



УДК 519

© 2016 г. **О.С. Амосов**, д-р техн. наук  
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет),  
**С.Г. Баена**  
(Санкт-Петербургский государственный университет  
информационных технологий, механики и оптики)

## СОПОСТАВЛЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ВЕЙВЛЕТОВ С ФИЛЬТРАМИ КАЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ НАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ\*

Применительно к задаче фильтрации случайных последовательностей установлены взаимосвязи линейного и расширенного фильтров Калмана и иерархических вейвлет-систем оценивания, построенных на основе декомпозиции. Установлен и сопоставлен уровень априорной информации, необходимой при решении задач оценивания в рамках байесовского подхода, и информации, привлекаемой при решении задачи с использованием вейвлетов.

**Ключевые слова:** Оценивание, линейный и расширенный фильтр Калмана, иерархическая система, вейвлет, регрессия.

### Введение

Для решения нелинейной задачи рекуррентного оценивания случайных последовательностей наиболее часто используются алгоритмы калмановского типа [1, 2]. К этой задаче сводится достаточно широкий класс задач обработки навигационной информации [1]. Вместе с тем в последнее время при решении самых разнообразных задач получают широкое применение вейвлеты [3, 4]. Их отличительная особенность состоит в том, что они позволяют вскрыть особенности локальной структуры и выявить различные свойства сложного сигнала, невидимые при обычном представлении в реальном времени. В [5 – 7] предлагается использовать вейвлеты для подавления и снижения уровня шумов, а также очищения сигнала от шума для восстановления исходного сигнала. Использование же регрессии и вейвлетов для решения задачи оценивания было предложено в [8 – 10]. Применение декомпозиционных систем оценивания, в том числе и вейвлет-систем, позволило достичь высокой точности оценивания при скорости обучения этих систем значительно большей скорости, чем систем без декомпозиции [11].

\* Работа проводилась при поддержке гранта РФФИ 15-08-08593а.

В статье устанавливается взаимосвязь между фильтрами Калмана (ФК), традиционно используемыми для решения задач рекуррентного оценивания случайных последовательностей, и алгоритмами, основанными на применении рекуррентной иерархической вейвлет-системы в рамках байесовской постановки.

### Расширенный фильтр Калмана

Предположим, что решению подлежит задача нелинейной фильтрации  $n$ -мерной марковской последовательности  $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$ , формируемой в виде [1]

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}) + \mathbf{n}_i \quad (1)$$

по  $m$ -мерным измерениям  $\mathbf{y}_i = (y_{1i}, \dots, y_{mi})^T$ , определяемым как

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{v}_i. \quad (2)$$

Полагаем, что в этих соотношениях

$$\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}) = (\Phi_{i1}(\mathbf{x}_{i-1}), \dots, \Phi_{in}(\mathbf{x}_{i-1}))^T; \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) = (s_{i1}(\mathbf{x}_i), \dots, s_{im}(\mathbf{x}_i))^T$$

– это известные  $n$ - и  $m$ -мерные в общем случае нелинейные относительно своих аргументов вектор-функции;  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  –  $n$ - и  $m$ -мерные центрированные гауссовские белозумные последовательности с матрицами ковариаций  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{R}_i$  размеров  $n \times n$  и  $m \times m$ :

$$f(\mathbf{n}_i) = N(\mathbf{n}_i; 0, \mathbf{Q}_i), M\{\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i; f(\mathbf{v}_i) = N(\mathbf{v}_i; 0, \mathbf{R}_i), M\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i,$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Считается, что значения последовательности  $\mathbf{x}_0$  в начальный момент времени представляют собой гауссовский центрированный случайный  $n$ -мерный вектор с матрицей ковариаций  $\mathbf{P}_0$ , и при этом предполагается, что порождающие  $\mathbf{n}_i$  и измерительные  $\mathbf{v}_i$  шумы, а также начальное значение  $\mathbf{x}_0$  между собой статистически независимы.

Важно подчеркнуть, что в данной постановке фактически считается известной совместная функция плотности распределения вероятностей (ф.п.р.в.)  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{N}_i, \mathbf{V}_i)$  векторов  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{N}_i = [\mathbf{n}_1^T, \mathbf{n}_2^T, \dots, \mathbf{n}_i^T]^T$  и  $\mathbf{V}_i = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_i^T]^T$ . Причем как ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_0)$ ,  $f(\mathbf{N}_i)$  и  $f(\mathbf{V}_i)$  являются гауссовскими, соответствующими центрированным векторам с заданными матрицами ковариаций, так и  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{N}_i, \mathbf{V}_i)$  является известной гауссовской ф.п.р.в.

При нахождении оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки (оценки с минимальной дисперсией ошибки) используется критерий вида

$$J_i = M[(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T (\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))] = M\|(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))\|^2, \quad (3)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)$  – оценка в текущий момент времени, полученная с использованием всего набора измерений  $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T]^T$ ;  $M$  – знак математического ожидания.

Построение наиболее простых алгоритмов решения сформулированной задачи основано на гауссовской аппроксимации апостериорной плотности  $f(\mathbf{x}_i / \mathbf{Y}_i)$ . Существуют различные приближенные процедуры нахождения параметров гаус-

совской аппроксимации апостериорной плотности. Наибольшее распространение получили алгоритмы, основанные на разложении в ряд Тейлора функций  $\Phi_i(\mathbf{x}_i)$  и  $\mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i)$  [1].

