метода лежит применение проекционных моделей, являющихся результатом конечномерной аппроксимации непрерывных математических моделей, выполняемой с использованием ортогональных разложений. Преимущество такой аппроксимации состоит в возможности представления решения дифференциального уравнения исходной модели в операторной форме, что позволяет находить методы решения задач теории управления, отличающиеся простотой и эффективностью. Кроме того, форма представления операторов в виде числовых матриц дает возможность строить эффективные вычислительные алгоритмы, ориентированные на применение ЭВМ.

Рассмотрим проекционную аппроксимацию модели (1), учитывающую случайный разброс коэффициентов исходного уравнения в диапазоне, определяемом

$$\min_k \Delta a_i^k \leq \Delta a_i \leq \max_k \Delta a_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$\min_l \Delta b_l^j \leq \Delta b_j \leq \max_l \Delta b_l^j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Проинтегрируем выражение (1) n раз с учетом (2):

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k \underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} x^{(i)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n}_{n \text{ раз}} = \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m b_j^r \underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} u^{(j)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n}_{n \text{ раз}}. \quad (6)$$

Поскольку справедлива зависимость

$$\underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} x^{(i)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} x(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-i}}_{n-i \text{ раз}}, \quad (7)$$

то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k \underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} x(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-i}}_{(n-i) \text{ раз}} = \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m b_j^r \underbrace{\int \dots \int_0^t \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-j}}_{(n-j) \text{ раз}}. \quad (8)$$

Пусть $B[0, T]$ – некоторое банахово пространство функций с базисом заданных на отрезке $[0, T]$; $\Phi(t) = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{p-1}]^T$ – столбец из p базисных функций в пространстве $B[0, T]$. Будем считать B произвольным банаховым пространством, удовлетворяющим естественному требованию: если $y(t) \in B[0, T]$, то более гладкая функция

$$x_p(t) = 0 \int_0^t y_p(\tau) d\tau = \int_0^T 1(t-\tau) y_p(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $K(t, \tau) = 1(t-\tau)$ – функция Хэвисайда: $K(t, \tau) = 1, t \geq \tau, K(t, \tau) = 0, t < \tau$ также лежит в пространстве $B[0, T]$. Если функция $y(t) \in B[0, T]$, то ее можно аппроксимировать с помощью разложения

$$y_p(t) \approx \sum_{s=0}^{p-1} c_s^y \varphi_s(t) = \Phi^T(t) C^y, \quad (10)$$

где $C^y = [c_0^y \ c_1^y \ \dots \ c_{p-1}^y]^T$ – столбец из коэффициентов разложения, определяемый в виде

$$c_s^y = \int_0^T y_p(t) \varphi_s(t) dt, \quad s = \overline{0, p-1}, \quad (11)$$

– коэффициенты Фурье разложения по данному базису. В дальнейшем будем использовать конечномерные разложения сигнала $y_p(t)$ по ортонормированному базису $\{\varphi_s(t)\}_{s=0}^p$ конечномерного подпространства $B^p[0, T] \subset B[0, T]$. Напомним, что из того, что $\Phi(t)$ – базис, вытекает сходимость разложений $y_p(t)$ к $y(t)$ в метрике пространства $B^p[0, T] \subset B[0, T]$. Для интегрирования функций по разложению (10) требуется находить разложения функций (11), поскольку интегральная форма описания (9) позволяет воспользоваться аппаратом матричного представления интегральных ограниченных операторов в ортогональных базисах, т.е. ввести проекционную форму описания системы относительно ортогонального базиса $\Phi(t)$. Для этого надо заменить в уравнении (9) непрерывные вектор-функции на столбцы из коэффициентов их разложений, а операторы, действующие в пространстве непрерывных вектор-функций, на соответствующие им матричные операторы. В этом случае для выражения (9) справедливы равенства

$$x_p(t) = \Phi^T(t) C^x; \quad y_p(t) = \Phi^T(t) C^y; \quad K(t, \tau) = \Phi^T(t) A_u \Phi(\tau), \quad (12)$$

где A_u – матрица размера $p \times p$, элементы которой

$$a_{sz} = \int_0^t \int_0^t K(t, \tau) \varphi_z(\tau) dt d\tau, \quad s, z = \overline{0, \dots, p-1}. \quad (13)$$

