УДК 519.7

© 2015 г. **С.Н. Чуканов**, д-р техн. наук
(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал)

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СЕТЕЙ*

В работе рассмотрен метод количественной оценки управляемости и наблюдаемости сложных динамических сетей. Предложены метрики управляемости и наблюдаемости, которые задаются в форме функции множеств узлов сети и построены как функции собственных значений грамианов управляемости и наблюдаемости узлов сети. Показано, что функции собственных значений грамианов управляемости и наблюдаемости узлов сети являются модулярными. Предложены количественные меры оценки взаимодействия узлов сложной динамической сети на основе построения кросс-грамианов. Проведена оценка неопределенности меры взаимодействия узлов сети.

Ключевые слова*:* сложная динамическая сеть, управляемость, наблюдаемость, кросс-грамиан, количественная мера взаимодействия.

Введение

Управляемость и наблюдаемость являются основополагающими структурными свойствами динамических систем [1]. В последнее время отмечается возобновление интереса к основополагающим структурным свойствам динамических систем – управляемости и наблюдаемости в контексте сложных динамических сетей (электрические сети, Internet, транспортные и социальные сети и т.д.) [2 – 4]. Один из актуальных вопросов – это вопрос количественной оценки управляемости и наблюдаемости сложных динамических сетей [5 – 6]. Использование метрик управляемости и наблюдаемости, задаваемых как функции множеств узлов сети, показывает, что сильно связные динамические сети лучше поддаются управлению и наблюдению, чем слабо связные. Для формирования полной управляемости и наблюдаемости сети необходимо реализовать оптимальный выбор размещения приборного состава в узлах сети нахождением экстремальных значений метрик управляемости и наблюдаемости, которые могут быть построены на основе функций от грамианов управляемости и наблюдаемости. Функции от собственных значений грамианов управляемости и наблюдаемости (например,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-07-00272 и № 14-08-01132).

trace (·)) являются модулярными функциями множеств элементов сети, что позволяет исследовать структурные свойства сети.

Формирование грамианов управляемости и наблюдаемости сложной динамической сети

Рассмотрим линейную модель сложной динамической сети как модель системы управления динамическими объектами:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ – вектор состояния сети с начальным состоянием $x_0 = x(0)$; $u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ – вектор управления; $y(t) \in \boldsymbol{R}^l$ – вектор измерения. В случае LTI (linear time-invariant) системы: $A(t) = A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$; $B(t) = B \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$; $C(t) = C \in \boldsymbol{R}^{l \times n}$ будем обозначать такую систему $[A, B, C]$. Динамическая система является управляемой в течение интервала времени $[0, t]$, если для заданных состояний $x_0, x_1(t) \in \boldsymbol{R}^n$ существует такой управляющий входной сигнал $u(\cdot): [0, t] \to \boldsymbol{R}^m$, который переводит систему из состояния x_0 в состояние $x_1(t)$: $x_0 \to x_1(t)$. Реальные сложные сети описываются нелинейными моделями динамики, но локальная линеаризация гладких динамических систем позволяет привести эти нелинейные модели к виду (1).

Для определения управляемости системы применяется ранговое условие Калмана, которое является бинарным показателем. Существуют количественные показатели управляемости и наблюдаемости в сложных сетях, основанные на определении грамианов управляемости и наблюдаемости. Функцию управляемости линейной системы можно определить в форме:

$$L_c(x_0) = \min_{u \in L_2(\cdot)} \int_{-\infty}^{0} \|u(t)\|^2 dt; x(-\infty) = 0; x(0) = x_0.$$

Значение функции управляемости – минимальное количество энергии управления, необходимое для достижения состояния x_0. Функция наблюдаемости – в форме:

$$L_o(x_0) = \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 dt; x(0) = x_0; u(t)\big|_{0 \le t < \infty} = 0.$$

Значение функции наблюдаемости – количество энергии, формируемое на выходе системы состоянием x_0.