В простейших вариантах обсуждаемых алгоритмов используется линеаризованное представление функций  $\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1})$  и  $\mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i)$ , которое с учетом принятых обозначений может быть записано в виде [1]:

$$\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}) \approx \Phi_i(\mathbf{x}_{л1}) + \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x}_{л1})}{\partial \mathbf{x}_{i-1}^T} (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_{л1}),$$

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) \approx \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_{л2}) + \frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_{л2})}{\partial \mathbf{x}_i^T} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{л2}),$$

где  $\mathbf{x}_{л1}$ ,  $\mathbf{x}_{л2}$  – точки линеаризации.

Простейший алгоритм фильтрации получается, если в качестве точек линеаризации используются некоторые фиксированные значения, – например,  $\mathbf{x}_{л1} = \bar{\mathbf{x}}_{i-1}$ ,  $\mathbf{x}_{л2} = \bar{\mathbf{x}}_i$ , где  $\bar{\mathbf{x}}_i$  – априорные математические ожидания. Заметим, что в этом случае матрицы ковариаций  $\mathbf{P}_{i/i-1}(\bar{\mathbf{x}}_{i-1})$ ,  $\mathbf{P}_i(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, \bar{\mathbf{x}}_i)$  и коэффициент усиления  $\mathbf{K}_i(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, \bar{\mathbf{x}}_i)$  от измерений не зависят. Такой алгоритм получил наименование линеаризованного ФК. Когда в качестве точек линеаризации используют  $\mathbf{x}_{л1} = \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$  и  $\mathbf{x}_{л2} = \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}$ , то

$$\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}) \approx \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) + \frac{\partial \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})}{\partial \mathbf{x}_{i-1}^T} (\mathbf{x}_{i-1} - \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}),$$

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i) \approx \mathbf{s}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}) + \frac{\partial \mathbf{s}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1})}{\partial \mathbf{x}_i^T} (\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}),$$

и получают алгоритм нелинейной фильтрации, который называют обобщенным, или расширенным фильтром Калмана (РФК) [1].

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка, минимизирующая критерий (3), и соответствующая ей апостериорная матрица ковариаций ошибок оценивания при сделанных предположениях могут быть найдены с помощью приводимого ниже дискретного расширенного фильтра Калмана [1]. В дискретном РФК, как правило, выделяются два блока: блок прогноза и блок обновления.

В блоке прогноза с использованием оптимальной оценки вектора состояния для предыдущего момента времени  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$  и вектор-функции  $\Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})$  находится прогноз вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}$  и матрица ковариаций  $\mathbf{P}_{i/i-1} \equiv \mathbf{P}_{i/i-1}(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})$  его ошибок

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_{xi} \mathbf{P}_{i-1} \Phi_{xi}^T + \mathbf{Q}_i, \quad (5)$$

где  $\Phi_{xi} \equiv \Phi_{xi}(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) = \partial \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) / \partial \mathbf{x}_{i-1}$  – матрица Якоби (размера  $n \times n$ ) для  $\Phi_i(\mathbf{x}_{i-1})$ , которая зависит от текущей оценки  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$ .

В блоке обновления с использованием значений прогноза  $\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}$  и текущего

измерения  $y_i$  вычисляется оптимальная оценка вектора состояния для текущего момента времени  $\tilde{x}_i$  и матрица ковариаций  $P_i \equiv P_i(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i/i-1})$  ее ошибок

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i/i-1} + K_i[y_i - s_i(\tilde{x}_{i/i-1})], \quad (6)$$

$$P_i = (E - K_i H_{xi}) P_{i/i-1}, \quad (7)$$

где  $H_{xi} \equiv H_{xi}(\tilde{x}_{i/i-1}) = \partial s_i(\tilde{x}_{i/i-1}) / \partial x_i$  – матрица Якоби (размера  $m \times m$ ) для  $s_i(x_i)$ , которая зависит от прогноза состояния  $\tilde{x}_{i/i-1}$ ;  $K_i \equiv K_i(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_{i/i-1})$  – матрица коэффициентов усиления размера  $n \times m$ , определяемая как

$$K_i = P_{i/i-1} H_{xi}^T (H_{xi} P_{i/i-1} H_{xi}^T + R_i)^{-1}. \quad (8)$$

На первом шаге обычно предполагается, что  $\tilde{x}_0 = M[x_0] = 0$ . Однако в общем случае, когда вектор начального состояния не является центрированным,  $\tilde{x}_0 = M[x_0] = \bar{x}_0$ .

Схема описанной рекуррентной процедуры РФК представлена на рис. 1.

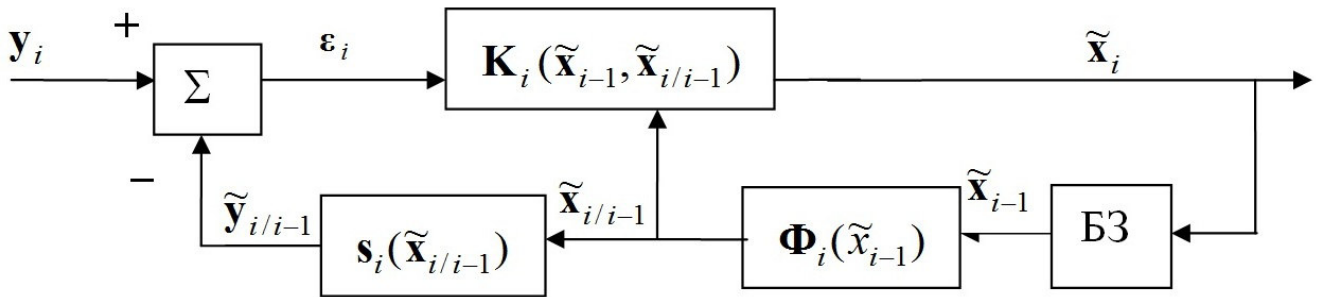


Рис. 1. Структурная схема РФК алгоритма.