Тогда, подставляя (12), (13) в (9), получим:

$$C^x = [\Phi^T(t)]^{-1} \Phi^T(t) A_u \left(\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \right) C^y = A_u C^y. \quad (14)$$

Из последнего следует

$$C^y = A_u C^x. \quad (15)$$

Представим функции $x(t)$ и $u(t)$ в виде разложений по ортогональному базису $\Phi(t)$ в соответствии с (11):

$$x(t) = \Phi^T(t) C^x; \quad u(t) = \Phi^T(t) C^u, \quad (16)$$

где C^u и C^x – спектральные характеристики выхода $x(t)$ и входа $u(t)$. В соответствии с этим представлением уравнение (8) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} a_k^i \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) C^{x_i} d\tau_1 \dots d\tau_{n-i}}_{(n-k) \text{ раз}} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^m b_l^j \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) C^u d\tau_1 \dots d\tau_{n-l}}_{(n-l) \text{ раз}}, \quad (17)$$

или

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=0}^n a_k^i \underbrace{\int_0^t \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{n-k}}}_{(n-k) \text{ раз}} \right) C^{x_i} = \left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^m b_l^j \underbrace{\int_0^t \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{n-l}}}_{(n-l) \text{ раз}} \Phi^T(\tau_1) C^u d\tau_1 \dots d\tau_{n-l} \right) C^u. \quad (18)$$

С учетом (15), имеем

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_r}}_{l \text{ раз}} \Phi(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_r = \left(\underbrace{A_u \cdot A_u \dots A_u}_l \right) \Phi(t) = A_u^l \Phi(t), \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=0}^n (\bar{a}_i + \Delta a_i^k) \Phi^T(t) A_u^l C^{x_i} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^m (\bar{b}_j + \Delta b_j^l) \Phi^T(t) A_u^l C^u. \quad (20)$$

В силу линейной независимости базисных функций $\Phi(t)$ система (20) равносильна системе уравнений

$$\sum_{k=0}^n \bar{a}_k A_u^k C^{x_i} + \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N \Delta a_i^k A_u^k C^{x_i} = \sum_{j=0}^m \bar{b}_j A_u^j C^u + \sum_{l=0}^m \sum_{j=1}^N \Delta b_j^l A_u^l C^u, \quad (21)$$

которую можно переписать в виде уравнения с матричными операторами общего вида для ДУ (1)

$$\left(A_{oy}^x(\delta_{ном}) + A_{oy}^x(\Delta\delta) \right) C^{x_k} = \left(A_{oy}^u(\delta_{ном}) + A_{oy}^u(\Delta\delta) \right) C^u, \quad (22)$$

где $\Delta\delta$ характеризует неопределенность, т.е. факт отклонения от номинального значения $\delta_{ном}$ параметров объекта управления, а матрицы $A_{oy}^x(\delta_{ном})$, $A_{oy}^x(\Delta\delta)$, $A_{oy}^u(\delta_{ном})$, $A_{oy}^u(\Delta\delta)$ имеют вид:

$$A_{oy}^x(\delta_{ном}) = \sum_{k=0}^n \bar{a} A_u^{n-k}; \quad A_{oy}^x(\Delta\delta) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^n \Delta a_i^k A_u^{n-k}; \quad (23)$$

$$A_{oy}^u(\delta_{ном}) = \sum_{l=0}^m \bar{b}_l A_u^{n-1}; \quad A_{oy}^u(\Delta\delta) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^m \Delta b_j^l A_u^{n-1}. \quad (24)$$

Далее воспользуемся методом Монте-Карло, в соответствии с которым генерируется выборка $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^N$ из N независимых случайных величин δ , входящих в коэффициенты (23) и (24) модели (22), тогда последнее можно переписать в виде системы матричных уравнений

$$\begin{cases} A_{oy}^x(\delta^1) C^{x_1} = [A_{oy}^u(\delta^1) + \dots + A_{oy}^u(\delta^N)] C^u, \\ \dots \\ A_{oy}^x(\delta^N) C^{x_N} = [A_{oy}^u(\delta^1) + A_{oy}^u(\delta^2) + \dots + A_{oy}^u(\delta^{N-1}) + A_{oy}^u(\delta^N)] C^u, \end{cases} \quad (25)$$

или в сокращенной форме

$$A_{oy}^x(\delta^k) C^{x_k} = \sum_{r=1}^N A_{oy}^u(\delta^r) C^u, \quad k = 1, \dots, N. \quad (26)$$