Количественная оценка управляемости – грамиан управляемости, который имеет конечное значение как для устойчивых, так и для неустойчивых сетей [8, 9]:

$$W_c = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(\tau)\tau} B(\tau) B(\tau)^T e^{A(\tau)^T \tau} d\tau; T \ge 0. \tag{2}$$

Для устойчивых LTI сетей можно сформировать грамиан управляемости

[1]: $W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$, причем $L_c(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T W_c^{-1} x_0$; в этом случае грамиан W_c является положительно определенным решением уравнения А.М. Ляпунова:

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T .$$

Количественная оценка наблюдаемости – грамиан наблюдаемости:

$$W_o = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(\tau)^T\tau} C(\tau)^T C(\tau) e^{A(\tau)\tau} d\tau; T \geq 0 . \qquad (3)$$

Для устойчивых LTI сетей можно сформировать грамиан наблюдаемости: $W_o = \int_0^\infty e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$, причем $L_o(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T W_o x_0$; в этом случае грамиан W_o являются положительно определенным решением уравнения Ляпунова:

$$A^T W_o + W_o A = -C^T C .$$

Функция сети $\mathrm{trace}(W_c)$ обратно пропорциональна средней энергии, необходимой для перевода динамической сети из начального состояния в требуемое в пространстве векторов состояний сети. Из матрицы W_c можно сформировать и другие скалярные величины, которые являются функциями собственных значений матрицы W_c (например, $\det(W_c)$).

Для линейной системы (1) введем H_2-норму [10], которая, в соответствии с теоремой Парсеваля, может интерпретироваться как энергия реакции системы на входной единичный импульс: $\|H\|_2^2 = \|h(t)\|_2^2 = \mathrm{trace}\left(\int_0^\infty h(t)^T h(t) dt\right)$, где $h(t) = Ce^{At}B$ – импульсная матрица отклика. Связь между H_2-нормой и грамианом управляемости LTI системы определяется из соотношения:

$$\|H\|_2^2 = \mathrm{trace}\left(C\left(\int_0^\infty e^{At} BB^T e^{A^T t} dt\right)C^T\right) = \mathrm{trace}\left(B^T W_o B\right) = \mathrm{trace}\left(CW_c C^T\right).$$

Модулярность функций множеств сети trace(W_c) и trace(W_o)

Введем понятие модулярных функций [11]. Для данного конечного множества $V = \{1,...,M\} \in Z_+$ функция множества $f : 2^v \to \mathrm{P}$ назначает действительное число к каждому подмножеству $v \in V$. Функция множества f модулярная, если и только если для любого подмножества $S \subseteq V$ она может быть выражена как $f(S) = w(\varnothing) + \sum_{s \in S} w(s); w(\cdot) : V \to \mathrm{P}$, т.е. каждый элемент множества дает самостоятельный вклад в значение функции.

Пусть заданы матрица устойчивой LTI системы A и входная матрица B, сформированная из столбцов $V = \{b_1,...,b_M\}$.

Поставим задачу выбора подмножества S столбцов матрицы B для максимизации метрики управляемости $\mathrm{trace}(W_c)$ Для подмножества $S \subseteq V$ сформируем

$B_S = \text{span}[b_s]; s \in S$ и грамиан управляемости $W_S = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B_S B_S^T e^{A^T \tau} d\tau$. Так как $B_S B_S^T = \sum_{s \in S} b_s b_s^T$, то можно записать:

$$W_S = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B_S B_S^T e^{A^T \tau} d\tau = \sum_{s \in S} \int_0^{\infty} e^{A\tau} b_s b_s^T e^{A^T \tau} d\tau = \sum_{s \in S} W_s .$$

Следовательно, функция $\text{trace}(W_S) = \sum_{s \in S} \text{trace}(W_s)$ является модулярной.