Для дальнейшего весьма важным представляется вопрос об объеме и характере априорной информации, привлекаемой при построении алгоритма.

Из приведенной постановки задачи следует, что заданными являются уравнения (1), (2), описывающие динамику изменения оцениваемой последовательности  $x_i$  и связь измеряемой последовательности  $y_i$  с  $x_i$  и ошибками измерений  $v_i$ . Кроме того, известной предполагается совместная функция плотности распределения вероятностей  $f(x_0, N_i, V_i)$ . Заметим, что фактически заданной является совместная ф.п.р.в.  $f(x_0, X_i, Y_i)$ , которая может быть определена с использованием уравнений (1), (2) и ф.п.р.в.  $f(x_0, N_i, V_i)$  на основе байесовского подхода [1].

Рассмотрим случай линейной фильтрации, когда уравнения динамики (1) и измерений (2) являются линейными и имеют вид

$$x_i = \Phi_i x_{i-1} + n_i, \quad (9)$$

$$y_i = H_i x_i + v_i, \quad (10)$$

где  $\Phi_i, H_i$  – известные матрицы соответствующей размерности.

Особенность линейного ФК заключается лишь в том, что для прогноза состояния и измерения используются линейные уравнения динамики (9) и измерений (10), а для матриц ковариаций (5), (7) и матрицы усиления (8) – матрицы динамики  $\Phi_i$  и измерения  $H_i$  вместо матриц Якоби  $\Phi_{xi}$  и  $H_{xi}$ .

## Рекуррентный вейвлет-алгоритм нелинейной фильтрации

Поясним вкратце идею использования вейвлетов для решения рассматриваемой задачи фильтрации [11].

Прежде всего заметим, что в случае байесовской постановки задачи оценивания априорная информация об оцениваемом векторе  $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$  и используемых измерениях  $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{y}_k^T, \mathbf{y}_{k-1}^T, \dots, \mathbf{y}_1^T]^T$  задается либо в виде их совместной ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i)$ , что характерно для традиционной постановки [1], либо в виде согласованного набора реализаций, которые записываются в виде:

$$\{(\mathbf{x}_0^{(j)}), \mathbf{x}_i^{(j)}, \mathbf{Y}_i^{(j)}\}_{j=1}^N, \quad (11)$$

что характерно для постановки задачи оценивания с использованием настраиваемых, обучаемых систем [8–10]. Пары  $\mathbf{x}_i^{(j)}, \mathbf{Y}_i^{(j)}, j = \overline{1, N}$  являются реализациями случайного вектора  $[\mathbf{x}_i^T \mathbf{Y}_i^T]^T$  с функцией плотности распределения вероятности  $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{Y}_i)$ .

При наличии обучающего множества (11) приближенное решение задачи оценивания может быть найдено путем ввода класса зависящих от параметров в общем случае нелинейных функций, используемых для вычисления оценки [12 – 14]. В качестве таких функций предлагается использовать вейвлеты [8 – 10]. При этом проблема получения алгоритма оценивания на основе вейвлета сводится вне зависимости от топологии системы к процедуре нахождения параметров этой системы, отыскиваемых в результате минимизации критерия, формируемого с использованием данных обучающей выборки (11). В таком случае возможно использовать основанный на регрессии и вейвлетах алгоритм в виде [8 – 10]

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^W = \mathbf{h}_i^W(\mathbf{Y}_i, \tilde{\mathbf{W}}_i), \quad (12)$$

где  $\tilde{\mathbf{W}}_i$  – отвечающая за параметры вейвлета матрица детализирующих и аппроксимирующих коэффициентов сигнала для момента времени  $t_i$ , а  $\mathbf{Y}_i$  – вход для вейвлет-системы. Матрица  $\tilde{\mathbf{W}}_i$  определяется (когда вейвлет настраивается) при минимизации критерия настройки

$$J_i(\tilde{\mathbf{W}}_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \mathbf{x}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{W(j)}(\mathbf{Y}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_i) \right\|^2, \quad (13)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_i^{W(j)}(\mathbf{Y}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_i)$  – формируемая вейвлетом оценка с использованием измерений  $\mathbf{Y}_i^{(j)}$ , соответствующих реализации вектора  $\mathbf{x}_i^{(j)}$ .

Таким образом, задача проектирования алгоритма оценивания сводится к выбору и настройке вейвлета, т.е. нахождению параметров системы в процессе минимизации среднеквадратического критерия (13), формируемого с использованием обучающего множества (11).

В целях выявления связи между приведенным выше традиционным алгоритмом РФК и алгоритмами, основанными на использовании вейвлетов, попытаемся построить такой вейвлет-алгоритм, который обеспечивает получение оценок, близких по своим свойствам к оценкам, вырабатываемым алгоритмом РФК

(4) – (8). При этом будем полагать, что обучение проводится «с учителем», т.е. что имеются согласованные пары входных (значения измерений) и эталонных (значения оцениваемого процесса) данных.

