

УДК 517.977

© 2014 г. Р.С. Бирюков

(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## ОБОБЩЕННЫЙ $H_\infty$ -ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ОБЪЕКТА ПО ДИСКРЕТНЫМ ПО ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯМ\*

Для линейных непрерывных нестационарных объектов, выход которых измеряется в фиксированные моменты времени, решается задача построения обобщенного  $H_\infty$ -оптимального фильтра, минимизирующего показатель совместного влияния начального и внешнего возмущений на ошибку фильтрации в наилучшем случае.

**Ключевые слова:** непрерывный объект, дискретный выход, дискретный фильтр,  $H_\infty$ -оптимальный фильтр, линейные матричные неравенства.

### Введение

В работе для линейного непрерывного объекта с неизвестным начальным состоянием и ограниченным внешним возмущением рассматривается задача синтеза обобщенного  $H_\infty$ -оптимального фильтра в форме наблюдателя, который бы наилучшим образом оценивал неизмеряемые переменные системы по ее измеряемому выходу. Под внешними возмущениями понимаются как возмущения, действующие на объект, так и ошибки, возникающие при измерениях. В качестве критерия, отражающего показатель качества фильтрации, выбирается уровень гашения возмущений системы, описывающей эволюцию вектора невязки. Указанная величина определяется как наибольшее отношение суммарной «энергии» ошибки оцениваемых переменных к суммарной «энергии» возмущений.

В случае, когда исходный объект и его измеряемый выход являются непрерывными, задача обобщенной  $H_\infty$ -оптимальной фильтрации рассматривалась в [1], где найденные решения были записаны в терминах дифференциальных матричных уравнений Риккати и представляли собой нестационарные фильтры. Стационарные фильтры были синтезированы в [2, 3] с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Для дискретного объекта аналогичные результаты были получены в [4].

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №~14-01-31120 мол\_а, №~14-01-00266) и в рамках выполнения НИР 3021 «Управление механическими системами в условиях неопределенности» с финансированием из средств Минобрнауки России, в рамках базовой части государственного задания на научные исследования.

На практике часто встречается ситуация, когда выход непрерывного объекта доступен для измерения лишь в фиксированные моменты времени. В этом случае простейшим подходом к решению возникающей задачи фильтрации являются дискретизация исходного непрерывного объекта и использование построенного в [4] дискретного фильтра. Однако указанный подход не позволяет получить адекватного решения, поскольку при дискретизации множество допустимых внешних возмущений сужается до множества кусочно-постоянных функций. В [5, 6] был предложен другой подход, использующий представление непрерывного объекта с дискретным измеряемым выходом как непрерывно-дискретного, при этом синтезированный непрерывный нестационарный фильтр был записан в терминах дифференциальных уравнений Риккати.

В настоящей работе рассматривается построение дискретного обобщенного  $H_\infty$ -оптимального фильтра для непрерывного объекта с дискретным измеряемым выходом на конечном интервале времени. Процедура синтеза фильтра основана на линейных матричных неравенствах, что с вычислительной точки зрения является более эффективным, чем дифференциальные уравнения Риккати. Проведенное численное моделирование показывает, что полученный оптимальный фильтр адекватно решает поставленную задачу.

Несколько слов о структуре работы. Вначале для линейного непрерывного объекта с дискретным измеряемым выходом рассматривается задача построения обобщенного  $H_\infty$ -фильтра на конечном интервале времени, а затем показывается, что вычисление параметров фильтра сводится к решению системы линейных матричных неравенств. Далее приводится пример, иллюстрирующий полученные результаты, доказательство которых завершает статью.

### Синтез обобщенного $H_\infty$ -оптимального фильтра

Рассмотрим линейный нестационарный объект

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x(0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_N < +\infty, \quad (1)$$

где  $x \in R^{n_x}$  и  $v \in R^{n_v}$  – соответственно состояние и непрерывное внешнее возмущение;  $v$  – ограниченная по норме пространства  $L_2[t_0, t_N]$  кусочно-непрерывная справа вектор-функция. Будем считать, что начальное состояние  $x_0$  в общем случае ненулевое и неизвестно, а его влияние на поведение объекта интерпретируется как начальное возмущение. Матричные функции  $A: R \rightarrow R^{n_x \times n_x}$  и  $B: R \rightarrow R^{n_x \times n_v}$  таковы, что при выбранном начальном условии  $x_0$  и возмущении  $v$  решение системы на рассматриваемом отрезке существует и единственно.

Предположим, что выходы объекта (1) описываются соотношениями:

$$y_k = C_{2,k}x(t_k) + D_k w_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$z_k = C_{1,k}x(t_k), \quad (3)$$

где  $y \in R^{n_y}$  – измеряемый выход;  $z \in R^{n_z}$  – целевой выход;  $w_k \in R^{n_w}$  – дискретное внешнее возмущение, ограниченное по  $l_2$ -норме;  $\{t_k\}_{k=0}^N$  – фиксированные моменты времени, образующие монотонно возрастающую последовательность.

Поскольку состояние  $x$  системы (1) недоступно непосредственному измерению, а на объект и его измеряемый выход  $y$  действуют неизвестные внешние возмущения, возникает задача гарантированной фильтрации – построение оценки состояния системы по доступным измерениям независимо от внешнего воздействия. Для этого рассмотрим линейный дискретный несмещенный фильтр вида:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= K_k \hat{x}_k + L_k (y_k - C_{2,k} \hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0, \\ \hat{z}_k &= C_{1,k} \hat{x}_k,\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\hat{x} \in R^{n_x}$  – состояние;  $\hat{z} \in R^{n_z}$  – целевой выход фильтра. Запишем уравнение, которому должен удовлетворять вектор невязки  $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$ . Применим на каждом из отрезков  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  формулу Коши к уравнению (1) и запишем в явном виде решение в момент времени  $t = t_{k+1}$ , после чего из полученного выражения вычтем уравнение (4). Тогда:

$$\varepsilon_{k+1} = (A_k - L_k C_{2,k}) \varepsilon_k - L_k D_k w_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t) B(s) v(s) ds, \quad \zeta_k = C_{1,k} \varepsilon_k, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0 = x_0$ ; в силу несмещенности фильтра  $K_k = A_k = \Phi(t_{k+1}, t_k)$ ;  $\Phi(t, s)$  – фундаментальная матрица решений системы (1).

Далее, определим для объекта (5) уровень гашения возмущений  $\gamma_c(L_k)$  как показатель совместного влияния начального и внешнего возмущений на целевой выход в наихудшем случае:

$$\gamma_c(L_k) = \sup \frac{\|\zeta\|_{l_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0}, \quad \|v\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^{t_N} |v|^2 dt, \quad \|\zeta\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\zeta_k|^2, \quad (6)$$

где точная верхняя грань берется по всем  $v \in L_2([t_0, t_N], R^{n_v})$ ,  $w_k \in R^{n_w}$  и  $\varepsilon_0 \in R^{n_x}$  такой, что  $\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0 \neq 0$ . Весовая матрица  $S = S^T \geq 0$  задает приоритет между переходным процессом и компонентами терминального состояния, а  $R = R^T > 0$  – между внешними возмущениями и компонентами начального состояния. Таким образом, уровень гашения возмущений есть мера реакции объекта на внешние  $v$ ,  $w_k$  и начальное  $x_0$  возмущения: чем больше уровень гашения, тем сильнее реакция объекта, и наоборот.

В случае, когда действует только одно из возмущений, определим уровень гашения начального возмущения  $\gamma_c^0(L_k)$  и уровень гашения внешних возмуще-

ний  $\gamma_c^\infty(L_k)$  как  $\gamma_c^0(L_k) = \sup_{\varepsilon_0 \neq 0} \frac{\|\zeta\|_{l_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N}{|\varepsilon_0|^2}$ ,  $\gamma_c^\infty(L_k) = \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 \neq 0} \frac{\|\zeta\|_{l_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}$ .

В силу линейности объекта (5) справедливо неравенство

$$\gamma_c(L_k) \geq \max \left\{ \sup_{\varepsilon_0^T R \varepsilon_0 = 1, v=0, w=0} \left[ \|\zeta\|_{l_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N \right], \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 = 1, \varepsilon_0 = 0} \left[ \|\zeta\|_{l_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N \right] \right\}$$

или  $\gamma_c(L_k) \geq \max\{\lambda_{\max}^{-1}(R)\gamma_c^0(L_k), \gamma_c^\infty(L_k)\}$ , где  $\lambda_{\max}(\cdot)$  – максимальное собственное значение матрицы аргумента.

Назовем фильтр (4) дискретным обобщенным  $H_\infty$ -фильтром (для непрерывного объекта), если существуют такие матрицы  $L_k^*$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , что для заданного  $\gamma > 0$  уровень гашения возмущений  $\gamma_c(L_k^*)$  системы (5) удовлетворяет неравенству  $\gamma_c(L_k^*) \leq \gamma$ , и скажем, что фильтр (4) является дискретным обобщенным  $H_\infty$ -оптимальным фильтром (для непрерывного объекта), если

$$L_k^* = \operatorname{arg\,inf}_{L_k} \gamma_c(L_k), \quad \gamma_c = \gamma_c(L_k^*).$$

Аналогично, используя уровень гашения начального возмущения  $\gamma_c^0(L_k)$  и уровень гашения внешних возмущений  $\gamma_c^\infty(L_k)$ , определим дискретные  $\gamma_0$ - и  $H_\infty$ -фильтры (для непрерывного объекта).

Справедлива следующая теорема (здесь и далее через \* обозначен соответствующий симметрический блок).

**Теорема 1.** Для объекта (1) существует дискретный обобщенный  $H_\infty$ -фильтр вида (4) тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -X_{k+1} & X_{k+1}A_k - Z_k C_{2,k} & X_{k+1}\tilde{B}_k & -Z_k D_k & 0 \\ * & -X_k & 0 & 0 & C_{1,k}^\top \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \leq 0, \quad (7)$$

$$X_0 \leq \gamma R, \quad (8)$$

где матрицы  $\tilde{B}_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$  определены формулой

$$\tilde{B}_k \tilde{B}_k^\top = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B(s) B^\top(s) \Phi^\top(t_{k+1}, s) ds,$$

разрешимы относительно матриц  $X_k = X_k^\top > 0$ ,  $Z_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  при  $X_N = S$ . В этом случае параметры фильтра находятся как  $L_k = X_{k+1}^{-1} Z_k$ .

Доказательство теоремы приведено в заключительной части статьи.

Заметим, что для отыскания величины  $\gamma_c$  и параметров обобщенного  $H_\infty$ -оптимального фильтра требуется решить задачу минимизации  $\gamma_c(L_k)$  при ограничениях, задаваемых неравенствами (2).

Также отметим, что из рассуждений, проводимых аналогично доказательству теоремы 1, следует, что  $\gamma_0$ -фильтр, удовлетворяющий условию  $\gamma_c^0(L_k) \leq \gamma$ , существует тогда и только тогда, когда совместно разрешимы неравенства (7), в которых вычеркнуты третьи и четвертые блочные строки и столбцы, и неравенство (8), в котором  $R = I$ , а для существования  $H_\infty$ -фильтра, удовлетворяющего неравенству  $\gamma_c^\infty(L_k) \leq \gamma$ , необходимо и достаточно разрешимости неравенств (7).

## Пример

В качестве иллюстрации рассмотрим на отрезке  $0 \leq t \leq 5.0$  линейный объект, описываемый уравнениями (1), (2), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 16.0 & -4.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad C_1 = C_2 = (1.0 \quad 0.0), \quad D = 0.1.$$

Предположим, что на рассматриваемом отрезке задана равномерная сетка с шагом  $h = 0.1$ , в узлах которой  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, 50$  измеряется выход  $y_k$ . Используя теорему 1, найдем для рассматриваемой системы оптимальное значение матриц фильтра  $L_k^*$ , соответствующих наименьшему уровню гашения возмущений

$$\gamma_c(L_k^*) = \inf_{L_k} \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0 \neq 0} \frac{\|\zeta\|_{L_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0} \approx 0.909,$$

где  $S = 10^{-5}I$  и  $R = 1.1I$  выбраны таким образом, чтобы учесть влияние как начальных условий, так и внешних возмущений.

На практике наиболее распространенным подходом является дискретизация исходного непрерывного объекта, что в нашем случае эквивалентно предположению, что множество допустимых возмущений ограничено множеством кусочно-постоянных функций. В этом случае, используя развитый в [4] аппарат, найдем для полученной дискретной системы оптимальные значения матриц фильтра  $\hat{L}_k$ , при которых соответствующий уровень гашения возмущений

$$\gamma_w = \inf_{L_k} \sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0 \neq 0} \frac{\|\zeta\|_{L_2}^2 + \varepsilon_N^T S \varepsilon_N}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2 + \varepsilon_0^T R \varepsilon_0} \approx 0.909$$

достигает наименьшего значения, и сопоставим с построенным ранее обобщенным  $H_\infty$ -оптимальным фильтром  $L_k^*$ . В качестве внешнего возмущения выберем функции  $v_1(t) = 5e^{-0.01t} \sin(50.1t) \cos(\sqrt{2}t)$ ,  $v_2(t) = 5e^{-0.01t} \sin(5.1t) \cos(\sqrt{2}t)$ .

