УДК 51-74

© 2016 г. **В.В. Климченко**, канд. техн. наук
(Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ ДАННЫХ

Предлагается процедура оценки параметров модели частично наблюдаемого технологического процесса, не опирающаяся на асимптотические свойства статистических оценок. При этом предполагаются заданными распределение ошибок измерений и диапазон влияния неизмеряемых компонент идентифицируемого процесса.

Ключевые слова: апостериорное распределение, статистическая оценка, линейное преобразование, квадратичная форма, многомерное пространство.

DOI: 10.22250/isu.2016.49.71-77

Введение

Системы управления внедряются почти во все области практики. Поскольку большинство реальных управляемых систем (технических объектов или технологических процессов) реагирует на управляющие воздействия с существенным запаздыванием, особую актуальность приобретает упреждающее управление (Predictive Control).

Для прогнозирования того или иного технологического процесса требуется какая-либо модель, описывающая закономерности его протекания. Если построить такую модель на основе физико-химических свойств процесса или, например, уравнений баланса (массы, энергии и т.п.) не удается, то прогностическая модель идентифицируется по результатам контрольных измерений основных характеристик управляемого процесса. При этом в тех случаях, когда количество измерений, имеющихся в распоряжении исследователя, многократно (скажем, раз в пятьдесят) превышает количество оцениваемых параметров модели, параметрическая идентификация может быть осуществлена методами классической статистики. Доверительную область для найденных оценок можно построить, воспользовавшись их асимптотическими свойствами [1, 2]. Однако на практике нередко возникают ситуации, когда выполнение измерений во время производственного цикла существенно затруднено, в результате чего жесткая ограниченность объема имеющейся выборки данных не позволяет апеллировать к асимптотическим свойствам статистических оценок. Кроме того, измерение некоторых важных компонент технологического процесса может вообще оказаться невозможным. Например, такие затруднения характерны для промышленных процессов ректификации [3].

В данной статье предлагается процедура оценки параметров модели процесса по небольшому количеству контрольных измерений при наличии некоторых компонент, не доступных для измерения. При этом под «небольшим» понимается число, не позволяющее воспользоваться асимптотическими свойствами оценок для построения доверительных областей. Требуемые области строятся на основании заданных свойств измерительной аппаратуры. Кроме того, считаются заданными границы диапазона, в пределах которого может быть заключен эффект от влияния неизмеряемых компонент.

Постановка задачи

Пусть на некотором интервале времени $[0,\ T]$ процесс изменения какой-либо величины $X(t)$, характеризующей рассматриваемый процесс, аппроксимируется разложением

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi_j(t), \quad t \in [0,\ T], \tag{1}$$

где $A_1,\ \ldots,\ A_m$ – неизвестные параметры; $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_m(t)$ – детерминированные функции времени.

Имеются данные n контрольных замеров характеристики $X(t)$, содержащие аддитивные ошибки, $n \geq m$. Сначала рассмотрим случай отсутствия неизмеряемых компонент идентифицируемого процесса:

$$Y_i = X(t_i) + E_i, \quad t_i \in [0,\ t_n] \subset [0,\ T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где t_i – момент i-го измерения; Y_i – результат i-го измерения; E_i – ошибка измерения.

Предположим, что априорная информация о стохастических свойствах коэффициентов $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$, отражающих особенности данного процесса, отсутствует, а количество измерений n недостаточно велико для использования асимптотических свойств статистических оценок вектора $\mathbf{A} = (A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m)$.

Плотность распределения ошибок $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n$ является характеристикой измерительной аппаратуры, поэтому ее будем считать известной, причем предполагается, что ошибки $E_1, E_2, \ldots, E_n$ не зависят от коэффициентов $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$.

Требуется по известной плотности $f_{\mathrm{E}}(\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ \ldots;\ \varepsilon_n)$ распределения случайных величин $E_1, E_2, \ldots, E_n$ оценить вероятность P_T, с которой показатель $X(T)$ будет находиться внутри заданного интервала $[x_{\text{н}},\ x_{\text{в}}]$ при условии, что вектор результатов измерений $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ принял известное значение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$P_T = \mathrm{Prob}\{x_{\text{н}} < X(T) < x_{\text{в}} \mid y_1, \ldots, y_n\}. \tag{3}$$

Заметим, что такая постановка задачи параметрической идентификации несколько отличается от традиционных. Обычно целью подобных задач ставится отыскание точечной оценки вектора неизвестных параметров и границ доверительной области, центром которой является найденная оценка [1, 2], тогда как в данной статье границы интервала $[x_{\text{н}},\ x_{\text{в}}]$ считаются заданными априорно. Это отличие обусловлено ориентацией на задачи управления. Например, предположим, что с точки зрения качества результатов технологического процесса наиболее предпочтительны значения $X(T) = X^* \pm \Delta$. Тогда, полагая $x_н = X^* - \Delta$, $x_в = X^* + \Delta$ и оценив вероятность P_T, определенную соотношением (3), можно принять решение об управляющем воздействии (коррекции управляемого процесса), если найденное значение вероятности P_T не достигает некоторого требуемого уровня P^*.

Идентификация наблюдаемого процесса

Выберем m линейно независимых строк матрицы $[\varphi_{ij}] \equiv [\varphi_j(t_i)]$ (если ее ранг меньше m, то идентификация, очевидно, невозможна без привлечения какой-либо дополнительной информации). Допустим, это строки с номерами от 1 до m. Рассмотрим плотность $f_{\mathrm{B}}(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n)$ совместного распределения компонент случайного вектора $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, определенного по формулам

$$B_i = \begin{cases} E_i, \quad i = \overline{1,\ m}, \\ E_i - \dfrac{1}{D}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+j}D_{kj}E_k, \quad i = \overline{m+1,\ n}, \end{cases} \tag{4}$$

где $D = \det([\varphi_{ij}])$; D_{kj} – минор элемента φ_{kj} в определителе D.