В наибольшей степени для достижения поставленной цели подходит структура алгоритма, предложенного в работе [15]. Здесь также выделяется шаг прогноза и обновления. При этом прогноз вычисляется согласно (1)

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W = \Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^W), \quad (14)$$

а оценка на шаге обновления определяется как

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^W = \mathbf{K}_i^W(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W, \boldsymbol{\varepsilon}_i^W, \tilde{\mathbf{W}}_i), \quad (15)$$

где  $\mathbf{K}_i^W(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W, \boldsymbol{\varepsilon}_i^W, \tilde{\mathbf{W}}_i)$  – вейвлет-система с матрицей коэффициентов  $\tilde{\mathbf{W}}_i$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^W$  – невязка, определяемая как

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^W = \mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W). \quad (16)$$

На первом шаге, как и в традиционном алгоритме, полагаем, что  $\tilde{\mathbf{x}}_0^W = 0$ . В отличие от [15] в рассматриваемом здесь алгоритме предполагается, что на вход вейвлет-системы может поступать только текущее измерение, а не набор их значений с предыдущих шагов. Таким образом, на очередном шаге на вход системы поступает прогноз (14), определенный с использованием оценок  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^W$  (15), выработанных на предыдущем шаге, и невязка измерений (16).

Из сказанного следует, что здесь уравнения (1), (2), как и в случае с РФК, предполагаются известными. Структурная схема такого вейвлет-алгоритма фильтрации представлена на рис. 2.

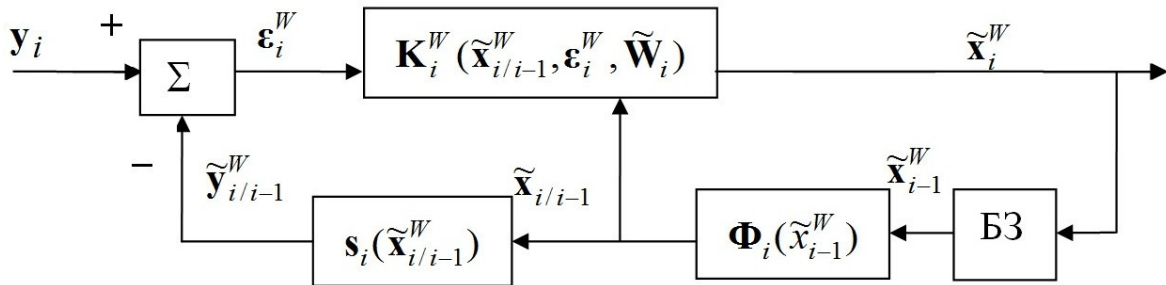


Рис. 2. Схема вейвлет-алгоритма при известной модели прогноза.

Определим вейвлет-систему, конкретизируя вид функции  $\mathbf{K}_i^W(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W, \boldsymbol{\varepsilon}_i^W, \tilde{\mathbf{W}}_i)$ . Для удобства дальнейшего изложения введем  $q = n + m$ -мерный входной вектор вейвлета  $\mathbf{z}_i$  в виде

$$\mathbf{z}_i = [z_{1i}, \dots, z_{qi}]^T \equiv \left[ \left( \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^W \right)^T, \left( \boldsymbol{\varepsilon}_i^W \right)^T \right]^T, \quad (17)$$

и оценку, вырабатываемую НС в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^W = \mathbf{K}_i^W(\mathbf{z}_i, \tilde{\mathbf{W}}_i). \quad (18)$$

Определим теперь процедуру настройки (обучения) параметров вейвлета. Считаем, что обучение проводится «с учителем». В рассматриваемой задаче это означает, что имеется  $N$  независимых между собой реализаций случайных векторов в виде  $\{(\mathbf{x}_0^{(j)}), \mathbf{Y}_i^{(j)}, \mathbf{X}_i^{(j)}\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , с ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$ .

В качестве критерия обучения  $J_i(\tilde{\mathbf{W}}_i)$  на шаге  $i$  выберем функцию

$$J_i(\tilde{\mathbf{W}}_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \mathbf{x}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{W(j)}(\mathbf{z}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_i) \right\|^2,$$

где входной вектор  $\mathbf{z}_i^{(j)}$  определяется как  $\mathbf{z}_i^{(j)} = [(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^{W(j)})^T, (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{W(j)})^T]^T$ .

Существенно, что

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^{W(j)} = \Phi_i[\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^{W(j)}(\mathbf{z}_{i-1}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_{i-1})]; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i^{W(j)} = \mathbf{y}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{y}}_{i/i-1}^{W(j)} = \mathbf{y}_i^{(j)} - \mathbf{s}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}^{W(j)}),$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^{W(j)}(\mathbf{z}_{i-1}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_{i-1})$  – оценки, на предыдущем шаге  $i-1$ , рассчитанные с помощью настроенного вейвлета.

Опишем предлагаемую процедуру обучения, начиная с первого шага. Специфика этого шага заключается в том, что входной вектор имеет вид  $\mathbf{z}_1 = (0, \mathbf{y}_1^T)^T = \mathbf{y}_1$ , так как  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0 = 0$ .