Модулярная функция $\text{trace}(W_c^i)$ для i-го узла сети может быть использована для определения меры на основе энергии управления, описывая характеристику узла с точки зрения его способности перевода системы в пространстве состояний входным сигналом управления i-й компоненты сети; грамиан управляемости W_c^i узла сети удовлетворяет соотношению Ляпунова для i-й компоненты сети: $AW_c^i + W_c^i A^T + b_i b_i^T = 0$, где b_i – i-столбец матрицы B. Модулярная функция $\text{trace}(W_o^j)$ для j-го узла сети может быть использована для определения меры наблюдаемости сети по информации j-го узла, описывая характеристику узла с точки зрения его способности сформировать энергию на выходе, соответствующую состоянию сети; грамиан управляемости W_o^j удовлетворяет соотношению Ляпунова для j-й компоненты сети: $A^T W_o^j + W_o^j A + c_j^T c_j = 0$, где c_j – j-я строка матрицы C.

Количественная мера взаимодействия подсистем сети

Рассмотрим норму Ганкеля системы [10], квадрат которой равен: $\|G\|_H^2 = \lambda_{\max}(W_c W_o)$. С системой $[A, B, C]$ свяжем совокупность подсистем LTI SISO (single-input and single-output) $\lfloor A, b_i, c_j \rfloor$ с грамианами W_c^i, W_o^j, которые определяются уравнениями Ляпунова:

$$\begin{aligned} &AW_c^i + W_c^i A^T + b_i b_i^T = 0; \\ &A^T W_o^j + W_o^j A + c_j^T c_j = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где b_i – i-й столбец матрицы B; c_j – j-я строка матрицы C. Значение квадрата нормы Ганкеля $\|G_{ij}\|_H^2$ позволяет оценивать возможность i-го входа и j-го выхода SISO подсистемы $\lfloor A, b_i, c_j \rfloor$ с точки зрения управляемости и наблюдаемости вектора состояния системы соответственно. Грамианы управляемости и наблюдаемости W_o, W_c всей системы можно декомпозировать в форме: $W_c = \sum_{i=1}^{m} (W_c^i); W_o = \sum_{i=1}^{l} (W_o^j)$; произведение грамианов $W_o W_c$ системы можно представить в виде суммы произведений $W_c^i W_o^j$ для SISO-подсистем: $W_o W_c = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\left(W_c^i W_o^j\right)$, следовательно:

$$\operatorname{trace}\left(W_o W_c\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\operatorname{trace}\left(W_c^i W_o^j\right). \qquad (5)$$

Норма Ганкеля может быть определена из кросс-грамиана W_{co}:

$$W_{co} = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{A(\tau)\tau} B(\tau) C(\tau) e^{A(\tau)\tau} d\tau . \qquad (6)$$

Для устойчивых LTI сетей можно сформировать кросс-грамиан: $W_{co} = \int_{t_0}^{\infty} e^{A\tau} B C e^{A\tau} d\tau$; в этом случае грамиан W_{co} является решением уравнения Ляпунова: $W_{co} A + A W_{co} + BC = 0$. Квадрат нормы Ганкеля для (i, j) SISO-подсистемы равен: $\left\|G_{ij}\right\|_H^2 = \lambda_{\max}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right)$.

Взаимодействие i-й подсистемы с j-й подсистемой с точки зрения управляемости и наблюдаемости одной системы на другую можно оценить построением матрицы участия (Participation Matrix – PM [12, 13]). Компонента ненормированной PM-матрицы Φ_{ij} для подсистем (i, j) может быть определена на основе грамиана W_{co}^{ij}: $\Phi_{ij} = \operatorname{trace}\left(W_c^i W_o^j\right) = \operatorname{trace}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right)$. При построении нормированной PM-матрицы компоненты определяются из соотношения:

$$\varphi_{ij} = \operatorname{trace}\left(W_c^i W_o^j\right)\left(\sum_{i,j}\operatorname{trace}\left(W_c^i W_o^j\right)\right)^{-1} = \operatorname{trace}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right)\left(\sum_{i,j}\operatorname{trace}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right)\right)^{-1}, \qquad (7)$$

причем $\sum_{i,j}\varphi_{ij} = 1$.