Ошибка измерения выхода объекта имеет вид  $w_k = 0.1 \sin \pi \xi_k$ , где  $\xi_k$  – равномерная случайная величина, принимающая значение из отрезка  $[-1, 1]$ . На рис. 1 приведены графики изменения целевого выхода системы от времени при внешних возмущениях  $v_1(t)$ ,  $w_k$  и начальном состоянии  $x_0 = (1, -2)^T$ , где белыми кружками на графике обозначены оценки состояния, полученные в момент времени  $t_k$  с использованием фильтра  $L_k^*$ , а серыми кружками – оценки в эти же моменты времени, но полученные с использованием фильтра  $\hat{L}_k$ .

Из приведенного рисунка видно, что, как и ожидалось, в случае сильно осциллирующего внешнего возмущения и малого количества измерений (малой частоты дискретизации) использовать дискретный фильтр  $\hat{L}_k$  для получения оценки состояния объекта нельзя. Однако с увеличением количества измерений, т.е. с ростом частоты дискретизации, оба эти фильтра адекватно оценивают неизвестное состояние системы, что подтверждается рис. 2.

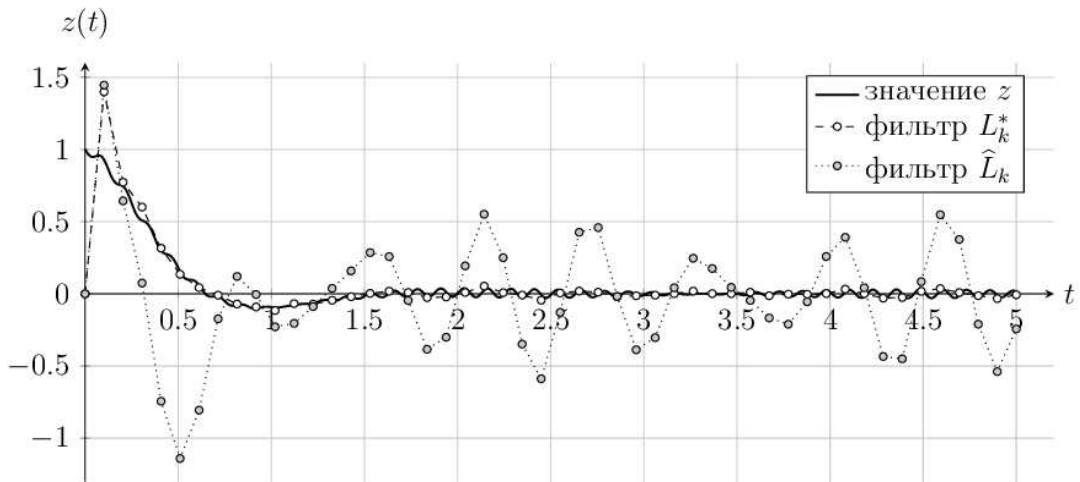


Рис. 1. Сравнение фильтров при внешнем возмущении  $v_1(t)$  и  $h = 0.1$ .

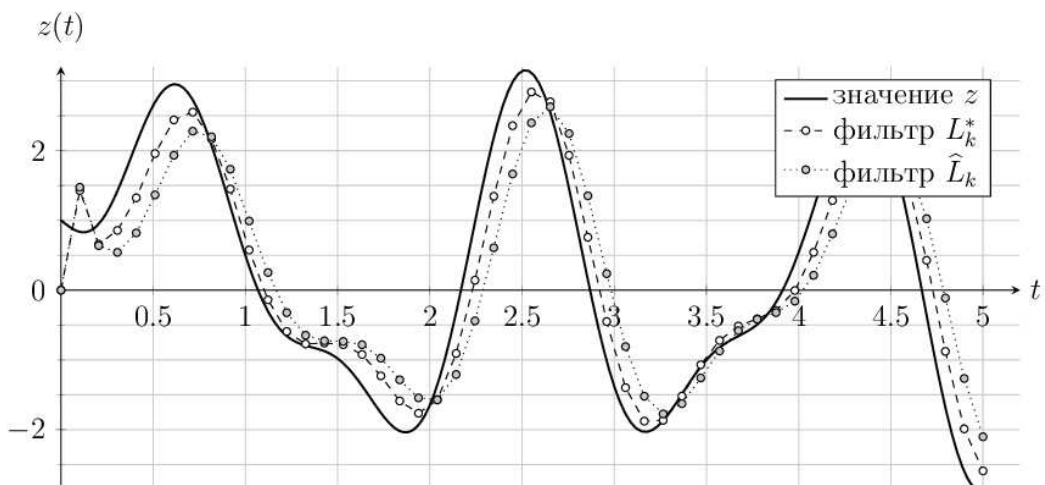


Рис 2. Сравнение фильтров при внешнем возмущении  $v_2(t)$  и  $h = 0.1$ .

Естественно ожидать, что с уменьшением частоты внешнего воздействия оба фильтра корректно справляются с поставленной задачей. Для подтверждения этого рассмотрим в качестве внешнего воздействия функцию  $v_2(t)$ , остальные возмущения оставим без изменений. График целевого выхода  $z$  в этом случае приведен на рис. 3.

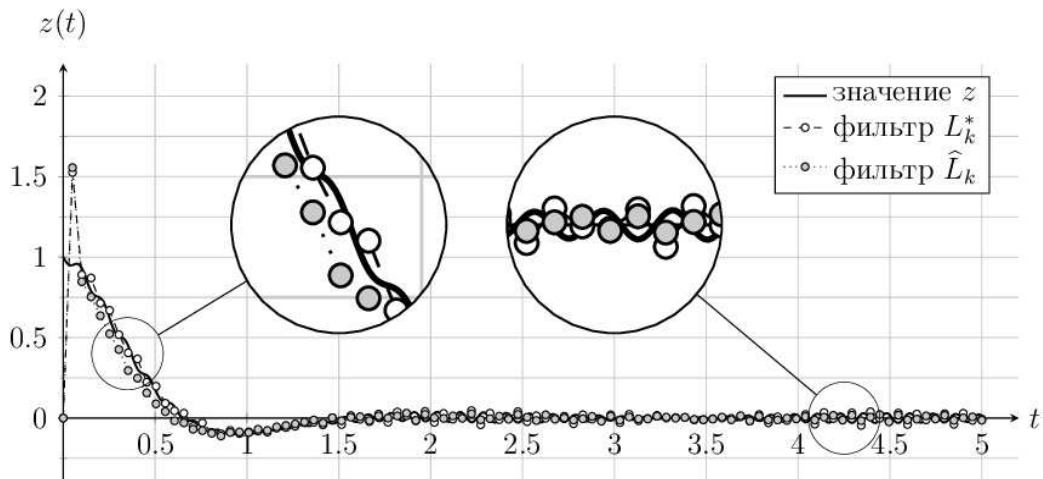


Рис 3. Сравнение фильтров при внешнем возмущении  $v_1(t)$  и  $h = 0.05$ .

## Доказательство основной теоремы

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы 2 покажем, что уровень гашения возмущений  $\gamma_c(L_k)$  в объекте (5) может быть охарактеризован в терминах матричных рекуррентных уравнений Риккати. Для этого рассмотрим объект вида

$$x_{k+1} = F_k x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_k(s) v_k(s) ds + H_k w_k, \quad z_k = M_k x_k, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (9)$$

в котором  $F_k \in R^{n_x \times n_x}$ ,  $M_k \in R^{n_z \times n_x}$  и  $H_k \in R^{n_x \times n_w}$  – заданные матрицы, а функция  $G_k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow R^{n_x \times n_v}$  принадлежит пространству  $L_2[t_k, t_{k+1}]$ ; моменты времени  $\{t_k\}_{k=0}^N$  образуют монотонно возрастающую последовательность  $t_N < +\infty$ . Переменные  $x_k \in R^{n_x}$ ,  $v_k \in L_2([t_k, t_{k+1}], R^{n_v})$ ,  $w_k \in R^{n_w}$  и  $z_k \in R^{n_z}$  имеют тот же смысл, что и для объекта (1). Как и ранее, начальное состояние  $x_0$  в общем случае мы считаем неизвестным и отличным от нуля, а его влияние на поведение объекта интерпретируется в качестве начального возмущения. Нетрудно видеть, что если в уравнениях (9) заменить  $F_k$  на  $A_k - L_k C_{2,k}$ ,  $H_k$  на  $-L_k D_k$  и  $G_k(s)$  на  $\Phi(t_{k+1}, s) B(s)$ , то мы получим уравнения (5). Следовательно, для объекта (9) при помощи формулы (6) также можно определить уровень гашения возмущений, который обозначим через  $\gamma_c$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Для того, чтобы уровень гашения возмущений  $\gamma_c$  в объекте (9) был меньше заданного числа  $\gamma > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали матрицы  $X_k = X_k^T \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, N$ , удовлетворяющие условиям:

$$X_N = S, \quad (10)$$

$$Q_k^T X_{k+1} Q_k - \gamma I < 0, \quad (11)$$

$$X_k = M_k^T M_k + F_k^T X_{k+1} F_k - F_k^T X_{k+1} Q_k (Q_k^T X_{k+1} Q_k - \gamma I)^{-1} Q_k^T X_{k+1} F_k, \quad (12)$$

$$X_0 \leq \gamma R, \quad (13)$$

где  $Q_k = (\tilde{G}_k \ H_k)$  и матрицы  $\tilde{G}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  определены следующим образом:

$$\tilde{G}_k \tilde{G}_k^T = \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_k(s) G_k^T(s) ds.$$

Отметим, что вычисление матриц  $X_k$  производится последовательно в обратном времени, начиная с момента  $k = N - 1$  и заканчивая в начальный момент времени  $k = 0$ , в который должно выполняться условие (13).

Доказательство теоремы 2 основывается на ряде вспомогательных утверждений о свойствах квадратичного функционала  $J : L_2([\tau_0, \tau_1], R^m) \rightarrow R$  вида

$$J(w) = (Lw)^T W (Lw) - \gamma \|w\|_{L_2}^2, \quad Lw = \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s) w(s) ds, \quad (14)$$

где  $W = W^T \geq 0$ ,  $\gamma > 0$  и  $B(s) \in L_2([\tau_0, \tau_1], R^{n \times m})$ .

Лемма 1. Функционал (14) удовлетворяет условию отрицательности  $J(w) < 0$  тогда и только тогда, когда справедливо неравенство:

$$\tilde{B}^T W \tilde{B} < \gamma I, \quad \tilde{B} \tilde{B}^T = \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s) B^T(s) ds. \quad (15)$$

*Доказательство.* Поскольку  $W = W^T \geq 0$ , то существует такая матрица  $Z$ , что  $W = Z^T Z$ . С учетом этого, функционал (14) принимает вид:

$$J(w) = (\hat{L}w)^T (\hat{L}w) - \gamma \|w\|_{L_2}^2, \quad \hat{L}w = \int_{\tau_0}^{\tau_1} ZB(s)w(s)ds. \quad (16)$$

Теперь заметим, что условие отрицательности  $J(w) < 0$  можно записать следующим образом:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|\hat{L}w\|_{R^m}^2}{\|w\|_{L_2}^2} = \|\hat{L}\|^2 < \gamma. \quad (17)$$

Поскольку оператор  $\hat{L}$  ограниченный, то справедливо соотношение  $\|\hat{L}\| = \|\hat{L}^*\|$ , где через  $\hat{L}^*$  обозначен сопряженный к  $\hat{L}$  оператор. Таким образом, отрицательность функционала (14) эквивалентна выполнению неравенства  $\|\hat{L}^*\| < \gamma$ .

Чтобы найти оператор  $\hat{L}^*$ , воспользуемся определением  $\langle \hat{L}u, v \rangle_{R^m} = \langle u, \hat{L}^*v \rangle_{L_2}$ . Расписывая левую и правую части, а затем объединяя их, получаем соотношение:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} u^T(s) (B^T(s)Z^T - \hat{L}^*)v ds = 0. \quad (18)$$

Поскольку (18) должно выполняться для всех  $u \in L_2[\tau_0, \tau_1]$  и  $v \in R^m$ , то заключаем, что  $\hat{L}^* = B^T(s)Z^T$ .

Теперь докажем необходимость условия (15). Предположим, что неравенство  $\|\hat{L}^*\| < \gamma$  выполнено. Тогда, расписывая норму оператора  $\hat{L}^*$ , приходим к соотношению:

$$\|\hat{L}^*\|^2 = \sup_{\|v\|=1} \|\hat{L}^*v\|^2 = \sup_{v \in R^m} \frac{1}{|v|^2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} v^T ZB(s)B^T(s)Z^T v ds < \gamma,$$

или, после упрощения,  $Z\tilde{B}\tilde{B}^T Z^T - \gamma I < 0$ . Применяя к последнему неравенству лемму Шура, получаем неравенство (15). Достаточность доказывается аналогично, простым повторением рассуждений с конца. Лемма доказана.