Откуда получим

$$C^{x_k} = \left(\left(A_{oy}^x(\delta^k) \right)^{-1} \sum_{r=1}^N A_{oy}^u(\delta^r) \right) C^u = \sum_{r=1}^N A_{oy}^{kr} C^u, \quad k = 1, \dots, N, \quad (27)$$

где A_{oy}^{kr} определяется из следующих соображений, при $k = 1$:

$$A_{oy}^{1N} = [A_{oy}^x(\delta^1)]^{-1} [A_{oy}^u(\delta^1) + A_{oy}^u(\delta^2) + \dots + A_{oy}^u(\delta^{N-1}) + A(\delta^N)],$$

при $k = N$:

$$A_{oy}^{NN} = [A_{oy}^x(\delta^N)]^{-1} [A_{oy}^u(\delta^1) + A_{oy}^u(\delta^2) + \dots + A_{oy}^u(\delta^{N-1}) + A(\delta^N)],$$

из последнего следует:

$$A_{oy}^{kN} \Big|_{k=1}^N = A_{oy}^{1N} + A_{oy}^{2N} + \dots + A_{oy}^{(N-1)N} + A_{oy}^{NN}. \quad (28)$$

Из (28) следует вывод: имеется $N \times N$ матричных операторов объекта управления $A_{oy}(\delta^1), A_{oy}(\delta^2), \dots, A_{oy}(\delta^N)$, где оператор $A_{oy}(\delta^k)$ является возмущенным. Таким образом, (22) представляет собой матричную форму описания модели (1) в форме выражений, связывающих спектральные характеристики выходного и входного сигналов через матричный оператор системы (28).

Положим, что уравнение КУ заданного порядка n_{ky}, m_{ky} можно записать следующим образом:

$$\sum_{l=1}^{n_{ky}} c_l u^{(l)}(t) = \sum_{p=0}^{m_{ky}} c_p \varepsilon^{(p)}(t), \quad (29)$$

где коэффициенты c_l и c_p настраиваемые.

Согласно (31), спектральная характеристика выходного сигнала определяется зависимостью

$$C^x(p, \delta^k) = \left(A_{oy}(\delta^k) A_{ky}(p) (I + A_{oy}(\delta^k) A_{ky}(p))^{-1} \right) C^y. \quad (30)$$

Таким образом, целевая функция, подлежащая минимизации, имеет вид:

$$I(p) = \sum_{k=1}^N \| C^x(p, \delta^k) - C^{h_3} \| \rightarrow \min_p. \quad (31)$$

Проблема минимизации целевой функции в условиях интервальной неопределенности

Аналитическое решение задачи синтеза сводится к решению семейства систем векторно-матричных уравнений, порожденной интервальной неопределенностью в модели (1). Функционал качества (31) не является выпуклым, что существенно осложняет решение задачи синтеза регулятора. Поэтому поиск решения последней проводится сведением ее к задаче субоптимизации, представляющей собой частный случай векторной оптимизации, в которой функционал качества является уже не просто выпуклым, но и квадратичным.

Задача вычисления настраиваемых параметров сводится к нахождению решения выпуклой оптимизационной задачи, для решения которой применяется метод наименьших квадратов (МНК).

В стандартной постановке решением задачи МНК является нахождение решения – вектора p операторного уравнения:

$$Ap = y, \quad (32)$$

такого, что квадрат евклидовой нормы невязки

$$I(p) = \|Ap - y\|^2 \quad (33)$$

систем линейных алгебраических уравнений (обычно переопределенных) принимает минимальное значение. Однако в рассматриваемом случае оператор A в (32) является возмущенным

$$I(p) = M \left\| (A + \Delta A)p - y \right\|^2,$$

где M – оператор эмпирического математического ожидания.

Выражение (30) весьма просто представить в операторной форме (33):

$$C^{x_i}(p) = A(\delta_i, p)C^y \rightarrow A(\delta)p = y, \quad (34)$$

где матрица $A(\delta)$ известна неточно. Эта неопределенность в данных может быть учтена, предполагая, что $A(\delta)$ – в общем случае нелинейные функции вектора неопределенных вещественных параметров $A(\delta) \in R^{m,n}$, $\delta = [\delta_1 \dots \delta_N]^T$, где предполагается, что неопределенный параметр принадлежит заданному ограниченному множеству $\theta \subset R^N$.