Пример 1. Сформируем меры взаимодействия подсистем сети, канонические соотношения которой:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{3} b_i u_i ; x(0) = x_0 ; y_j = c_j x ; j = 1,2,3$$

для (i, j) SISO-подсистем, входные сигналы которых $u_i ; i = 1,2,3$, а выходные – $y_j ; j = 1,2,3$ Пусть система $[A, B, C]$ задается матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}001 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}001 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}001 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -0{,}001 \end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}^T\\ b_2=\begin{pmatrix}0&0&2&0&0&0\end{pmatrix}^T\\ b_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&4&0\end{pmatrix}^T\end{array}\right| B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&4&0\end{pmatrix}^T;$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ c_2=\begin{pmatrix}0&0&0&2&0&0\end{pmatrix}\\ c_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\right| C=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}.$$

Решая уравнения Ляпунова для грамианов W_c, W_o, W_{co}, найдем:

$$W_c=W_o=W_{co}\approx 10^3\cdot\begin{pmatrix}0{,}25&0{,}00025&0&0&0&0\\0{,}00025&0{,}25&0&0&0&0\\0&0&1{,}0&0{,}0005&0&0\\0&0&0{,}0005&1{,}0&0&0\\0&0&0&0&4{,}0&0{,}005\\0&0&0&0&0{,}005&4{,}0\end{pmatrix};$$

произведение грамианов $W_c\cdot W_o$:

$$W_c\cdot W_o=W_{co}^2\approx 10^6\cdot\begin{pmatrix}0{,}0625&0{,}0001&0&0&0&0\\0{,}0001&0{,}0625&0&0&0&0\\0&0&1{,}0&0{,}001&0&0\\0&0&0{,}001&1{,}0&0&0\\0&0&0&0&16{,}0&0{,}008\\0&0&0&0&0{,}008&16{,}0\end{pmatrix}.$$

По грамианам W_c^i, W_o^j найдем ненормированную матрицу РМ: $\Phi=\left[\mathrm{tr}\left(W_c^iW_o^j\right)\right]=10^6\cdot\begin{pmatrix}0{,}125&0&0\\0&2{,}0&0\\0&0&32{,}0\end{pmatrix}$; $\sum_{ij}\Phi_{ij}=10^6\cdot 34{,}12$ и нормированную матрицу РМ: $\varphi=\dfrac{\Phi}{\sum_{ij}\Phi_{ij}}=\begin{pmatrix}0{,}0037&0&0\\0&0{,}0586&0\\0&0&0{,}9377\end{pmatrix}.$

Суммы элементов строк являются мерами управляемости узлами сети:

$$\varphi_c=\begin{pmatrix}\sum_j\varphi_{1j}&\sum_j\varphi_{2j}&\sum_j\varphi_{3j}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0{,}0037\\0{,}0586\\0{,}9377\end{pmatrix},$$

а суммы элементов столбцов являются мерами наблюдаемости сети по информации узлов:

$$\varphi_o = \left(\sum_i \varphi_{i1} \quad \sum_i \varphi_{i2} \quad \sum_i \varphi_{i3} \right) = (0{,}0037 \quad 0{,}0586 \quad 0{,}9377).$$

Из рассмотрения матрицы РМ можно сделать вывод о слабой связи между узлами сети, что указывает на неполную управляемость и наблюдаемость сети.