Лемма 2. При выполнении условия (15) функционал (14) является строго выпуклым вверх.

*Доказательство.* Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что  $\forall \alpha \in (0, 1)$  и  $\forall u, v \in L_2[\tau_0, \tau_1]$ , справедливо соотношение:



$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) - \alpha J(u) - (1 - \alpha)J(v) = -\alpha(1 - \alpha)J(u - v). \quad (19)$$

Поскольку мы считаем, что условие (15) выполнено, то выражение в правой части соотношения (19) будет положительным, следовательно, функционал (14) удовлетворяет неравенству:

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) > \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v), \quad \forall u, v \in L_2[\tau_0, \tau_1], \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (20)$$

Окончательно заключаем, что функционал (14) является строго выпуклым вверх. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть  $a \in R^n$ , тогда при выполнении условия (15) функционал

$$Q(w) = (a + Lw)^T W(a + Lw) - \gamma \|w\|_{L_2}^2 \quad (21)$$

имеет единственный максимум

$$w^*(s) = B^T(s)(\gamma I - W\Psi)^{-1}Wa, \quad \Psi = \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s)B^T(s)ds. \quad (22)$$

*Доказательство.* Обозначим через  $w^*$  решение интегрального уравнения

$$B^T(s)Wa + \int_{\tau_0}^{\tau_1} B^T(s)WB(\tau)w^*(\tau)d\tau = \gamma w^*(s) \quad (23)$$

и покажем, что функционал  $Q$  может быть представлен в виде

$$Q(w) = J(w - w^*) - J(w^*) + a^T Wa. \quad (24)$$

Действительно, раскрывая скобки в выражении (21) и используя соотношение

$$J(w - w^*) = J(w) + J(w^*) - 2(Lw)^T W(Lw^*) + 2\gamma \langle w, w^* \rangle_{L_2},$$

получаем:

$$Q(w) = J(w - w^*) - J(w^*) + a^T Wa + 2(Lw)^T W(a + Lw^*) - 2\gamma \langle w, w^* \rangle_{L_2}.$$

Так как функция  $w^*$  удовлетворяет уравнению (23), то выполняется соотношение

$$(Lw)^T W(a + Lw^*) = \gamma \langle w, w^* \rangle_{L_2}, \quad \forall w \in L_2([\tau_0, \tau_1], R^m),$$

следовательно, справедлива формула (24).

Далее, из формулы (24), условия (15) и леммы 4 заключаем, что функционал  $Q$  является строго выпуклым вверх, следовательно, он имеет единственный максимум, достигающийся в точке  $w^*$ .

Уравнение (23) является вырожденным интегральным уравнением Фредгольма второго рода и его решение можно найти в явном виде. Для этого домножим слева обе части уравнения на матрицу  $B(s)$ , а затем проинтегрируем от  $\tau_0$  до  $\tau_1$ , тогда:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s)B^T(s)Wads + \left( \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s)B^T(s)ds \right) W \left( \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(\tau)w^*(\tau)d\tau \right) = \gamma \int_{\tau_0}^{\tau_1} B(s)w^*(s)ds.$$

Поскольку справедливо условие (15), то, выражая интеграл, содержащий функцию  $w^*(s)$ , после чего подставляя полученное соотношение в уравнение (23) и упрощая, приходим к соотношениям (22). Лемма доказана.

Теперь обратимся к доказательству теоремы 2.

*Доказательство теоремы 2.* Подставим в неравенство  $\gamma_c \leq \gamma$  соотношение (6) и упростим:

$$\sup_{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{L_2}^2 + x_0^T R x_0 = 1} \left( \|z\|_{l_2}^2 - \gamma \|v\|_{L_2}^2 - \gamma \|w\|_{l_2}^2 + x_N^T S x_N - \gamma x_0^T R x_0 \right) \leq 0, \quad (25)$$

следовательно, исходная задача равносильна существованию такого начального возмущения  $x_0^*$  и внешних возмущений  $v_k^*$  и  $w_k^*$ , что будет выполнено неравенство (25).

Для доказательства необходимости определим на траекториях системы (9) семейство функций Беллмана:

$$V_N(x_N) = x_N^T S x_N, \quad (26)$$

$$V_k(x_k) = \sup_{v_k^N, w_k^N} \left[ \sum_{j=k}^{N-1} \left( |z_j|^2 - \gamma |w_j|^2 - \gamma \int_{t_j}^{t_{j+1}} |v_j|^2 dt \right) + x_N^T S x_N \right], \quad (27)$$

где через  $v_k^N(t)$  обозначена последовательность  $v_k(t), v_{k+1}(t), \dots, v_N(t)$ , аналогично для  $w_k^N$ ,  $k = N-1, \dots, 0$ . Тогда неравенство (25) принимает вид:

$$\sup_{x_0} \left( V_0(x_0) - \gamma x_0^T R x_0 \right) \leq 0. \quad (28)$$

Согласно принципу динамического программирования имеют место соотношения:

$$V_k(x_k) = \sup_{v_k, w_k} \left[ |z_k|^2 - \gamma |w_k|^2 - \gamma \int_{t_k}^{t_{k+1}} |v_k|^2 dt + V_{k+1}(x_{k+1}) \right], \quad (29)$$

где  $x_{k+1}$ ,  $k = N-1, \dots, 0$ , находится по формуле (9). Будем искать функции Беллмана  $V_k$  в виде

$$V_k(x_k) = x_k^T X_k x_k, \quad X_k = X_k^T \geq 0. \quad (30)$$

Сравнивая (30) с условием (26), получаем, что  $X_N = S$ . Далее, подставляя (30) в (29) и учитывая, что  $z_k$  не зависит ни от  $v_k$ , ни от  $w_k$ , приходим к соотношению

$$x_k^T X_k x_k = x_k^T M_k^T M_k x_k + \sup_{v_k} \left[ \sup_{w_k} \left( x_{k+1}^T X_{k+1} x_{k+1} - \gamma |w_k|^2 \right) - \gamma \int_{t_k}^{t_{k+1}} |v_k|^2 dt \right]. \quad (31)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, достигает своего наибольшего значения по переменной  $w_k$  в точке

$$w_k^* = - \left( H_k^T X_{k+1} H_k - \gamma I \right)^{-1} H_k^T X_{k+1} \left( F_k x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_{k+1}(s) v_{k+1}(s) ds \right), \quad (32)$$

если справедливо условие  $H_k^T X_{k+1} H_k - \gamma I < 0$ . Подставим найденное выражение (32) в соотношение (31) и упростим. Согласно лемме 3 полученное выражение при выполнении условия

$$\tilde{G}_k^T Y_{k+1} \tilde{G}_k - \gamma I < 0, \quad \tilde{G}_k \tilde{G}_k^T = \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_k(s) G_k^T(s) ds$$

имеет единственный максимум вида

$$v_k^*(t) = B_k^T(t) (\gamma I - Y_{k+1} \tilde{G}_k \tilde{G}_k^T)^{-1} Y_{k+1} A_k x_k, \quad (33)$$

$$t_k \leq t < t_{k+1},$$

$$Y_{k+1} = X_k - X_k H_k (H_k^T X_k H_k - \gamma I)^{-1} H_k^T X_k. \quad (34)$$

Подставляя (32) и (36) в соотношение (31), получаем рекуррентные уравнения для  $X_k, Y_k$ :

$$X_k = M_k^T M_k + F_k^T X_{k+1} F_k - F_k^T X_{k+1} \tilde{G}_k (\tilde{G}_k^T X_{k+1} \tilde{G}_k - \gamma I)^{-1} \tilde{G}_k^T X_{k+1} F_k,$$

$$Y_{k+1} = X_k - X_k H_k (H_k^T X_k H_k - \gamma I)^{-1} H_k^T X_k,$$

которые можно записать в виде (12), если ввести матрицу  $Q_k = (\tilde{G}_k^T H_k)$ . Условие (11) получается если объединить соотношения (34) и неравенства  $H_k^T X_{k+1} H_k - \gamma I < 0$  и  $\tilde{G}_k^T Y_{k+1} \tilde{G}_k - \gamma I < 0$ .

Далее, подставим выражение для  $V_0$  в неравенство (28), тогда:

$$\sup_{x_0} x_0^T (X_0 - \gamma R) x_0 \leq 0, \quad (35)$$

т.е. выполняется неравенство (13).

Доказательство достаточности мы опускаем, поскольку оно проводится выделением полного квадрата и не представляет принципиальных трудностей. Теорема 2 доказана.

В дальнейшем, для доказательства теоремы 1, нам понадобится переформулировать теорему 2 в терминах линейных матричных неравенств.

**Теорема 3.** Уровень гашения возмущений в объекте (9) на конечном интервале времени удовлетворяет неравенству  $\gamma_c \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} A_k^T X_{k+1} A_k - X_k & A_k^T X_{k+1} Q_k & C_k^T \\ * & Q_k^T X_{k+1} Q_k - \gamma I & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (36)$$

$$X_N = S, \quad X_0 \leq \gamma R, \quad (37)$$

разрешимы относительно матриц  $X_k = X_k^T \geq 0, k = 0, \dots, N-1$ . При этом величина  $\gamma_c$  находится как минимальное значение  $\gamma$ , для которого разрешимы эти линейные матричные неравенства.

*Доказательство.* Воспользуемся свойством монотонности решений матричных уравнений Риккати. Известно [12, 13], что если  $X_k = X_k^T \geq 0, k = 0, \dots, N$ , решение рекуррентного уравнения (12) и  $\bar{X}_k, k = 0, \dots, N$ , решение разностного линейного матричного неравенства

$$C_k^T C_k + A_k^T \bar{X}_{k+1} A_k - \bar{X}_k - A_k^T \bar{X}_{k+1} Q_k (Q_k^T \bar{X}_{k+1} Q_k - \gamma I)^{-1} Q_k^T \bar{X}_{k+1} A_k \leq 0, \quad (38)$$

то справедливо соотношение  $\bar{X}_k \geq X_k$ . Следовательно, от уравнения (12) можно перейти к неравенству (38), применяя к которому лемму Шура, получаем соотношение (36). Теорема доказана.

Используя теорему 3, докажем основной результат настоящей работы.

*Доказательство теоремы 1.* Уровень гашения возмущений системы (5) согласно теореме 4 удовлетворяет условию  $\gamma_c(L_k) \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства (36), в которых матрицу  $F_k$  надо заменить на  $A_k - L_k C_{2,k}$ , а  $Q_k$  на  $(\tilde{B}_k, -L_k D_k)$ . Воспользуемся леммой Шура и преобразуем полученные неравенства к эквивалентному виду:

$$\begin{pmatrix} -X_{k+1}^{-1} & A_k - L_k C_{2,k} & \tilde{B}_k & -L_k D_k & 0 \\ * & -X_k & 0 & 0 & C_k^T \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Далее, домножая их слева и справа на диагональную матрицу  $\text{diag}(X_k, I, I, I, I)$  и обозначая  $Z_k = X_{k+1} L_k$ , получаем неравенство (7). Осталось только заметить, что неравенства (37) и (8) эквивалентны.

### Заключение

В работе для линейных непрерывных объектов, выход которых может быть измерен лишь в фиксированные дискретные моменты времени, рассмотрена задача обобщенной  $H_\infty$ -оптимальной фильтрации на конечном интервале времени. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования обобщенных  $H_\infty$ -оптимальных фильтров и показано, что вычисление параметров таких фильтров сводится к решению системы линейных матричных неравенств.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Nagpal K. M., Khargonekar P.P. Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36, № 2. – P.152-166.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенная  $H_\infty$ -оптимальная фильтрация при внешнем и начальном возмущениях // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 11. – С.1507-1514.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Минимаксная фильтрация:  $\gamma_0$ -оптимальные наблюдатели и обобщенные  $H_\infty$ -оптимальные фильтры // АиТ. – 2013. – № 4. – С.43-58.
4. Кривдина Л.Н. Обобщенные  $H_\infty$ -оптимальные дискретные фильтры // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. [Электронный ресурс] – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С.882-888.
5. Sun W., Nagpal K. M., Khargonekar P. P.  $H_\infty$  Control and Filtering for Sampled-Data Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1993. – Vol. 38, № 8. – P.1162-1175.
6. Sivashankar N., Khargonekar P. Characterization of the  $L_2$ -induced norm for linear systems with jumps with applications to sampled-data systems // SIAM J. Control Optim. – 1994. – V. 32. – P. 1128-1150.



7. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.*  $H_\infty$  control with transients // SIAM J. Control Optim. – 1991. – V. 29, No. 6. – P.1373-1393.
8. *Balandin D., Kogan M.* LMI-based  $H_\infty$ -optimal control with transients // Int. Journal of Control. – 2010. – V. 83, No. 8. – P.1664-1673.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление как компромисс между  $H_\infty$ -оптимальным и  $\gamma$ -оптимальным управлениями // АиТ. – 2010. – № 6. – С.20-38.
10. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного  $H_\infty$ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // АиТ. – 2014. – № 1. – С.3-22.
11. *Бирюков Р.С.* Обобщенное  $H_\infty$ -оптимальное управление линейным непрерывно-дискретным объектом // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, 16-19 июня 2014 г.: Труды. [Электронный ресурс] – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. – С.700-708.
12. *Ran A.C.M., Vreugdenhil R.* Existence and comparison theorem for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems // Linear Algebra Appl. – 1988. – V. 9. – P.63-83.
13. *Wimmer H.K.* Monotonicity and maximality of solutions of discrete-time algebraic Riccati equations // J. Math. Systems Estim. Control. – 1992. – V. 2. – P.219-235.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Ереминым.

E-mail:

Бирюков Руслан Сергеевич – [ruslan.biryukov@gmail.com](mailto:ruslan.biryukov@gmail.com).

УДК 625.855.3

© 2014 г. **О.П. Томчина**, канд. техн. наук,  
**В.В. Резниченко**, канд. техн. наук,  
**Д.В. Горлатов**

(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет)

## ЭНЕРГОСКОРОСТНЫЕ АЛГОРИТМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ДЛЯ МНОГОРОТОРНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ УСТАНОВОК С УПРУГИМИ КАРДАННЫМИ ВАЛАМИ

Предложены новые алгоритмы управления многороторными виброустановками (ВУ) с учетом упругой связи двигателей и неуравновешенных роторов. Исследование показало, что предложенные алгоритмы обеспечивают устойчивую приближенную синхронизацию роторов и расширяют область рабочих резонансных частот ВУ.

**Ключевые слова:** интегродифференцирующий алгоритм, многороторная виброустановка, синхронизация.

### Введение

Появившиеся мехатронные ВУ, основанные на принципах управления с обратными связями и позволяющие реализовывать сложные алгоритмы управления с помощью компьютера, перспективны при создании вибрационного оборудова-

ния нового поколения [1, 2]. При этом возникает ряд задач, важнейшими из которых являются: 1) обеспечение прохождения через зону резонанса при пуске и разгоне вибровозбудителей, когда область рабочих частот находится в зарезонансной зоне [3]; 2) обеспечение устойчивого синхронного режима вращения вибровозбудителей, обуславливающего максимальную производительность работы [4].

Первая задача возникает, если мощность двигателя недостаточна для прохождения через зону резонанса из-за эффекта Зоммерфельда, детально изученного в работах [3, 5, 6]. Однако именно работа в зарезонансной зоне наиболее устойчива с точки зрения обеспечения заданных характеристик рабочего процесса в условиях изменения массоинерционных параметров ВУ. Решение второй задачи предоставляет дополнительные возможности, особенно для режима кратной синхронизации, когда один вибровозбудитель вращается со средней угловой скоростью, кратной угловой скорости другого. При этом стабильная самосинхронизация может и не иметь места [7]. Однако именно наличие двух различных скоростей роторов позволяет транспортно-технологическим машинам осуществлять одновременно вибротранспортирование, возбуждаемое низкой частотой, и раздел сыпучих материалов, осуществляемый за счет большей  $n$ -кратной частоты, что указывает на важность второй задачи.

Для оценки новых алгоритмов с обратной связью разрабатываются специальные вибростенды [1]. Возможная конструкция механической части двухроторной и трехроторной ВУ представлена на рис. 1, где использованы следующие обозначения: 1 – электродвигатели; 2 – блоки датчиков; 3 – рама стенда; 4 – роторы дебалансных вибровозбудителей; 5 – вибрационный корпус (платформа); 6 – пружинные виброизоляторы; 7 – вилки вибровозбудителей; 8 – карданные валы.

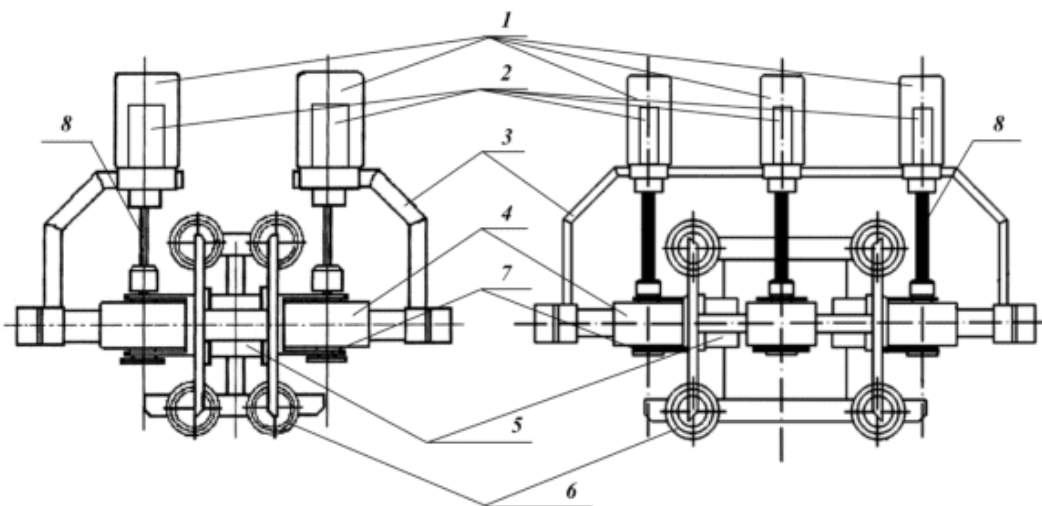


Рис. 1. Схема механической части двухроторной и трехроторной вибрационных установок (вид сверху).

Как видно из этого рисунка, механическая связь приводных двигателей, расположенных на неподвижной поверхности, и неуравновешенных роторов (вибровозбудителей), расположенных на вибрирующем несущем теле (платформе), осуществляется с помощью карданных валов (8). Тогда при реализации новых алгоритмов управления для повышения их работоспособности при расчете управляющих моментов может потребоваться учет упругости карданных валов.

Однако, ранее при синтезе этих алгоритмов для многороторных ВУ в [2] такая особенность не рассматривалась.

### Динамическая модель многороторной вибрационной установки с учетом упругости карданных валов

Расчетная схема трехроторной ВУ, совершающей движение в вертикальной плоскости  $Oxy$ , изображена на рис. 2. Система координат, связанная с несущей платформой, обозначена как  $O'x'y'$ . Координаты центра масс платформы – точки  $O'$  – обозначены как  $\{x_c, y_c\}$ . Первый и второй роторы расположены симметрично на оси абсцисс  $Ox'$  на расстоянии  $r$  от центра  $O'$ , третий ротор расположен в центре. Все роторы считаются одинаковыми. Платформа укреплена на упругих опорах – пружинах. Абсциссы точек крепления пружин  $X_{pi} = \pm a$ ;  $\varphi$  – угол поворота платформы;  $\varphi_i$  – углы поворота неуравновешенных роторов, измеряемые от оси  $Ox'$  против часовой стрелки  $i = 1, 2, 3$ ;  $m_i = m$ ,  $m_n$ ,  $J_i$ ,  $J$  – массы и моменты инерции роторов и платформы соответственно;  $\rho_i = \rho$  – эксцентриситет роторов;  $c_{01}$ ,  $c_{02}$  – эквивалентные продольные и поперечные жесткости пружин;  $k_c$  – коэффициент вязкого трения в подшипниках вибровозбудителей;  $\beta$  – демпфирование в пружинах. Упругая связь между двигателями  $M$  и точками крепления роторов к платформе обозначена в виде верхних пружин.

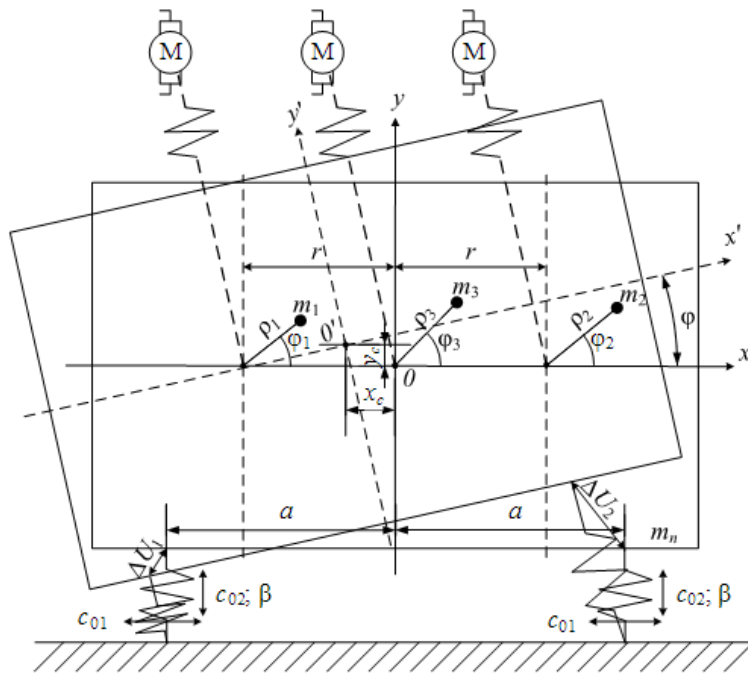


Рис. 2. Расчетная схема трехроторной ВУ с учетом упругости валов.

Модель динамики трехроторной ВУ без учета упругости получена в [2]:

$$\begin{aligned}
 m_0 \ddot{x}_c - \dot{\varphi} m \rho (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2) + \sin(\varphi + \varphi_3)) - \dot{\varphi}_1 m \rho \sin(\varphi + \varphi_1) - \\
 - \dot{\varphi}_2 m \rho \sin(\varphi + \varphi_2) - \dot{\varphi}_3 m \rho \sin(\varphi + \varphi_3) - \dot{\varphi}^2 m \rho (\cos(\varphi + \varphi_1) + \\
 + \cos(\varphi + \varphi_2) + \cos(\varphi + \varphi_3)) - \dot{\varphi}_1^2 m \rho \cos(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 m \rho \cos(\varphi + \varphi_2) - \\
 - \dot{\varphi}_3^2 m \rho \cos(\varphi + \varphi_3) - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 m \rho \cos(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_2 m \rho \cos(\varphi + \varphi_2) - \\
 - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}_3 m \rho \cos(\varphi + \varphi_3) + 2c_{01}x_c + \beta \dot{x}_c = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_0 \ddot{y}_c + \dot{\varphi} m \rho (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2) + \cos(\varphi + \varphi_3)) + \ddot{\varphi}_1 m \rho \cos(\varphi + \varphi_1) + \\
& + \ddot{\varphi}_2 m \rho \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\varphi}_3 m \rho \cos(\varphi + \varphi_3) - \dot{\varphi}^2 m \rho (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2) + \\
& + \sin(\varphi + \varphi_3)) - \dot{\varphi}_1^2 m \rho \sin(\varphi + \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 m \rho \sin(\varphi + \varphi_2) - \dot{\varphi}_3^2 m \rho \sin(\varphi + \varphi_3) - \\
& - 2\dot{\varphi} \dot{\varphi}_1 m \rho \sin(\varphi + \varphi_1) - 2\dot{\varphi} \dot{\varphi}_2 m \rho \sin(\varphi + \varphi_2) - \\
& - 2\dot{\varphi} \dot{\varphi}_3 m \rho \sin(\varphi + \varphi_3) + m_0 g + 2c_{02} y_c + \beta \dot{y}_c = 0;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& - \ddot{x}_c m \rho (\sin(\varphi + \varphi_1) + \sin(\varphi + \varphi_2) + \sin(\varphi + \varphi_3)) + \ddot{y}_c m \rho (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2) + \\
& + \cos(\varphi + \varphi_3)) + \ddot{\varphi} (J + J_1 + J_2 + J_3 - 2rm\rho(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)) + \ddot{\varphi}_1 (J_1 - rm\rho \cos\varphi_1) + \\
& + \ddot{\varphi}_2 (J_2 + rm\rho \cos\varphi_2) + \ddot{\varphi}_3 J_3 + \dot{\varphi}_1^2 rm\rho \sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2^2 rm\rho \sin\varphi_2 + 2rm\rho \dot{\varphi} \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - \\
& - 2rm\rho \dot{\varphi} \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + m\rho g (\cos(\varphi + \varphi_1) + \cos(\varphi + \varphi_2) + \cos(\varphi + \varphi_3)) + c_{03} \varphi + \beta \dot{\varphi} = 0; \\
& - \ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\varphi} (J_1 - rm\rho \cos\varphi_1) + \ddot{\varphi}_1 J_1 - \\
& - \dot{\varphi}^2 rm\rho \sin\varphi_1 + m\rho g \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\varphi}_1 = M_1; \\
& - \ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_2) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\varphi} (J_2 + rm\rho \cos\varphi_1) + \ddot{\varphi}_2 J_2 + \\
& + \dot{\varphi}^2 rm\rho \sin\varphi_2 + m\rho g \cos(\varphi + \varphi_2) + k_c \dot{\varphi}_2 = M_2; \\
& - \ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_3) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_3) + \ddot{\varphi} J_3 + \ddot{\varphi}_3 J_3 + \\
& + m\rho g \cos(\varphi + \varphi_3) + k_c \dot{\varphi}_3 = M_3,
\end{aligned} \tag{3}$$

где уравнения (2) описывают динамику платформы, а уравнения (3) – динамику роторов (обозначим модель ММ1). Здесь  $M_1, M_2, M_3$  – электромеханические моменты двигателей. Модель двухроторной ВУ получается из уравнений (2), (3), если положить  $\varphi_3 = 0$  (тогда третье из уравнений системы (3) будет отсутствовать).