В качестве критерия обучения на первом шаге выберем функцию  $J_1(\tilde{\mathbf{W}}_1)$

вида  $J_1(\tilde{\mathbf{W}}_1) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \mathbf{x}_1^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_1^{W(j)}(\mathbf{y}_1^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_1) \right\|^2$ , где  $\tilde{\mathbf{x}}_1^{W(j)}(\mathbf{y}_1^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_1)$  – оценка, вырабатываемая вейвлетом по измерению  $\mathbf{y}_1^{(j)}$ , соответствующему эталонной реализации  $\mathbf{x}_1^{(j)}$ ;  $\tilde{\mathbf{W}}_1$  – матрица коэффициентов для первого момента времени. В результате обучения сформируем массив значений  $\tilde{\mathbf{W}}_1$ . Используя  $\tilde{\mathbf{W}}_1$  и выражение (18), вычислим необходимый для последующей настройки набор оценок  $\tilde{\mathbf{x}}_1^{W(j)}(\mathbf{y}_1^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_1)$ , т.е. набор оценок на первом шаге, рассчитанных с помощью настроенного вейвлета, для каждого измерения  $\mathbf{y}_1^{(j)}$ ,  $j = \overline{1..N}$ .

В качестве критерия обучения на втором шаге выберем функцию  $J_2(\tilde{\mathbf{W}}_2)$  вида

$$J_2(\tilde{\mathbf{W}}_2) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \mathbf{x}_2^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_2^{W(j)}(\mathbf{z}_2^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_2) \right\|^2,$$

где  $\mathbf{z}_2^{(j)} = [(\tilde{\mathbf{x}}_{2/1}^{W(j)})^T, (\boldsymbol{\varepsilon}_2^{W(j)})^T]^T$ ;  $\tilde{\mathbf{x}}_{2/1}^{W(j)} = \Phi_2[\tilde{\mathbf{x}}_1^{W(j)}(\mathbf{y}_1^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_1)]$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{W(j)} = \mathbf{y}_2^{(j)} - \mathbf{s}_2[\tilde{\mathbf{x}}_{2/1}^{W(j)}]$ .

Еще раз подчеркнем, что  $\tilde{\mathbf{x}}_1^{W(j)}(\mathbf{y}_1^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_1)$ ,  $j = \overline{1..N}$  представляют собой оценки для первого шага, рассчитанные уже с помощью настроенного вейвлета. Опять проводим настройку, т.е. определяем  $\tilde{\mathbf{W}}_2$ . После чего, используя  $\tilde{\mathbf{W}}_2$ , выражение (18) и измерения  $\mathbf{y}_2^{(j)}$ ,  $j = \overline{1..N}$ , снова вычисляем необходимый для последующей настройки набор оценок  $\tilde{\mathbf{x}}_2^{W(j)}(\mathbf{y}_2^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_2)$  для второго шага. В дальнейшем при настройке вейвлета поступаем аналогично.

Таким образом, структура и процедура настройки рекуррентного вейвлет-алгоритма фильтрации определены. Можно показать, что определяемая с помощью обучения в соответствии с описанным выше алгоритмом оценка (18) при увеличении числа используемых для обучения реализаций  $N$  будет стремиться к оптимальной оценке (6).

## Сопоставление вейвлет-алгоритма и фильтра Калмана

При построении используемых для обработки навигационной информации алгоритмов оценивания важным представляется умение находить не только саму оценку, но и соответствующую ей расчетную характеристику точности. В качестве такой характеристики точности для оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки используется апостериорная матрица ковариаций ошибок, вычисляемая с помощью следующего соотношения [13]:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} = M \left\{ (\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T \right\}. \quad (19)$$

Хотя при построении вейвлет-алгоритмов обычно не предполагается выработка каких-либо расчетных характеристик точности оценивания, ясно, что такая характеристика, аналогичная матрице ковариаций (19), может быть в принципе после настройки вейвлета рассчитана с использованием следующего выражения

$$\mathbf{P}_{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i}^W = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{x}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^W(\mathbf{z}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_i) \right) \left( \mathbf{x}_i^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^W(\mathbf{z}_i^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}_i) \right)^T. \quad (20)$$

Сопоставим характер и объем априорной информации, используемой при построении линейного ФК и описанного выше вейвлет-алгоритма, аналогично тому, как это сделано в [14]. В качестве априорной информации при построении ФК выступают уравнения (9), (10), а для РФК – (1), (2) и ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$ , что отражено в таблице, показывающей характер априорной информации для ФК и вейвлет-алгоритма.

При построении вейвлет-алгоритма уравнения (9), (10) или (1), (2) также считаются заданными. Вместо же ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$  используются наборы реализаций  $\{\mathbf{x}_0^{(j)}, \mathbf{y}_1^{(j)}, \mathbf{x}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{y}_i^{(j)}, \mathbf{x}_i^{(j)}\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , которые необходимы при настройке вейвлета.

<i>Характер априорной информации</i>	<i>Тип алгоритма</i>	
	<i>Фильтр Калмана</i>	<i>Вейвлет-алгоритм</i>
Уравнения динамики и измерений	да	да
Ф.п.р.в. $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$	да	нет
Реализации $\{\mathbf{x}_0^{(j)}, \mathbf{y}_1^{(j)}, \mathbf{x}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{y}_i^{(j)}, \mathbf{x}_i^{(j)}\}$ , $j = \overline{1, N}$ , соответствующие $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$	нет	да

Напомним, что если вместо  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$  считаются заданными только первые два момента этой плотности, то алгоритм ФК является оптимальным в классе линейных при произвольном виде этой ф.п.р.в. [14]. Ясно, что рассматриваемый вейвлет-алгоритм обеспечит получение оценок с такими же свойствами, если при его настройке будут использованы наборы реализаций (11), соответствующие произвольной ф.п.р.в., имеющей заданные первые два момента.