Оценка неопределенности меры взаимодействия подсистем сети

Неопределенность ΔA матрицы A в соотношении (1) приводит к неопределенности грамиана W_{co}^{ij}, верхнюю границу которой можно оценить из соотношения [14]:

$$\left\| \Delta W_{co}^{ij} \right\| \le \left\| \Delta W_{co}^{ij} \right\|_F \le \left\| \left(I_n \otimes A + A^T \otimes I_n \right)^{-1} \right\| \left(2n \|\Delta A\| \cdot \left\| W_{co}^{ij} \right\| \right), \tag{8}$$

где $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса, $\|A\|^2 = \lambda_{\max}\left(A^H A\right)$. Поскольку $\left\| G_{ij} \right\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right)} \le \left\| W_{co}^{ij} \right\|$, то $\left\| \Delta W_{co}^{ij} \right\|$ является верхней границей неопределенности в норме Ганкеля $\left\| G_{ij} \right\|_H$. Элемент (i,j) матрицы РМ ограничен: $\Phi_{ij} = \mathrm{trace}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right) \le \left\| W_{co}^{ij} \right\|^2$, следовательно, $\left\| \Delta W_{co}^{ij} \right\|$ определяет верхнюю границу неопределенности $\Delta\Phi_{ij}$:

$$\left| \Delta\Phi_{ij} \right| = \left| \mathrm{trace}\left(\left(W_{co}^{ij} + \Delta W_{co}^{ij}\right)^2\right) - \mathrm{trace}\left(\left(W_{co}^{ij}\right)^2\right) \right| \approx \left| \mathrm{trace}\left(2 W_{co}^{ij} \cdot \Delta W_{co}^{ij}\right) \right|.$$

Пример 2. Рассмотрим динамику сети примера 1 при наличии возмущения ΔA матрицы A, определяющее взаимодействие узлами сети; ненулевые компоненты матрицы ΔA: $\Delta A_{14} = \Delta A_{16} = \Delta A_{32} = \Delta A_{36} = \Delta A_{22} = \Delta A_{56} = 0{,}1$:

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} -0{,}001 & -1 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 1 & -0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}001 & -2 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & -0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & -0{,}001 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -0{,}001 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнения Ляпунова, найдем квадрат матрицы кросс-грамина:

$$W_c \cdot W_o = W_{co}^2 \approx 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}072 & 0{,}0 & -0{,}057 & 0{,}0 & -0{,}419 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}072 & 0{,}0 & -0{,}029 & 0{,}0 & -0{,}105 \\ -0{,}029 & 0{,}0 & 1{,}009 & 0{,}001 & -0{,}496 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -0{,}057 & 0{,}001 & 1{,}009 & 0{,}0 & -0{,}248 \\ -0{,}105 & 0{,}0 & -0{,}248 & 0{,}0 & 15{,}959 & 0{,}008 \\ 0{,}0 & -0{,}419 & 0{,}0 & -0{,}496 & 0{,}008 & 15{,}959 \end{pmatrix}.$$

По квадратам матрицы кросс-граминов узлов (i,j) найдем ненормированную матрицу РМ:

$$\Phi = \left[\mathrm{tr}\left(W_c^i W_o^j\right)\right] = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1256 & 0{,}00293 & 0{,}00172 \\ 0{,}00293 & 1{,}9883 & 0{,}0105 \\ 0{,}00172 & 0{,}0105 & 31{,}936 \end{pmatrix}; \ \sum_{ij} \Phi_{ij} = 10^6 \cdot 34{,}0802$$

и нормированную матрицу РМ:

$$\varphi = \frac{\Phi}{\sum_{ij} \Phi_{ij}} = \begin{pmatrix} 0{,}003681 & 0{,}0000858 & 0{,}0000504 \\ 0{,}000858 & 0{,}058265 & 0{,}0003077 \\ 0{,}0000504 & 0{,}0003077 & 0{,}9370837 \end{pmatrix};$$

то есть возмущение матрицы φ, обусловленное ΔA, равно:

$$\Delta\varphi = \begin{pmatrix} -0{,}000019 & 0{,}0000858 & 0{,}0000504 \\ 0{,}000858 & -0{,}000335 & 0{,}0003077 \\ 0{,}0000504 & 0{,}0003077 & -0{,}0009163 \end{pmatrix}.$$