В работе [8] показано, что при частоте упругих колебаний карданного вала  $\omega_y < 1000 \text{с}^{-1}$  необходимо учитывать его упругость, это можно сделать, воспользовавшись структурной схемой, изображенной на рис. 3, где представлена схема практической реализации системы управления для двухроторной ВУ, включающая: ВУ с блоками платформы и роторов; электронный блок усилителя-преобразователя; систему датчиков со специальным контроллером для снятия и обработки сигналов; персональный компьютер (ПК) с устройствами сопряжения с физической аппаратурой. Расчет управляющего момента производится на ПК по алгоритму, описанному ниже. С ПК управляющий момент приходит на вход цифроаналогового преобразователя (ЦАП) и подается на электропривод (ЭП), состоящий из системы управления электроприводом (СЭП) и двигателя (Д), откуда через упругие карданные валы подается на неуравновешенные роторы. Здесь введены следующие обозначения:  $M_i^*$  и  $M_i$  – управляющий момент в цифровой и аналоговой форме соответственно;  $M_{Дi}$  – момент двигателя;  $M_{yi}$  – упругий момент двигателя;  $c_B, b_B$  – коэффициенты жесткости и демпфирования карданного вала;  $\omega_{Дi}$  – угловая скорость двигателя,  $i = 1, 2$ . Для описания упругости валов введем переменные состояния  $z_{1i} = \omega_{Дi}$  и  $z_{2i}$  как выходы соответствующих интеграторов,  $i = 1, 2$ . Тогда динамика  $i$ -го карданного вала с учетом упругости описывается дифференциальными уравнениями:

$$\dot{z}_{1i} = \frac{1}{J_i} (M_i - M_{yi}) = \frac{1}{J_i} M_i - \frac{1}{J_i} z_{2i} - \frac{b_B}{J_i} z_{1i} + \frac{b_B}{J_i} \dot{\varphi}_i, \quad \dot{z}_{2i} = c_B z_{1i} - c_B \dot{\varphi}_i, \tag{4}$$



а упругий момент  $M_{yi} = z_{2i} + b_B(\omega_{Di} - \dot{\varphi}_i)$ .

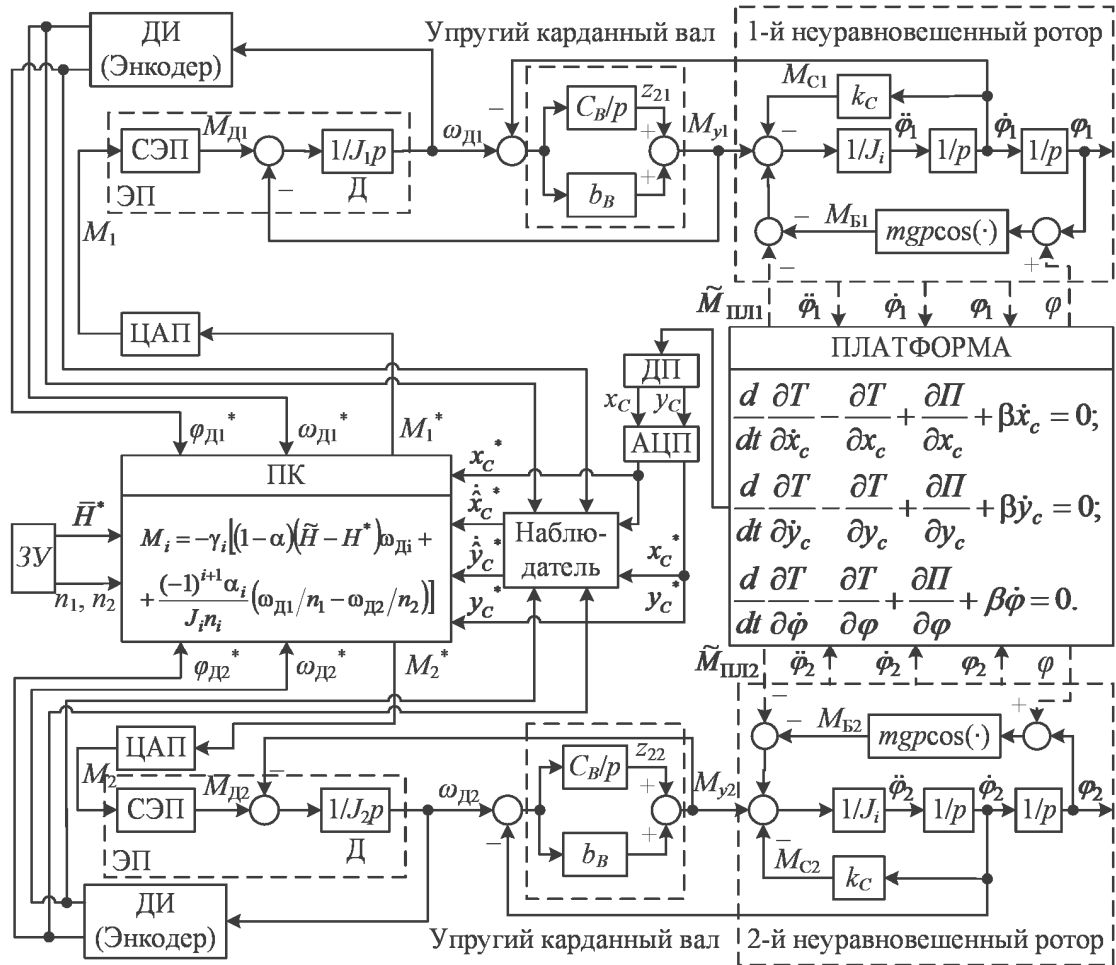


Рис. 3. Структурная схема системы управления двухроторной ВУ.

Тогда уравнения динамики роторов (3) примут вид (5):

$$\begin{aligned}
 & -\ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_1) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_1) + \ddot{\varphi}(J_1 - r m \rho \cos \varphi_1) + \ddot{\varphi}_1 J_1 - \\
 & - \dot{\varphi}^2 r m \rho \sin \varphi_1 + m \rho g \cos(\varphi + \varphi_1) + k_c \dot{\varphi}_1 = M_{y1} = z_{21} + b_B(\omega_{D1} - \dot{\varphi}_1); \\
 & -\ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_2) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_2) + \ddot{\varphi}(J_2 + r m \rho \cos \varphi_1) + \ddot{\varphi}_2 J_2 + \\
 & + \dot{\varphi}^2 r m \rho \sin \varphi_2 + m \rho g \cos(\varphi + \varphi_2) + k_c \dot{\varphi}_2 = M_{y2} = z_{22} + b_B(\omega_{D2} - \dot{\varphi}_2); \\
 & -\ddot{x}_c m \rho \sin(\varphi + \varphi_3) + \ddot{y}_c m \rho \cos(\varphi + \varphi_3) + \ddot{\varphi} J_3 + \ddot{\varphi}_3 J_3 + \\
 & + m \rho g \cos(\varphi + \varphi_3) + k_c \dot{\varphi}_3 = M_{y3} = z_{23} + b_B(\omega_{D3} - \dot{\varphi}_3).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим математическую модель, включающую (2) и (5), как ММ2.

### Энергоскоростные алгоритмы управления многороторными ВУ, учитывающие упругость карданных валов

Алгоритмы управления простой и кратной синхронизацией для многороторных ВУ без учета упругости карданных валов предлагались в работах [3 – 5]. Они синтезировались с помощью метода скоростного градиента, в котором минимизируется неотрицательный целевой функционал (ЦФ)  $Q$ , базирующийся на полной механической энергии системы.

Под простой частотной синхронизацией понимается точное совпадение

скоростей вибровозбудителей:  $\omega_s = \omega_r$ ;  $s, r = 1, \dots, k$ . При кратной частотной синхронизации угловые скорости вибровозбудителей пропорциональны: для некоторых целых  $n_i$  и синхронной частоты  $\omega^* > 0$  выполняются соотношения:  $\omega_i = n_i \cdot \omega^*$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Кратный синхронный режим способствует возникновению и усилению эффекта вибрационного перемещения. При этом синхронность обеспечивает максимальную скорость вибротранспортировки. Ранее предлагалось два вида алгоритмов управления кратной синхронизацией для трехроторной ВУ [2]: алгоритм взаимной синхронизации и алгоритм синхронизации с одним ведущим ротором, который и будет рассматриваться далее. ЦФ для него имеет вид:

$$Q(z) = 0,5 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)^2 + \sum_{r>1}^k \alpha_{1,r} (\dot{\varphi}_1 / n_1 \pm \dot{\varphi}_r / n_r)^2 \right\}, \quad (6)$$

где  $z = [x_c, \dot{x}_c, y_c, \dot{y}_c, \varphi, \dot{\varphi}, \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_3]^T$  и  $H^*$  – соответственно вектор состояния и заданное значение полной механической энергии системы, определяющее средние установившиеся скорости роторов  $\dot{\varphi}_i(\infty)$ ;  $\dot{\varphi}_i = \omega_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;  $0 < \alpha_{ij} < 1$  – весовые коэффициенты. Для обеспечения заданного соотношения угловых скоростей в ЦФ вводится дополнительное неотрицательное слагаемое  $(\dot{\varphi}_1 / n_1 \pm \dot{\varphi}_r / n_r)^2$ , где  $n_r$  задает требуемые кратности скоростей (знаки «+» и «-» задают противофазное или синфазное вращение роторов). При достижении цели управления  $Q(z) = 0$  получим  $H = H^*$  и заданные соотношения  $\dot{\varphi}_1 / n_1 = \dot{\varphi}_r / n_r$ . Алгоритм синхронизации с ЦФ (6) для системы ММ1 имеет вид [2]:

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\varphi}_1 + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_3}{n_3} \right) \right\}; \\ M_2 = -\gamma_2 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\varphi}_2 \pm \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_2}{n_2} \right) \right\}; \\ \tilde{M}_3 = -\gamma_3 \left\{ (1 - \alpha)(H - H^*)\dot{\varphi}_3 \pm \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\dot{\varphi}_1}{n_1} \pm \frac{\dot{\varphi}_3}{n_3} \right) \right\}. \end{cases} \quad (7)$$

Но, как видно из схемы (см. рис. 3), в случае упругих валов энкодеры выдают информацию о скоростях не дебалансов, а о скоростях двигателей  $\omega_{дi}$  и алгоритм (7) и выражение для расчета энергии  $H(t)$  следует модифицировать (при расчете  $H(t)$  пренебрегаем углом поворота платформы  $\varphi$  ввиду малости соответствующих слагаемых):

$$\begin{cases} M_1 = -\gamma_1 \left[ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\omega_{д1} + \frac{\alpha_{12}}{J_1 n_1} \left( \frac{\omega_{д1}}{n_1} - \frac{\omega_{д2}}{n_2} \right) + \frac{\alpha_{13}}{J_1 n_1} \left( \frac{\omega_{д1}}{n_1} - \frac{\omega_{д3}}{n_3} \right) \right]; \\ M_2 = -\gamma_2 \left[ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\omega_{д2} + \frac{\alpha_{12}}{J_2 n_2} \left( \frac{\omega_{д1}}{n_1} - \frac{\omega_{д2}}{n_2} \right) \right]; \\ M_3 = -\gamma_3 \left[ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\omega_{д3} + \frac{\alpha_{13}}{J_3 n_3} \left( \frac{\omega_{д1}}{n_1} - \frac{\omega_{д3}}{n_3} \right) \right]. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & 0.5m_0(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) - m\rho\dot{x}_C(\omega_{Д1} \sin \varphi_{Д1} + \omega_{Д2} \sin \varphi_{Д2} + \omega_{Д3} \sin \varphi_{Д3}) - \\ & - m\rho\dot{y}_C(\omega_{Д1} \cos \varphi_{Д1} + \omega_{Д2} \cos \varphi_{Д2} + \omega_{Д3} \cos \varphi_{Д3}) + 0.5J_1\omega_{Д1}^2 + 0.5J_2\omega_{Д2}^2 + \\ & + 0.5J_3\omega_{Д3}^2 + m_0g\dot{y}_C + m\rho g(\sin \varphi_{Д1} + \sin \varphi_{Д2} + \sin \varphi_{Д3}) + C_{01}x_C^2 + a + C_{02}y_C^2. \end{aligned}$$

Для двухроторной ВУ выражения для моментов имеют вид:

$$\left\{ M_i = -\gamma_i \left[ (1 - \alpha)(\tilde{H} - H^*)\omega_{Ди} + \frac{(-1)^{i+1} \alpha_i}{J_i n_i} \left( \frac{\omega_{Д1}}{n_1} - \frac{\omega_{Д2}}{n_2} \right) \right], \quad i = 1, 2. \right. \quad (9)$$

В схеме практической реализации алгоритма (9) для двухроторной ВУ (см. рис. 3) формирование управляющих моментов  $\tilde{M}_i$  происходит на основе информации о значениях скоростей и координат платформы и роторов  $\dot{x}_c^*, \dot{y}_c^*, \dot{\varphi}_1^*, \dot{\varphi}_2^*, x_c^*, y_c^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*$ . Последние шесть величин получаются с датчиков импульсов (ДИ) (энкодеров) роторов и датчиков положения (ДП) платформы через аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Оценки скоростей  $\dot{x}_c, \dot{y}_c$  могут быть восстановлены с помощью наблюдателя. С задающего устройства (ЗУ) на ПК поступают также значения заданной полной механической энергии  $\bar{H}^*$  и кратностей скоростей роторов  $n_1, n_2$ .