Таким образом, основная особенность вейвлет-алгоритма заключается в том, что при его построении вместо  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$  используются соответствующие



этой ф.п.р.в. независимые между собой реализации  $\{\mathbf{x}_0^{(j)}, \mathbf{y}_1^{(j)}, \mathbf{x}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{y}_i^{(j)}, \mathbf{x}_i^{(j)}\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Если речь идет о построении алгоритма, оптимального в классе линейных, то вместо информации о первых двух моментах векторов  $\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i$  могут быть использованы независимые между собой реализации (11), соответствующие произвольной  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)$  с заданными моментами.

Можно показать, что, в принципе, располагая информацией в виде набора (11) и используя описанную выше процедуру обучения, будет получен вейвлет-алгоритм, вырабатывающий оценки, свойства которых близки к свойствам оптимальных оценок, без привлечения уравнений (9), (10) для ФК и (1), (2) для РФК. Входящие в них матрицы будут также идентифицированы с использованием реализаций (11).

В случае отсутствия уравнений (1), (2) и наличия обучающего множества схема фильтрации меняется. Вместо двухшаговой схемы с прогнозом и обновлением (см. рис. 2) предлагается использование декомпозиционных вейвлет-систем нелинейного оценивания.

### Декомпозиционные вейвлет-системы нелинейного оценивания

Для повышения быстродействия настройки алгоритмов оценивания предлагается использовать принцип декомпозиции сложных систем. Вейвлет-системы могут быть декомпозированы с использованием трех базовых представлений подсистем. К ним относят каскадное и параллельное соединение элементов, а также соединение с обратной связью [11]. С этой целью можно построить иерархическую вейвлет-систему как для нерекуррентного, так и для рекуррентного оценивания применительно к нелинейным задачам обработки информации (рис. 3).

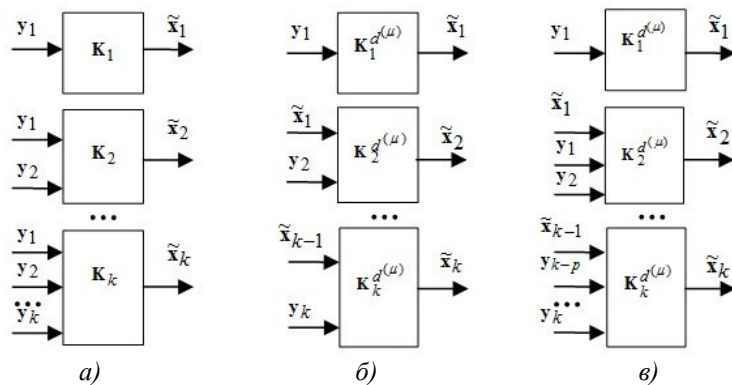


Рис. 3. Схемы оценивания: а) исходная для нерекуррентного оценивания; б) рекуррентное оценивание с использованием декомпозиции с одним измерением; в) рекуррентное оценивание с использованием декомпозиции с несколькими измерениями.

При этом все возможные декомпозиционные схемы будут находиться между указанными на рис. 3б и 3в граничными фильтрами с растущей памятью.

### Пример оценивания экспоненциально-коррелированного процесса

Пусть необходимо оценить значения экспоненциально-коррелированного процесса (ЭКП) [11]

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \sqrt{2\sigma_x^2 \alpha} n(t), \quad (20)$$

используя измерения

$$y_i = x_i + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (21)$$

проведенные в дискретные моменты времени  $t_i = (i-1)\Delta t$  с интервалом  $\Delta t$ .

В уравнении (20):  $\sigma_x^2$  – дисперсия процесса;  $\alpha = 1/\tau_k$  – интервал корреляции;  $n(t)$  – центрированный гауссовский белый шум единичной интенсивности. Предполагается, что значение процесса  $x_0$  в начальный момент времени представляет собой независимую от  $n(t)$  центрированную гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_x^2$ . Ошибки измерения  $v_i$  в (21) считаются независимыми между собой и от  $x(t)$  гауссовскими случайными величинами с дисперсией  $R_i = r_i^2$ .

В разностном виде уравнение (20) записывается как [11]

$$x_i = e^{-\alpha \Delta t} x_{i-1} + \frac{\sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \Delta t}) n_i, \quad (22)$$

где  $n_i$  независимые между собой и от  $v_i$  и  $x_0$  центрированные гауссовские случайные величины с дисперсией  $Q_i = q_i^2 = q^2 \approx 1/\Delta t$ . В примере  $\mathbf{x} \equiv x_i$ ,  $\mathbf{y} \equiv [y_1 \dots y_i]^T$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_i]^T$ .

Заметим, что оптимальным решением для оценивания ЭКП (22) является линейный ФК. Поэтому рассмотренная задача решалась путем моделирования как с использованием ФК, для которого необходимо располагать значениями  $\sigma_x^2$ ,  $\alpha$ ,  $r^2$ ,  $q^2 = 1/\Delta t$ , так и с использованием вейвлета. Для реализации вейвлет-алгоритма оценивания выбран вейвлет Добеши 4 с уровнем разложения 4.