Суммы элементов строк являются мерами управляемости узлами сети:

$$\varphi_c = \begin{pmatrix} \sum_j \varphi_{1j} & \sum_j \varphi_{2j} & \sum_j \varphi_{3j} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0{,}00382 \\ 0{,}05866 \\ 0{,}93744 \end{pmatrix};$$

суммы элементов столбцов являются мерами наблюдаемости сети по информации узлов: $\varphi_o = \begin{pmatrix} \sum_i \varphi_{i1} & \sum_i \varphi_{i2} & \sum_i \varphi_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}00382 & 0{,}05866 & 0{,}93744 \end{pmatrix}.$

Возмущение вектора φ_c, обусловленное ΔA, равно: $\Delta\varphi_c = \begin{pmatrix} 0{,}00012 \\ 0{,}00006 \\ -0{,}00026 \end{pmatrix}$;

возмущение вектора φ_o: $\Delta\varphi_o = \begin{pmatrix} 0{,}00012 & 0{,}00006 & -0{,}00026 \end{pmatrix}$. Из рассмотрения матрицы РМ можно сделать вывод о сильной связи между узлами сети, что указывает на полную управляемость и наблюдаемость сети.

Заключение

В работе рассмотрен метод количественной оценки управляемости и наблюдаемости сложных динамических сетей. Предложены метрики управляемости и наблюдаемости, которые задаются в форме функции множеств узлов сети. Метрики управляемости и наблюдаемости построены как функции собственных значений грамианов управляемости и наблюдаемости узлов сети. Количественная оценка управляемости и наблюдаемости сложных динамических сетей формируется на основе формирования собственных значений кросс-грамианов узлов сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in mathematical system theory. – New York: McGraw-Hill. – Vol. 33. – 1969.
2. *Lombardi A., Hörnquist M.* Controllability analysis of networks // Physical Review E. – 2007. – Vol. 75, № 5. – P. 056110.

3. *Newman M.E.J.* The structure and function of complex networks / /SIAM review. – 2003. – T. 45, № 2. – P. 167-256.
4. *Newman M.E.J., Barabasi A.L., Watts D.J.* The structure and dynamics of networks. – Princeton University Press, 2006.
5. *Olshevsky A.* Minimum Input Selection for Structural Controllability // Source: http://arxiv.org/pdf/1407.2884.pdf (дата обращения 20.08.2015).
6. *Summers T.H., Cortesi F.L., Lygeros J.* On submodularity and controllability in complex dynamical networks // Source: http://arxiv.org/pdf/1404.7665 (дата обращения 20.08.2015).
7. *Yuan Zh., Zhao Ch., Di Z., Wang W., Lai Y.* Exact Controllability of Complex Networks // Source: http://arxiv.org/pdf/1310.5806.
8. *Чуканов С.Н.* Оценивание взаимодействия каналов систем управления, инвариантное к преобразованию вектора состояния // Авиакосмическое приборостроение. – 2006. – № 6. – С. 34-36.
9. *Чуканов С.Н.* Меры управляемости и наблюдаемости взаимодействующих систем управления // Авиакосмическое приборостроение. – 2007. – № 12. – С. 18-20.
10. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable feedback control: analysis and design. – New York : Wiley, 2007.
11. *Fujishige S.* Submodular functions and optimization // Annals of discrete mathematics.– 2005. – Vol. 58.
12. *Halvarsson B*. Interaction Analysis in Multivariable Control Systems: Applications to Bioreactors for Nitrogen Removal. – Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis, 2010.
13. *Salgado M.E., Conley A.* MIMO interaction measure and controller structure selection // International Journal of Control. – 2004. – Vol. 77, №. 4. – P. 367-383
14. *Khaki-Sedigh A., Moaveni B.* Control configuration selection for multivariable plants. – Springer Science & Business Media. – Vol. 391. – 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.В. Шалобановым.

E-mail:
Чуканов Сергей Николаевич – ch_sn@mail.ru.