Важным является вопрос о размерности выборки N , свидетельствующей о степени робастности при разбросе значений относительно номинала. Справедлива теорема.

Теорема [6]. Пусть $\alpha, \varepsilon \in (0,1)$ и

$$N \geq \frac{128}{\varepsilon^2} \left[\ln \frac{8}{\alpha} + 9n \left(\ln \frac{32e}{\varepsilon} + \ln \ln \frac{32e}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (35)$$

Пусть p – доставляет минимум $I(p)$; \hat{p}_N – минимум эмпирического математического ожидания $\hat{I}(p) = M \left\| (A + \Delta A)p - y \right\|^2$. Тогда, если $\hat{p}_N \in X$, то с вероятностью не менее $(1 - \alpha)$ выполняется условие

$$\left(\hat{I}(\hat{p}_N) - I(p) \right) < \varepsilon V, \quad (36)$$

т.е. \hat{p}_N есть ε -субоптимальное решение с высокой вероятностью $(1 - \alpha)$.

Замечание. В данном случае только предполагается, что существует такая постоянная $V > 0$, что выражение (36) справедливо, но нет необходимости знать его численное значение.

Обратим внимание на то, что целевая функция $I(p)$ имеет вид квадратичной формы (43):

$$I(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\| A(\delta^k)p - y \right\|^2 = \frac{1}{N} \left\| \bar{A}p - y \right\|^2, \quad (37)$$

где

$$\bar{A} = \left[A(\delta^1) \quad A(\delta^2) \quad \dots \quad A(\delta^N) \right]^T. \quad (38)$$

Пусть матрица $A(\delta^1)$ полного ранга, тогда точное решение, доставляющее минимум эмпирическому среднему, итеративно вычисляется следующим образом:

$$\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k + K_{k+1}^{-1} A^T(\delta^{k+1}) \left(y - A(\delta^{k+1}) \hat{p}_k \right), \quad (39)$$

где

$$K_{k+1} = K_k + A^T (\delta^{k+1}) A (\delta^{k+1}). \quad (40)$$

Начальные условия для итерационного процесса (39) и (40) при $k = 1, \dots, N$ нулевые:

$$K_0 = 0, \hat{p}_0 = 0, k = 0. \quad (41)$$

Математическое моделирование на тестовом примере

Продемонстрируем применение изложенной методики. Система автоматического управления технологическим процессом имеет следующую передаточную функцию [3]:

$$W(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (42)$$

где $b_0 = 1,22 p_4$; $b_1 = 1,22 p_3$; $b_2 = 1,22 p_2$; $b_3 = 1,22 p_1$; $a_0 = 1,22 p_4$; $a_1 = 1,22 p_3$; $a_2 = 1 + 1,22 p_2$; $a_3 = 5 + 1,22 p_1$; $a_4 = 9$; $a_5 = 7,4$; $a_6 = 2,25$; p_1, p_2, p_3, p_4 – настраиваемые параметры регулятора.

Переходная характеристика скорректированной системы должна удовлетворять условиям: $T_y \leq (15 - 25) c$, $\sigma \leq 20\%$.

Выберем в качестве эталонной переходной характеристики реакцию апериодического звена на единичное входное воздействие:

$$x_y(t) = 1 - e^{(-1/3)t}, \quad y_y(t) = 1(t). \quad (43)$$

На $[0, T]$ вводятся сетка $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, l, h = 1/l$ и функции вида

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & t \in (t_{i-1}, t_i), \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 1, \dots, l-1, \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}), \end{cases} \quad (44)$$

которые применяются в качестве базисных. Вывод матричного оператора интегрирования A_u для функций (44) указан в *приложении*.

Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров регулятора p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$Ap \approx b, \quad (45)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1,22 A_u^3 C^{x_3} - 1,22 A_u^3 C^y \\ 1,22 A_u^4 C^{x_3} - 1,22 A_u^4 C^y \\ 1,22 A_u^5 C^{x_3} - 1,22 A_u^5 C^y \\ 1,22 A_u^6 C^{x_3} - 1,22 A_u^6 C^y \end{bmatrix}; \quad p = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4)^T; \quad (46)$$

$$b = -(2,25I + 7,4A_u + 9A_u^2 + 5A_u^3 + A_u^4) C^{x_3}, \quad (47)$$

где A – известная матрица; b – известный вектор; p – вектор настраиваемых параметров; C^{x_3} – сеточная характеристика эталонного сигнала (43).