Ниже приведены результаты моделирования, соответствующие следующим значениям указанных параметров:  $\sigma_x^2 = 10$ ;  $\Delta t = 1$  с;  $r_i^2 = 27$ ;  $\alpha = 1/30$ ,  $r^2 = 1$ ; для дискретных моментов времени  $t_i = (i-1)\Delta t$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $k = 10$ . Общее число реализаций  $j = \overline{1, L}$ ,  $L = 1000$ .

На рис. 4а представлены результаты оценивания ЭКП (22), где  $\sigma_i$  – расчетное среднее квадратическое отклонение (СКО) ошибок оценивания, соответствующее дисперсии ошибки оптимального оценивания, которая является единственным элементом расчетной матрицы ковариаций ошибок ФК; выборочные действительные СКО ошибок оценивания ФК (ФК)  $\tilde{\sigma}_i^{FK}$  для и алгоритма на основе вейвлета  $\tilde{\sigma}_i^W$ , вычисляемые как:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i^\mu &\approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (e_i^\mu(j))^2}, \\ e_i^\mu(j) &= \tilde{x}_i^{\mu(j)}(y_i^{(j)}, W_i) - x_i^{(j)}, \\ \mu &= FK, W. \end{aligned} \quad (23)$$

Как хорошо видно из рис. 4а, полученная с использованием вейвлета оценка  $\tilde{\sigma}_i^W$  практически совпадает с оптимальной оценкой  $\sigma_i$ .

Таким образом, применительно к задачам линейного оценивания случайных последовательностей показано, что оптимальный в среднеквадратическом смысле линейный алгоритм и алгоритм, основанный на использовании вейвлета, обеспечивают нахождение оценок с близкими свойствами. Полученный результат позволяет трактовать традиционный алгоритм ФК как вейвлет простейшего вида.

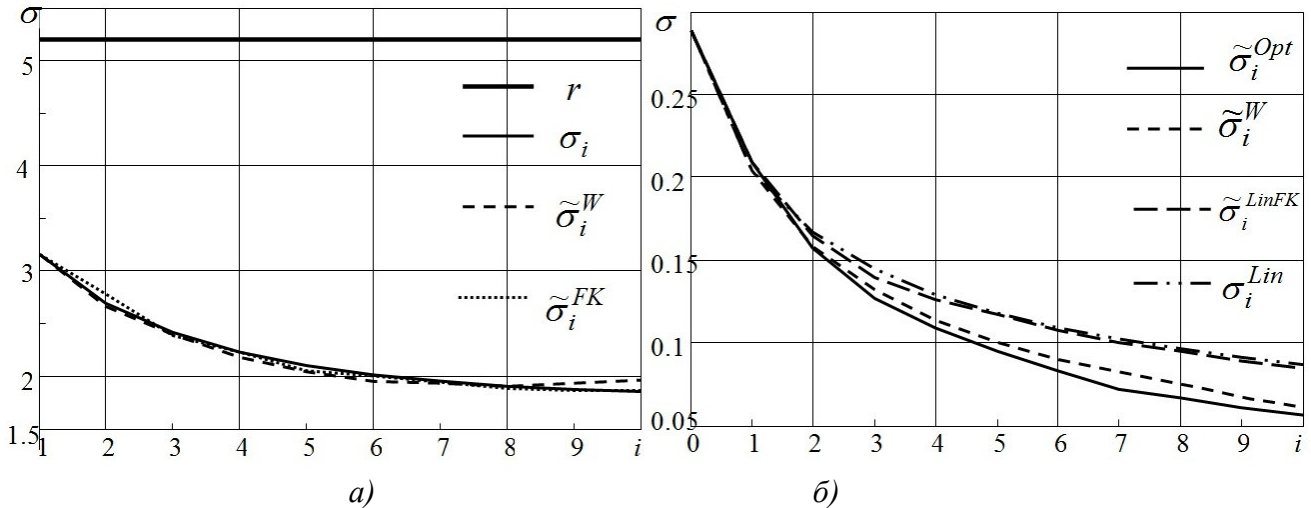


Рис. 4. СКО ошибок оценивания процессов: а) ЭКП; б) негауссовский.

### Пример оценивания негауссовской случайной величины

Для доказательства преимуществ предлагаемого подхода возьмем в качестве примера скалярную задачу нелинейного оценивания для негауссовских ф.п.р.в. переменной состояния  $x$  и шума  $v$ , для которой имеется точное байесовское решение [13].

Необходимо оценить равномерно распределенную на интервале  $[0, b]$  случайную величину  $x$  по зашумленным измерениям вида  $y_i = x + v_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ , в которых ошибки измерений  $v_i$ ,  $i = \overline{1, l}$  представляют собой независимые друг от друга и от  $x$  центрированные случайные величины, равномерно распределенные в интервале  $[-a/2, a/2]$ . В этом примере  $\mathbf{x} \equiv x$ ,  $\mathbf{y} \equiv [y_1 \dots y_l]^T$ ,  $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_l]^T$ . Следует отметить, что апостериорная ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}/\mathbf{y})$  здесь не является гауссовской, так как  $x$  и  $v_i$ ,  $i = \overline{1, l}$  – равномерно распределенные случайные переменные. При проведении моделирования принималось:  $a = b = 1$ ,  $i = \overline{1, l}$ ,  $l = 10$ .

Сравнение точности оценивания проводится с решением для оптимального нелинейного оценивания, рассмотренным в работе [13]. Были получены и исследованы СКО ошибок оценивания: выборочные СКО ошибок  $\tilde{\sigma}_i^{Opt}$  для нелинейных оптимальных оценок и выборочные СКО ошибок для вейвлет оценок  $\tilde{\sigma}_i^W$ .