### Компьютерное исследование динамики трехроторной ВУ с учетом упругости карданных валов

В данном разделе проводится компьютерное моделирование динамики трехроторной ВУ (рис. 2). Значения параметров модели следующие:  $J_i = 0.014 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $J = 0.3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $m_n = 9 \text{ кг}$ ;  $m = 1.5 \text{ кг}$ ;  $c_1 = 5300 \text{ Н/м}$ ;  $c_2 = 5300 \text{ Н/м}$ ;  $c_3 = 164 \text{ Н/м}$ ;  $k_c = 0.01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\beta = 5 \text{ кг/с}$ ;  $\rho = 0.04 \text{ м}$ ;  $r = 0.2 \text{ м}$ .

Нахождение допустимых диапазонов изменения параметров упругого вала при постоянных электромеханических моментах.

На первом этапе моделировалась система ММ1 при традиционном управлении с помощью постоянных моментов. Результаты исследования при значении управляющих моментов  $M_i = 2,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$  представлены на рис. 4.

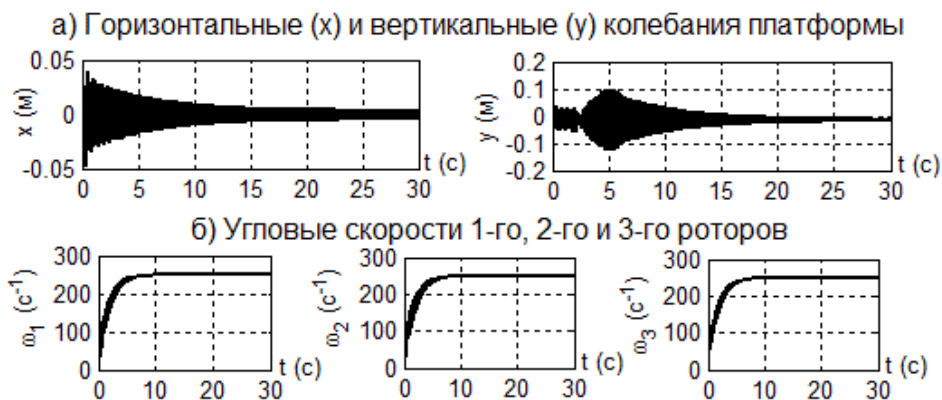


Рис. 4. Результаты моделирования ВУ без учета упругости (ММ1).

Из графиков видно, что все средние скорости  $\dot{\varphi}_{срi}$  одинаковы и выходят в

зарезонансную область частот  $\dot{\varphi}_{cpi} > \omega_{рез} = 30 \text{ с}^{-1}$ , а амплитуды колебаний платформы по вертикали и горизонтали стабилизируются.

Исследование влияния упругости на динамику системы ММ2 проводилось при  $100 \leq c_B \leq 3000 \text{ [Н}\cdot\text{м/рад]}$ ;  $0,01 \leq b_B \leq 0,5 \text{ [Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с]}$ , что соответствует частотам упругих колебаний вала  $120 \text{ с}^{-1} \leq \omega_y \leq 1000 \text{ с}^{-1}$ . Как показало моделирование, система теряет работоспособность при  $c_B < 300 \text{ [Н}\cdot\text{м/рад]}$  и  $b_B < 0,3 \text{ [Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с]}$  в связи со значительными биениями скоростей роторов (до 15% от заданного значения) и нестабильностью амплитуды колебаний платформы (рис. 5).

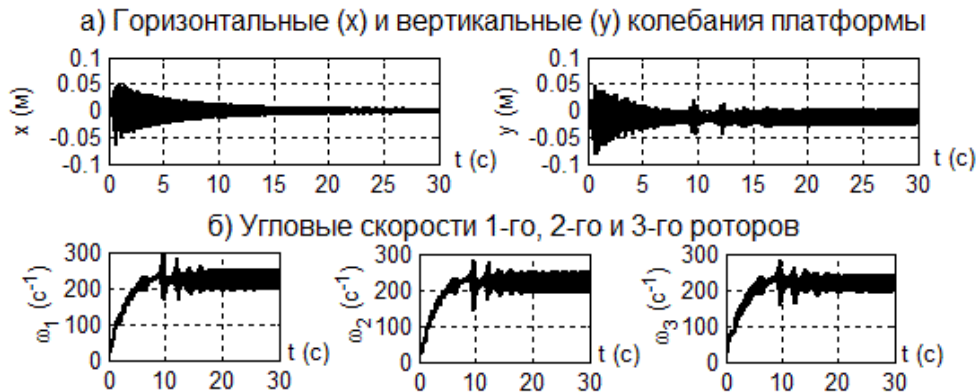


Рис.5. Результаты исследования ВУ при  $c_B=300 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $b_B=0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ .

### Исследование эффективности энергоскоростного алгоритма при управлении трехроторной виброустановкой.

*Решение задачи прохождения через резонанс в упругой системе.* В данном пункте проводится сравнительное компьютерное исследование двух моделей трехроторной виброустановки (ММ1 и ММ2).

Кроме того, для модели ММ2 проводится сравнительное моделирование при традиционном управлении с помощью постоянных электромеханических моментов и с применением предложенных алгоритмов (8).

На первом этапе исследования для модели ММ1 были найдены минимальные величины постоянных управляющих моментов, обеспечивающие выход скоростей всех роторов в зарезонансную область, причем на все три двигателя подавались электромеханические моменты, одинаковые по величине. На рис. 6 и рис. 7 представлены графики изменения угловых скоростей  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ , при значениях моментов  $M_i = 1,32 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и  $M_i = 1,35 \text{ Н}\cdot\text{м}$  соответственно.

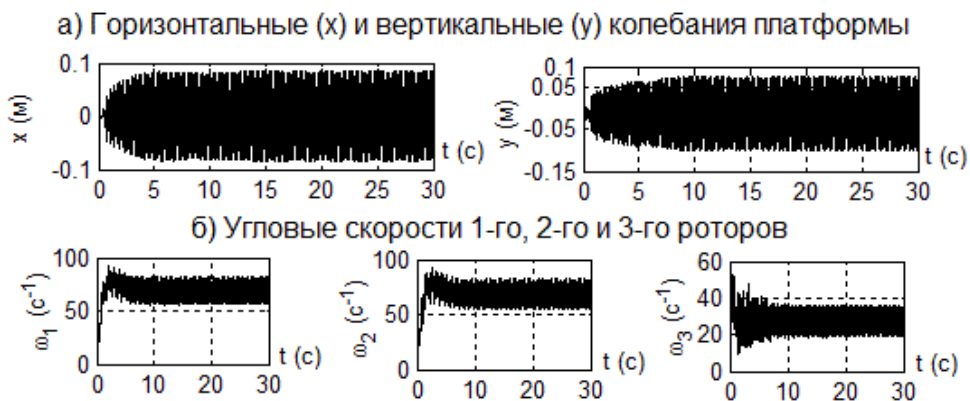


Рис. 6. Результаты исследования ММ1 при малых моментах  $M_i=1,32 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Как видно из графиков, если величины моментов малы ( $M_i = 1,32 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ), то скорость третьего ротора  $\dot{\varphi}_3$  на рис. 6 не выходит в резонансную область ( $\omega_{рез} = 30 \text{ с}^{-1}$ ), т.е. происходит «захват» скоростей, который называют "эффект Зоммерфельда". При этом скорости роторов остаются различными, т.е. синхронизация также отсутствует. При больших значениях моментов все три ротора вращаются с равными, но большими по величине средними скоростями из резонансной области (рис. 7). Следовательно, диапазон скоростей от  $\omega_{рез} = 30 \text{ с}^{-1}$  до  $\omega = 135 \text{ с}^{-1}$  выпадает из области стабильных рабочих скоростей ВУ.

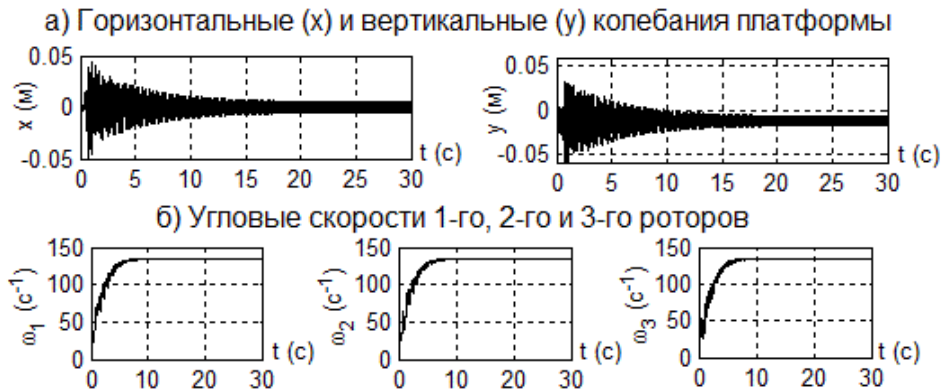


Рис.7. Результаты исследования модели ММ1 при  $M_i=1,35 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

На втором этапе аналогичное исследование проводилось для модели ММ2. Первоначально на вход системы подавались постоянные моменты. Как показало моделирование, наличие упругости карданных валов приводит к необходимости увеличения значений моментов примерно на 10÷15%, в противном случае из-за эффекта Зоммерфельда скорости некоторых роторов не могут выйти в резонансную область и синхронизм вращения теряется. Так, для модели трехроторной ВУ при коэффициентах жесткости и демпфирования в карданном вале  $c_B = 3000 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ,  $b_B = 0.5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$  минимальные величины моментов, обеспечивающих выход в резонансную область частот, составляют  $M_i = 1,7 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Далее проводилось исследование модели ММ2, при управлении с помощью предложенного алгоритма (8). Параметры алгоритма и параметры карданных валов выбраны совпадающими с параметрами системы ММ1, управляемой с помощью постоянных моментов, графики для которой представлены на рис. 7:  $H^* = 390 \text{ Дж}$ , что соответствует скоростям роторов  $\dot{\varphi}_i = 135 \text{ с}^{-1}$ ;  $\gamma_i = 0.0025$ ;  $\alpha_i = 0,25$ ;  $i = 1,2,3$ . Моделирование показало, что амплитуда колебаний платформы по вертикали и горизонтали после окончания переходного процесса стабильна, средние скорости роторов одинаковы. Более того, управление с помощью алгоритма (8) позволяет существенно сузить область недостижимых из-за эффекта Зоммерфельда резонансных частот. На рис. 8 представлены результаты моделирования системы ММ2 при  $H^* = 75 \text{ Дж}$  (что соответствует средним скоростям роторов, равным  $\dot{\varphi}_i = 60 \text{ с}^{-1}$ ) при параметрах упругого вала, критичными для управления с помощью постоянных моментов:  $c_B = 100 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ ;  $b_B = 0.1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ . На рис.9 дополнительно представлен график изменения одного из упругих моментов ( $M_{y1}$ ), величина которого в установившемся режиме оказалась  $|M_{y1}| < 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , что является допустимым с технической

точки зрения. Как видно из рисунка, в системе имеет место приближенная синхронизация и характер остальных графиков аналогичен графикам на рис.7. Таким образом, применение алгоритма (8) при управлении системой ММ2 позволяет значительно сузить область недостижимых зарезонансных частот до диапазона от  $\omega_{рез}=30 \text{ с}^{-1}$  до  $60 \text{ с}^{-1}$ .