Знак приближенного равенства в (45) объясняется тем, что на практике невозможно точно достичь соответствия эталонному процессу.

Расширим выражение (45) на случай, когда вектор b точно неизвестен, т.е. имеется неопределенность в случае отклонения коэффициентов a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 на $\pm 10\%$ от их номинальных значений. В таком случае справедливо следующее соотношение

$$Ap \approx b(\delta), \quad (48)$$

где вектор $b(\delta_i)$ (при i -м значении из выборки $\delta_i \in \delta, i = \overline{1, N}$; N – размерность выборки) имеет вид:

$$b(\delta_i) = -\left((2,25 + \delta_i)I + (7,4 + \delta_i)A_u + (9 + \delta_i)A_u^2 + (5 + \delta_i)A_u^3 + (1 + \delta_i)A_u^4\right)C^{x_3}.$$

В соответствии с теоремой можно определить необходимое число N элементов выборки, обеспечивающее попадание в ε -окрестность минимума целевой функции $I(p, \delta)$ с вероятностью $(1 - \alpha), \alpha, \varepsilon \in (0, 1)$.

В [7] отмечалось, что выражение (35) дает верхнюю оценку размерности выборки N и в общем случае является избыточной, поэтому ограничимся ее меньшим значением. Пусть $N = 500$. Число базисных функций 100. В результате реализации алгоритма получены следующие численные значения параметров регулятора:

$$p_1 = 3,445; p_2 = 1,251; p_3 = 0,272; p_4 = 0,001. \quad (49)$$

На рис. 3 изображены графики семейств переходных характеристик скорректированной системы.

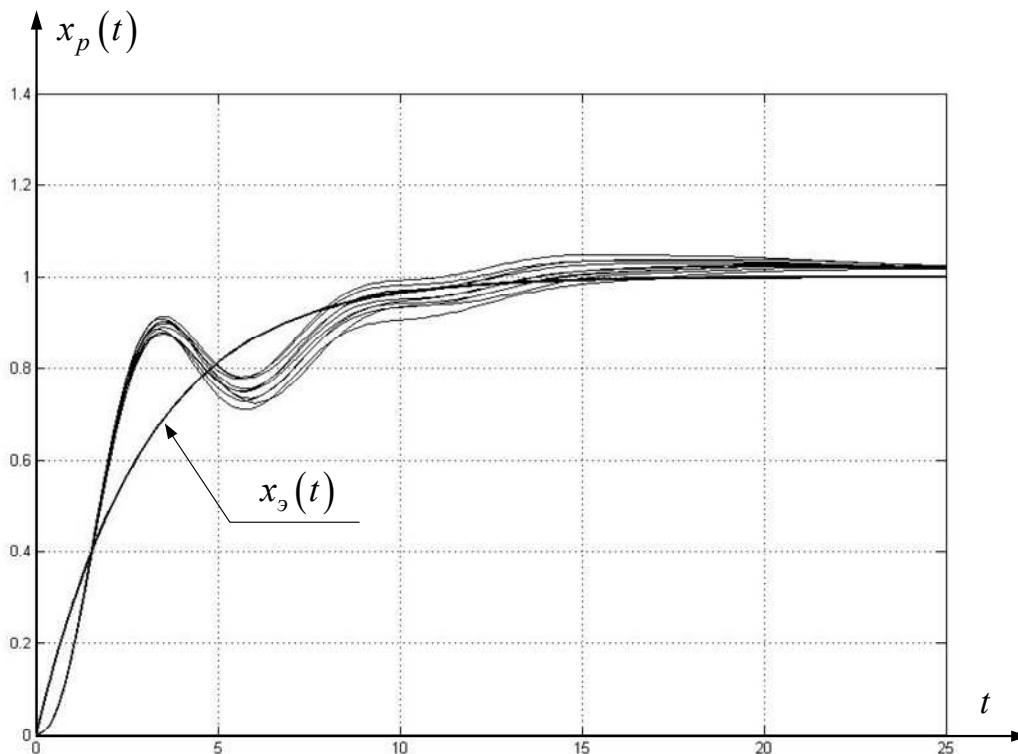


Рис. 3. Графики эталонной переходной характеристики и семейства скорректированных переходных характеристик системы.