Для всей вейвлет-системы применяется самая простая схема декомпозиции, имеющая два входа и один выход (рис. 3б).

Выборочные СКО были рассчитаны в соответствии с формулой (23), в которой

$$\mu = Opt, W .$$

Для получения приемлемых результатов по точности оценивания число реализаций  $N$  для настройки вейвлет-системы было выбрано равным 20000. После обучения осуществлялась проверка. С этой целью дополнительно моделировалось еще  $L = 3000$  пар реализаций  $y^{(j)}, x^{(j)}$  для разных  $i = \overline{1, L}$ ,  $l = 10$ . Моделирование систем проводилось в среде MatLab.

При решении задачи оценивания с помощью регрессии и вейвлетов существенное значение имеет размерность входных данных. Предлагается использовать двумерное вейвлет-преобразование по схеме декомпозиции, представленной на рис. 3б.

На рис. 4б представлено решение вейвлет-оценивания. Набор параметров был выбран эмпирическим путем, при которых получено субоптимальное решение.

Для достижения требуемой точности подобраны следующие параметры: число выборок  $L = 20000$ ; число промежутков при разбиении области значений измерений равно 32; пороговая обработка проводилась с помощью мягкого трешолдинга; вейвлет – Добеши 4, с уровнем разложения 2.

При перемасштабировании использовалась интерполяция с помощью сплайнов. Заметим, что для решения нерекуррентной задачи с возрастающим количеством измерений с помощью декомпозиции удалось применить двумерное вейвлет-преобразование.

## Заключение

Проведено сопоставление возможностей вейвлетов с фильтрами Калмана для задач обработки навигационной информации.

Применительно к задаче фильтрации случайных последовательностей установлены взаимосвязи линейного и расширенного фильтров Калмана и иерархических вейвлет-систем оценивания, построенных на основе декомпозиции. Установлен и сопоставлен уровень априорной информации, необходимой при решении задач оценивания в рамках байесовского подхода, и информации, привлекаемой при решении задачи с использованием вейвлетов.

С помощью иерархических вейвлет-систем может быть достигнута высокая точность оценивания, которая близка к предельно достижимой точности оптимального нелинейного алгоритма.

Полученные результаты создают основу для дальнейшего изучения возможностей использования вейвлетов и исследования их преимуществ и недостатков по сравнению с традиционными подходами для более интересных с практической точки зрения случаев, касающихся, в частности, построения алгоритмов для решения нелинейных задач оценивания существенно нестационарных процессов с локальными особенностями, процессов, имеющих фрактальную природу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов О.А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998.
2. *Степанов О.А.* Фильтр Калмана. История и современность. (К 80-летию Рудольфа Эмиля Калмана) // Гироскопия и навигация. – 2010. – № 2 (69). – С.107-121.
3. *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2014.
4. *Яковлев А.Н.* Введение в вейвлет-преобразование: Учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.
5. *Гальченко В.Я., Гринь Н.Ю.* Подавление шумов в изображениях с помощью комбинированного вейвлет-фильтра и фильтра Калмана // Информационные технологии. – 2005. – №6. – С.59-63.
6. *Девятисильный А.С., Числов К.А.* Способ построения двухкомпонентной гравиинерциальной системы на основе принципа Д'Аламбера // Информатика и системы управления. – 2011. – №1 (27). – С.26-31.
7. *Яковлев Е.К., Блатов И.А.* Определение параметров движения центра масс космического аппарата с помощью комбинированного вейвлет-фильтра и фильтра Калмана // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 14, №6. – С.212-215.
8. *Амосов О.С., Амосова Л.Н., Магола Д.С.* Оценивание случайных последовательностей с использованием регрессии и вейвлетов // Информатика и системы управления. – 2009. – №3(21). – С.101-109.
9. *Амосов О.С.* Оптимальное оценивание с использованием регрессии и вейвлетов // Труды XVII Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб., 2009 – С.314-317.
10. *Amosov O.S., Amosova L.N.* Random Sequences Optimal Estimation by Using Regression and Wavelets // 7th IEEE International Conference on Control and Automation. – Christchurch, New Zealand. – 2009. – P.2293-2298.
11. *Амосов О.С., Баена С.Г.* Использование вейвлетов для решения задач нелинейной фильтрации в навигации и управлении движением // Сборник материалов XXII Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». – 2015. – С.115-119.
12. *Амосов О.С.* Нейросетевые и нечеткие методы оценивания стохастических систем: Автореф... дис. д-ра техн. наук. – Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2004.
13. *Stepanov O.A., Amosov O.S.* Optimal Estimation by Using Neural Networks // Proceeding of the 16-th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.
14. *Степанов О.А., Амосов О.С.* Оптимальная линейная фильтрация с использованием нейронной сети // Гироскопия и навигация. – 2004. – № 3 (46). – С.14-29.
15. *Parlos A.G., Menon S.K., Atiya A.F.* An algorithmic approach to adaptive state filtering using recurrent neural networks // IEEE Trans. Neural Networks. – 2001. – Vol.12, No 6. – P.1411-1432.

*E-mail:*

*Амосов Олег Семенович – [osa18@yandex.ru](mailto:osa18@yandex.ru);*

*Баена Светлана Геннадьевна – [svetlana.baena@yandex.ru](mailto:svetlana.baena@yandex.ru).*