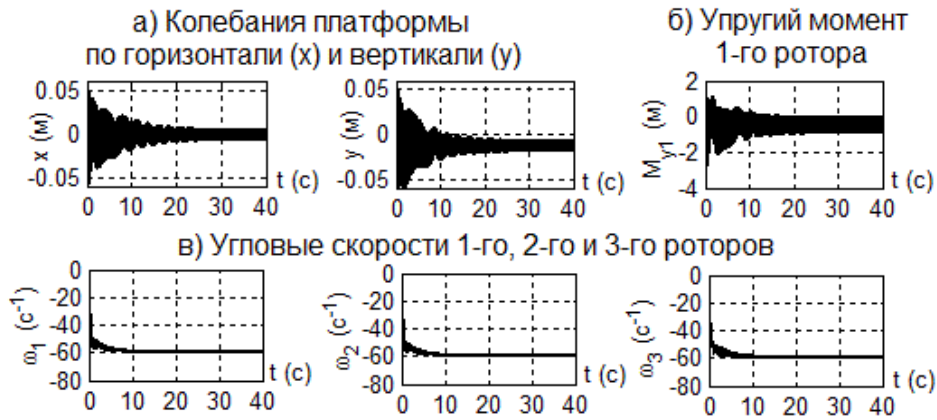


Рис. 8. Результаты моделирования ММ2 при управлении с помощью алгоритма (8) для малых заданных скоростей роторов.

*Исследование эффективности энергоскоростного алгоритма для стабилизации кратного синхронного режима.* При исследовании эффективности алгоритма (8) для управления кратными синхронными режимами трехроторной ВУ с упругими карданными валами (ММ2) варьировались заданные кратности скоростей роторов ( $n_i=1,2,3$ ). Также изменялись установившиеся скорости роторов путем задания величины энергии системы  $H^*$  ( $H^*=75 \text{ Дж}$ ,  $H^*=390 \text{ Дж}$ ,  $H^*=1865 \text{ Дж}$ ) при тех же значениях коэффициентов усиления  $\gamma_i$  и  $\alpha_i$ . На рис. 9 приведены результаты моделирования системы ММ2 при заданных кратностях скоростей роторов  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ . На рис. 10 и рис. 11 представлены номограммы зависимости времени синхронизации и времени переходного процесса от параметров упругого карданного вала. Как видно из рис. 9 – 11, в системе имеет место стабильный приближенный кратный синхронный режим при параметрах упругого вала, соответствующих диапазону частот упругих колебаний вала  $120 \text{ с}^{-1} \leq \omega_y \leq 1000 \text{ с}^{-1}$ . Упругий момент изменяется в пределах, соответствующих изменению управляющих электромеханических моментов, а время синхронизации и время переходного процесса уменьшается и практически не зависит от параметров упругости вала (рис. 10).

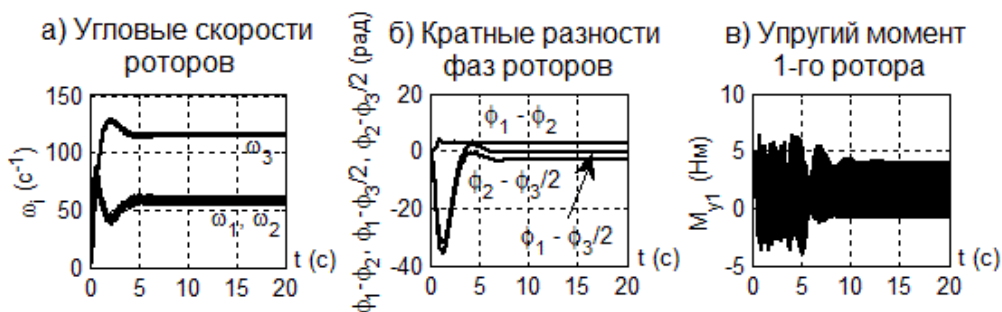


Рис. 9. Результаты исследования трехроторной ВУ при заданных кратностях скоростей роторов  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$ .

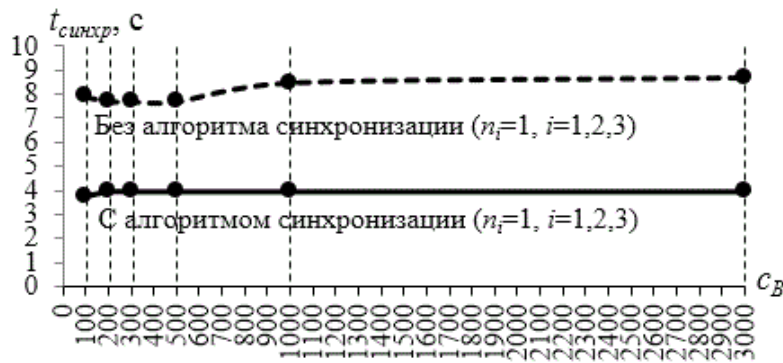


Рис. 10. Номограмма зависимости времени синхронизации от параметров карданного упругого вала.

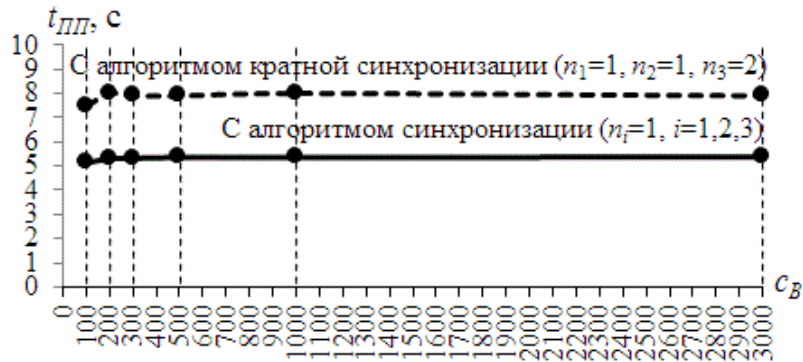


Рис. 11. Номограмма зависимости времени переходного процесса от параметров карданного упругого вала.

## Заключение

В статье предложены новые интегродифференцирующие алгоритмы управления для многороторных ВУ с учетом упругой связи двигателей и неуравновешенных роторов, позволяющие:

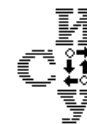
обеспечить прохождение через зону резонанса при пуске и разгоне роторов при пониженных величинах управляющих моментов;

обеспечить устойчивый приближенный кратный синхронный режим вращения роторов;

расширить полосу зарезонансных рабочих частот при управлении с помощью алгоритма (8) за счет обеспечения им устойчивого соотношения скоростей роторов уже на этапе пуска, что препятствует стабилизации одной из скоростей на частоте резонанса при разгоне роторов, т.е. алгоритм «подтягивает» скорость «проблемного» ротора таким образом, чтобы выполнялись соотношения  $\dot{\phi}_1/n_1 - \dot{\phi}_r/n_r \rightarrow 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Управление мехатронными вибрационными установками / под ред. И.И. Блехмана и А.Л. Фрадкова. – СПб.: Наука, 2001.
2. Tomchina O., Galitskaya V., Gorlatov D., Bagaev J. Master-slave and mutual multiple synchronization for multi-rotor vibration units // Cybernetics And Physics. – 2012. – Vol.1, No.3. – P.216-222.
3. Печенев А.В. О движении колебательной системы с ограниченным возбуждением вблизи резонанса // ДАН СССР. – 1986. – Т.290, №1. – С.12-15.



4. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994.
5. Томчин Д.А., Фрадков А.Л. Управление прохождением ротора через зону резонанса на основе метода скоростного градиента // Проблемы машиностроения и надежность машин. – 2005. – №5. – С. 66-71.
6. Fradkov A.L., Tomchina O.P., Tomchin D.A. Controlled passage through resonance in mechanical systems // Journal of Sound and Vibration. – 2011. – Vol.330, № 6. – P.1065-1073.
7. Томчина О.П., Резниченко В.В., Терентьева О.В. Исследование динамики двухроторной вибрационной установки с учетом упругости карданных валов // Современное машиностроение. Наука и образование: Материалы 3-й Международной научно-практической конференции. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – С. 841-850.
8. Шестаков В.М., Епишкин А.Е., Томчина О.П. Динамика автоматизированных электромеханических систем многороторных вибрационных установок – СПб.: СПбПУ, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Ереминым.

E-mail:

Томчина Ольга Петровна – otomchina@mail.ru;

Резниченко Виктор Васильевич – ReznichenkoSPb@gmail.com;

Горлатов Дмитрий Владимирович – dgorlatov@lan.spbgasu.ru.

УДК 621.396.6.049.77: 681.3.06

© 2014 г. **Чье Ен Ун**, д-р техн. наук  
(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск),  
**А.Б. Шеин**, канд. техн. наук  
(Чувашский государственный университет, Чебоксары)

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Описывается метод нахождения значений вектора переменных состояния электрической цепи на основе свойства ортогональности базисных функций. Алгоритм расчета сводится к решению систем алгебраических уравнений с теоретически любым временным шагом. Поэтому он подобен аналитическим методам расчета, но в отличие от них не имеет ограничения на порядок систем дифференциальных уравнений для схем замещения реальных устройств, что весьма выгодно отличает предложенный метод от аналитических методов расчета и является основным его достоинством.

**Ключевые слова.** Электрическая цепь, уравнение состояния, численное решение, ортогональность базисных функций.

### Введение

Применительно к численному расчету сложных электрических цепей разработано большое количество алгоритмов интегрирования уравнений переменных состояния [1, 2]. Однако поиски алгоритмов численного решения уравнений состояния в зависимости от топологии и свойств цепи, а также вида воз-



действий продолжают в направлении повышения удобства и производительности вычислений. Например, в работах [3 – 5] рассмотрены алгоритмы решения уравнений состояния при произвольных воздействиях, основанные на применении полиномиальной аппроксимации.

### Постановка задачи

Пусть  $\Phi_i(t)$  – полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке  $[a, b]$ . По известной теореме [6], если непрерывная функция  $F(t)$  ортогональна на отрезке  $[a, b]$  ко всем функциям  $\Phi_i(t)$ , т.е.

$$\int_a^b F(t)\Phi_i(t)dt = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \text{ тогда } F(t) \equiv 0 \text{ при } a \leq t \leq b.$$

Используем эту теорему для нахождения решения уравнения состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad (1)$$

где  $A$  – матрица размера  $k \times k$ , определяющая динамические свойства цепи;  $B$  – матрица размера  $k \times l$ , учитывающая влияние на цепь задающих (входных) воздействий;  $x(t)$  – вектор переменных состояний цепи размера  $k \times 1$ ;  $v(t)$  – вектор задающих воздействий на цепь размера  $l \times 1$ .

Сформулируем задачу следующим образом. Пусть

$$L(x) = F(t), \text{ где } L(x) = \frac{dx}{dt} - Ax - Bv. \quad (2)$$

Выберем систему базисных функций  $\Phi_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), составляющих часть некоторой полной системы. Пусть это будут интерполяционные функции  $\Phi_i$  для интерполирования функций  $F(t)$  на временном интервале  $(b - a)$  [7].

Решение задачи (2) будем искать в виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \Phi_i(t)x_i. \quad (3)$$

Выражение (3) подставим в уравнение (2), что дает невязку

$$R(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i L(\Phi_i(t)) - F(t). \quad (4)$$

Для точного решения задачи функция  $R \equiv 0$ , поэтому для получения приближенного решения, близкого к точному, необходимо подобрать значения  $x_i$  так, чтобы значение функции  $R$  было достаточно мало. В этом состоит суть метода Галеркина [6].

### Решение задачи

Потребуем, чтобы невязка  $R$  была ортогональна к базисным функциям  $\Phi_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), что при достаточно большом числе этих функций, в силу приведенного выше замечания, обеспечивает малость невязки. Таким образом, для определения значений коэффициентов  $x_i$  приходим к системе уравнений

$$\int_a^b \Phi_0(t)R(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)dt = 0,$$

$$\int_a^b \Phi_1(t)R(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)dt = 0, \dots,$$

$$\int_a^b \Phi_n(t)R(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)dt = 0$$

или более подробно

$$\sum_{i=0}^n \int_a^b \Phi_i(t)x_i L(\Phi_i(t))dt = \int_a^b \Phi_i(t)F(t)dt, \quad (i = \overline{0, n}).$$

В результате имеем векторно-матричное уравнение вида

$$\int_a^b \Phi_i(t) \left( \frac{dx}{dt} - Ax - Bv \right) dt = 0, \quad (5)$$

где в качестве базисных используем функции для линейного, квадратичного, кубического и других видов интерполирования [7].