Таким образом, все семейство переходных процессов САУ в условиях действия параметрической неопределенности удовлетворяет прямым показателям качества.

Заключение

Предложен прямой регулярный метод решения задачи синтеза регуляторов заданного порядка, в котором параметры регулятора вычисляются с помощью выпуклой оптимизации. Синтез регулятора сводится к решению совокупности линейных уравнений. Линейная система уравнений получается в результате аппроксимации исходной модели – в виде дифференциальных уравнений. Показана разрешимость указанной совокупности систем в рамках стандартных допущений задачи математического программирования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В (46), (47) входят матричные операторы интегрирования. Рассмотрим, как определяется матричный оператор интегрирования в базисе (44).

Масштабирующая функция для функций вида (44) может быть определена как решение уравнения: $\varphi(t) = \sqrt{h}(h_0\varphi(ht) + h_1\varphi(\sqrt{ht} - 1))$, $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{h}$, удовлетворяющая свойствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1; \varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \notin [0,1). \end{cases}$$

Рассмотрим матричный оператор интегрирования для масштабирующей функции с N уровнями разрешения, где $l = N$; $t_i = ih$; $h = 1/N$; $i = \overline{1, N}$; N – число узлов сетки.

Имеем $a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, \tau) \varphi_{N,i}(t) \varphi_{N,j}(\tau) dt d\tau$, или, используя свойство функций (44), на-

ходим, что $a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \varphi\left(\frac{\tau - i}{h}\right) \varphi\left(\frac{\tau - j}{h}\right) dt d\tau$. Положим $\begin{cases} u = ht - i, \\ v = h\tau - j, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = h^{-1}(u + i), \\ \tau = h^{-1}(v + j). \end{cases}$

В этом случае $a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1(u - v + i - j) \varphi(u) \varphi(v) du dv$, или, полагая $u = t$, $v = \tau$, получаем,

что $a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau + i - j) \varphi(\tau) dt d\tau$.

Разберем подробно все возможные случаи.

1. $i - j \leq -1$.

Функции $\varphi(t)$, $\varphi(\tau)$ неравны нулю только на отрезке $[0,1)$, тогда $t + i - j < 0, \forall \tau \in [0,1)$, и, следовательно, $1(t - \tau + i - j) = 0, \forall t \in [0,1), \forall \tau \in [0,1)$, откуда получаем, что

$$a_{ij} = 0. \tag{50}$$

2. $i - j \geq 1$, тогда $t - \tau + i - j \geq 0$, поэтому $a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{h}$.

3. $i = j$, в этом случае

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \varphi(\tau) dt d\tau. \tag{51}$$

Используя уравнение (49), получим

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^1 h_{k_1} \varphi(ht - k_1) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \sum_{k_2=0}^1 h_{k_2} \varphi(h\tau - k_2) dt d\tau = \\
&= \frac{1}{h} \sum_{k_1, k_2=0}^1 h_{k_1} h_{k_2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ht - k_1) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) h_{k_2} \varphi(h\tau - k_2) dt d\tau \right].
\end{aligned} \tag{52}$$

Выполним переход через промежуточные переменные:

$$\begin{cases} u = ht - k_1, \\ v = h\tau - k_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = h^{-1}(u + k_1), \\ \tau = h^{-1}(v + k_2), \end{cases}$$

в этом случае (52) примет вид

$$a_{ij} = N \sum_{k_1, k_2=0}^1 h_{k_1} h_{k_2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(u - v + i - j) \varphi(v) dt d\tau \right]. \tag{53}$$

Подставляя (50), (51) в (53), получим

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{2N} (hh_0^2 a + h_0 h_1 + hh_1^2 a), \\ a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{4N}, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2N}.$$

Матричный оператор интегрирования, в рассматриваемом базисе имеет вид

$$A_u = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин С.В., Егунов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
2. Лапин С.В. Оптимизация по емкости проекционных методов аппроксимации систем. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995.
3. Пупков К.А., Егунов Н.Д и др. Методы классической и современной ТАУ. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана. – Т.3, 2004.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Вероятностный подход к робастной устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1996. – №12. – С. 97-108.
5. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.
6. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Физ.-мат. лит., 1972.
7. Calafiore G., Dabbene F. Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty. Springer-Verlag London Limited, 2006.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.И. Сельвесюком.

E-mail:

Рогоза Александр Анатольевич – aemaeth_eternity@mail.ru.