Если за базисные принять функции для линейного интерполирования  $\Phi_0(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}$  и  $\Phi_1 = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$ , тогда, принимая длину временного интервала (отрезка)  $b - a = t_1 - t_0 = h$  в качестве аппроксимирующей функции  $F(t)$  на отрезке  $b - a$ , имеем многочлен

$$x(t) = \Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 = \frac{t_1 - t}{h} x_0 + \frac{t - t_0}{h} x_1. \quad (6)$$

Дифференцирование выражения (10) по времени  $t$  позволяет получить

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x_1 - x_0}{h}. \quad (7)$$

Подстановка выражений (2) и (3) в интегральное уравнение (5) дает уравнения

$$\int_0^h \frac{t_1 - t}{h} \left[ \frac{x_1 - x_0}{h} - A \left( \frac{t_1 - t}{h} x_0 + \frac{t - t_0}{h} x_1 \right) - Bv_0 \right] dt = 0,$$

$$\int_0^h \frac{t - t_0}{h} \left[ \frac{x_1 - x_0}{h} - A \left( \frac{t_1 - t}{h} x_0 + \frac{t - t_0}{h} x_1 \right) - Bv_1 \right] dt = 0,$$

последующее интегрирование которых в пределах от 0 до  $h$  позволяет получить равенства

$$\left[ -\left( \frac{t_1}{h} - \frac{1}{2} \right) E - \left[ t_1 \left( \frac{t_1}{h} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{t_1}{2} - \frac{h}{3} \right) \right] A \right] x_0 +$$

$$+ \left[ \left( \frac{t_1}{h} - \frac{1}{2} \right) E - \left[ \left( \frac{t_1}{2} - \frac{h}{3} \right) - t_0 \left( \frac{t_1}{h} - \frac{1}{2} \right) \right] A \right] x_1 - \left( t_1 - \frac{h}{2} \right) Bv_0 = 0, \quad (8)$$

$$- \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0}{h} \right) E + \left[ t_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0}{h} \right) - \left( \frac{h}{3} - \frac{t_0}{2} \right) \right] A \right] x_0 +$$

$$+ \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0}{h} \right) E - \left[ \left( \frac{h}{3} - \frac{t_0}{2} \right) - t_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{t_0}{h} \right) \right] A \right] x_1 - \left( \frac{h}{2} - t_0 \right) B v_1 = 0. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) применимы к случаю, когда момент времени  $t_0$  задан произвольно, а момент времени  $t_1$  определяется из равенства  $t_1 = t_0 + h$ . Для упрощения положим  $t_0 = 0$  и  $t_1 = h$ . Тогда уравнения (8) и (9) принимают вид

$$-(3E + 2hA)x_0 + (3E - hA)x_1 = 3hV_0, \quad (10)$$

$$-(3E + hA)x_0 + (3E - 2hA)x_1 = 3hV_1, \quad (11)$$

где  $V_0 = Bv_0$ ,  $V_1 = Bv_1$ .

Система уравнений (10) и (11) является линейной моделью конечного элемента на временном отрезке  $t_1 - t_0 = h$ , с помощью которого выполняется приближение решения уравнения состояния (1) к точному решению на этом отрезке [7]. Поэтому в общем случае для любого  $j$ -го отрезка имеем линейную модель конечного элемента в виде двух уравнений

$$-(3E + 2hA)x_{0j} + (3E - hA)x_{1j} = 3hV_{0j}, \quad (12)$$

$$-(3E + hA)x_{0j} + (3E - 2hA)x_{1j} = 3hV_{1j}, \quad (13)$$

где  $V_{0j} = Bv_{0j}$ ;  $V_{1j} = Bv_{1j}$ ;  $j$  – номер временного отрезка.

Обозначим  $3E + 2hA = G_0$ ,  $3E - hA = G_1$ ,  $3E + hA = G_2$ ,  $3E - 2hA = G_3$ . Тогда векторно-матричные уравнения (12) и (13) примут вид

$$-G_0x_{0j} + G_1x_{1j} = 3hV_{0j}, \quad (14)$$

$$-G_2x_{0j} + G_3x_{1j} = 3hV_{1j}. \quad (15)$$

Значения вектора переменных состояния  $x_{1j}$  при известных значениях вектора начальных условий  $x_{0j}$  можно определить, используя любое из уравнений приведенной выше системы. Уравнение (14) позволяет получить выражение

$$x_{1j} = G_1^{-1}G_0x_{0j} + 3hG_1^{-1}V_{0j}. \quad (16)$$

Уравнение (15) дает выражение для  $x_{1j}$  вида

$$x_{1j} = G_3^{-1}G_2x_{0j} + 3hG_3^{-1}V_{1j}. \quad (17)$$

Так как  $x_{02} = x_{11}$ ,  $x_{03} = x_{12}$ , ...,  $x_{0m} = x_{1(m-1)}$ ,  $x_{0(m+1)} = x_{1m}$ , ..., то любая из формул (16), (17) может использоваться как основная при реализации алгоритма решения уравнений состояния (1). Например, для формулы (16) имеем:

$$j = 1: x_{11} = G_1^{-1}G_0x_{01} + 3hG_1^{-1}V_{01},$$

$$j = 2: x_{12} = G_1^{-1}G_0(x_{02} = x_{11}) + 3hG_1^{-1}V_{02} =$$

$$= (G_1^{-1}G_0)^2 x_{01} + 3h(G_1^{-1}G_0)^1 G_1^{-1}V_{01} + 3hG_1^{-1}V_{02} \text{ и т.д.}$$

Однако более эффективным получается алгоритм решения уравнений состояния (1) на основе следующего подхода. Для  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  имеем:

$$j = 1: -G_0x_{01} + G_1x_{11} = 3hV_{01}, \quad -G_2x_{01} + G_3x_{11} = 3hV_{11};$$

$$j = 2: -G_0x_{02} + G_1x_{12} = 3hV_{02}, \quad -G_2x_{02} + G_3x_{12} = 3hV_{12};$$

$$j = 3: -G_0x_{03} + G_1x_{13} = 3hV_{03}, \quad -G_2x_{03} + G_3x_{13} = 3hV_{13}; \dots;$$

$$\begin{aligned}
j = m-1: & -G_0x_{0(m-1)} + G_1x_{1(m-1)} = 3hV_{0(m-1)}, \quad -G_2x_{0(m-1)} + G_3x_{1(m-1)} = 3hV_{1(m-1)}; \\
j = m: & -G_0x_{0m} + G_1x_{1m} = 3hV_{0m}, \quad -G_2x_{0m} + G_3x_{1m} = 3hV_{1m}; \\
j = m+1: & -G_0x_{0(m+1)} + G_1x_{1(m+1)} = 3hV_{0(m+1)}, \quad -G_2x_{0(m+1)} + G_3x_{1(m+1)} = 3hV_{1(m+1)}; \dots
\end{aligned}$$

Выполним жесткое объединение временных отрезков, полагая,  $x_{02} = x_{11}$ ,  $x_{03} = x_{12}$ , ...,  $x_{0m} = x_{1(m-1)}$ ,  $x_{0(m+1)} = x_{1m}$ , ... . Для этого просуммируем каждое второе уравнение линейной модели элемента для  $j$ -го отрезка с первым уравнением модели для  $(j+1)$ -го. Имеем  $-G_2x_{01} + (G_3 - G_0)x_{02} + G_1x_{03} = 6hV_{02}$ ,  $-G_2x_{02} + (G_3 - G_0)x_{03} + G_1x_{04} = 6hV_{03}$ , ...,  $-G_2x_{0(m-1)} + (G_3 - G_0)x_{0m} + G_1x_{0(m+1)} = 6hV_{0m}$  и т.д.

В результате для определения значений вектора переменных состояния  $x(t)$  имеем систему уравнений так называемого ленточного вида [7]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -G_0 & G_1 & & & & \\ \hline -G_2 & G_3 - G_0 & G_1 & & & \\ \hline & -G_2 & G_3 - G_0 & G_1 & & \\ \hline & & -G_2 & G_3 - G_0 & G_1 & \\ \hline & & & \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array} = 3h, \quad \begin{array}{|c|} \hline x_{01} \\ \hline x_{02} \\ \hline x_{03} \\ \hline x_{04} \\ \hline \dots \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline V_{01} \\ \hline 2V_{02} \\ \hline 2V_{03} \\ \hline 2V_{04} \\ \hline \dots \\ \hline \end{array}, \quad (18)$$

где  $G_0 = 3E + 2hA$ ;  $G_1 = 3E - hA$ ;  $G_2 = 3E + hA$ ;  $G_3 = 3E - 2hA$ ;  $G_3 - G_0 = 3E - 2hA - 3E - 2hA = -4hA$ ; индекс нуль, указывающий на начальные значения вектора переменных состояния и вектора входных воздействий на отрезке, порядковый номер которого обозначен вторым индексом, может быть опущен.

Если многочлен  $x(t)$ , аппроксимирующий функцию  $F(t)$ , представить в виде

$$x(t) = \Phi_0x_0 + \Phi_1x_1 = \frac{t_1 - t}{h}x_0 + \frac{t - t_0}{h}x_1 = \left(1 - \frac{t}{h}\right)x_0 + \frac{t}{h}x_1, \text{ то получим:}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right) \left\{ \frac{x_1 - x_0}{h} - A \left[ \left(1 - \frac{t}{h}\right)x_0 + \frac{t}{h}x_1 \right] - Bv_0 \right\} dt &= 0, \\
\int_0^h \frac{t}{h} \left\{ \frac{x_1 - x_0}{h} - A \left[ \left(1 - \frac{t}{h}\right)x_0 + \frac{t}{h}x_1 \right] - Bv_1 \right\} dt &= 0,
\end{aligned}$$

раскрывая которые, находим уравнения (10) и (11), определяющие конечный элемент  $-(3E + 2hA)x_0 + (3E - hA)x_1 = 3hBv_0$ ,  $-(3E + hA)x_0 + (3E - 2hA)x_1 = 3hBv_1$ .

В случае использования для аппроксимации  $F(t)$  многочленов второй, третьей ...,  $n$ -й степени это значительно упрощает получение системы уравнений, аналогичной (18), решение которой можно найти, применяя точные методы решения систем алгебраических уравнений, – например, метод Гаусса, или метод Жордана – Гаусса, или используя следующий алгоритм.

1. Первая строка матричного уравнения (18) дает формулу для вычисления значений вектора переменных состояния  $x_2$  на втором временном отрезке по известным значениям вектора переменных состояния  $x_1$  на первом временном отрезке, которые задаются как исходные для решения уравнения состояния (1):

$$x_2 = G_1^{-1}G_0x_1 + 3hG_1^{-1}V_1. \quad (19)$$

2. Остальные уравнения системы равенств (18) идентичны и могут быть представлены выражением вида  $-G_2x_{j-1} + (G_3 - G_0)x_j + G_1x_{j+1} = 6hV_j$ ,  $j \geq 2$ , из которого нетрудно получить формулу для вычисления значений вектора переменных состояния  $x_{j+1}$  для  $j \geq 2$ :

$$x_{j+1} = -G_1^{-1}(G_3 - G_0)x_j + G_1^{-1}G_2x_{j-1} + 6hG_1^{-1}V_j. \quad (20)$$

3. Таким образом, алгоритм расчета переходных процессов в устройстве может быть организован в виде последовательности формул (19) и (20):

$$x_2 = G_1^{-1}G_0x_1 + 3hG_1^{-1}V_1, \quad x_{j+1} = -G_1^{-1}(G_3 - G_0)x_j + G_1^{-1}G_2x_{j-1} + 6hG_1^{-1}V_j, \quad j \geq 2,$$

где  $V_1 = Bv_1$ ,  $V_j = Bv_j$ .

Использование свойства ортогональности вещественных функций для решения уравнения состояния (1) приводит к алгебраическим системам уравнений, из которых значения вектора переменных состояния определяются точными методами. Точность решения уравнений состояния (1) определяется степенью многочлена, принятого для аппроксимации вещественной функции  $F(t)$ , и в силу этого – для аппроксимации траекторий движения переменных состояния  $x(t)$ .

### Заключение

Метод нахождения значений вектора переменных состояния  $x(t)$  сводится к решению систем алгебраических уравнений с теоретически любым временным шагом  $h$ . Поэтому он подобен аналитическим методам расчета, но в отличие от них не имеет ограничения на порядок систем дифференциальных уравнений для схем замещения реальных устройств, что выгодно отличает предложенный метод от аналитических методов расчета и является основным его достоинством. В связи с этим, а также в силу своей эффективности, быстроты и удобства при выполнении расчетов предложенный метод можно использовать с целью машинного анализа сложных электрических цепей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. Машинный анализ электронных схем: алгоритмы и вычислительные методы. – М.: Энергия, 1980.
2. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1998.
3. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Метод решения уравнений состояния электронных устройств // Проектирование и технология электронных средств. – 2012. – №1. – С.19-25.
4. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Решение уравнений состояния в задачах схемотехнического моделирования при произвольных воздействиях // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. – 2012. – №4. – С.45-51.
5. Чье Ен Ун, Шеин А.Б. Метод решения уравнений переменных состояния электронных устройств на основе обнуления невязки // Проектирование и технология электронных средств. – 2014. – №1. – С.17-20.
6. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962.
7. Шеин А.Б., Лазарева Н.М. Методы проектирования электронных устройств. – М.: Инфраинженерия, 2011.

*E-mail:*

Чье Ен Ун – [chye@ais.khstu.ru](mailto:chye@ais.khstu.ru);

Шеин Александр Борисович – [chye@ais.khstu.ru](mailto:chye@ais.khstu.ru).