Обозначим для краткости:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+j}D_{kj}E_k \equiv g_i(E_1, E_2, \ldots, E_m), \\ \dfrac{1}{D}\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+j}D_{kj}y_k = c_i. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку якобиан преобразования (4) равен единице, то

$f_{\mathrm{B}}(b_1;\ \ldots;\ b_n) = f_{\mathrm{E}}(b_1;\ \ldots;\ b_m;\ b_{m+1} + g_{m+1}(b_1;\ \ldots;\ b_m);\ \ldots;\ b_n + g_n(b_1;\ \ldots;\ b_m))$.

В результате измерений показателя $X(t)$ получен вектор $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Следовательно, случайные величины $B_{m+1}, \ldots, B_n$ приняли значения, определяемые из соотношений (1), (2), (4), (5):

$B_i = y_i - c_i, \quad i = \overline{m+1,\ n}$.

Согласно формуле для условной плотности распределения вероятностей

$$f_{\mathrm{B}}(b_1;\ldots;b_m \mid y_{m+1} - c_{m+1};\ldots;y_n - c_n) =$$
$$= \frac{f_{\mathrm{E}}(b_1;\ldots;b_m;y_{m+1} - c_{m+1} + g_{m+1}(b_1;\ldots;b_m);\ldots;y_n - c_n + g_n(b_1;\ldots;b_m))}{\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{E}}(B_1;\ldots;B_m;y_{m+1} - c_{m+1} + g_{m+1}(B_1;\ldots;B_m);\ldots;y_n - c_n + g_n(B_1;\ldots;B_m))\,dB_1\ldots dB_m}. \tag{6}$$

Для любых вещественных $a_1, a_2, \ldots, a_m$ вероятность выполнения системы неравенств

$$\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{m}(y_k - B_k)(-1)^{k+j}D_{kj} < a_j, \quad j = \overline{1,\ m} \tag{7}$$

можно записать в виде

$$\int_{H_{\mathrm{A}}} f_{\mathrm{B}}(B_1;\ldots;B_m \mid y_{m+1} - c_{m+1};\ldots;y_n - c_n)\,dB_1\ldots dB_m \equiv \mathrm{Prob}\{(B_1,\ldots,B_m) \in H_{\mathrm{A}}\}, \tag{8}$$

где область H_A определяется системой (7).

Но из (1), (2) и (4) следует, что система (7) эквивалентна системе $A_j < a_j,\ j = \overline{1, m}$, поэтому

$$\mathrm{Prob}\{(B_1, \cdots, B_m) \in H_A\} = \mathrm{Prob}\{A_1 < a_1;\ \ldots;\ A_m < a_m\}.$$

Заменяя переменные в интеграле (8) по формулам

$$B_i = y_i - \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij} A_j, \quad i = \overline{1,\ m},$$

с учетом (5) и (6) получим выражение для функции совместного распределения компонент вектора **A** при условии, что вектор результатов измерений $(Y_1, \ldots, Y_n)$ принял значение $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$F(a_1; \ldots; a_m \mid y_1; \ldots; y_n) = \mathrm{Prob}\{A_1 < a_1; \ldots; A_m < a_m \mid y_1; \ldots; y_n) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{a_m} \cdots \int\limits_{-\infty}^{a_1} f_E\left(y_1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1j} A_j;\ \cdots;\ y_n - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{nj} A_j \right) dA_1 \cdots dA_m}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_E\left(y_1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1j} A_j;\ \cdots;\ y_n - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{nj} A_j \right) dA_1 \cdots dA_m}.$$

Соответствующую условную плотность найдем в результате дифференцирования функции $F(a_1; \ldots; a_m \mid y_1; \ldots; y_n)$ по компонентам вектора **A**

$$f(a_1; \ldots; a_m \mid y_1; \ldots; y_n) =$$

$$= \frac{f_E\left(y_1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1j} a_j;\ \cdots;\ y_n - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{nj} a_j \right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_E\left(y_1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1j} A_j;\ \cdots;\ y_n - \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{nj} A_j \right) dA_1 \cdots dA_m}, \tag{9}$$

а искомую вероятность P_T вычислим как интеграл

$$P_T = \int\limits_G f(A_1; \ldots; A_m \mid y_1; \ldots; y_n) dA_1 \ldots dA_m, \tag{10}$$

где G – множество векторов **A**, координаты которых $A_1, \ldots, A_m$ удовлетворяют условиям

$$x_н < \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi_j(T) < x_в. \tag{11}$$

Частично наблюдаемый процесс

Теперь рассмотрим аналогичную задачу при наличии неизмеряемых компонент управляемого процесса:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \varphi_j(t) + \eta(t), \quad t \in [0,\ T],$$

где $\eta(t)$ – эффект влияния недоступных для наблюдения факторов.

Будем считать, что о величине $\eta(t)$ нет никакой информации, кроме границ (в общем случае – зависящих от времени) ее возможных значений:

$$\eta(t) \in [\eta_н(t),\ \eta_в(t)], \quad t \in [0,\ T]. \tag{12}$$

Если бы значения η в моменты контрольных измерений t_i, $i=\overline{1,n}$ были известны, то формулы предыдущего раздела, очевидно, были бы применимы при подстановке $[y_i - \eta(t_i)]$ вместо y_i. В частности, формула (10) преобразуется в соотношение

$$P_T = \int_G f(A_1;\ \cdots\ ;A_m \mid y_1 - \eta(t_1);\ \cdots\ ;y_n - \eta(t_n))dA_1 \cdots dA_m\,, \qquad (13)$$

отражающее зависимость вероятности P_T от неизмеряемой компоненты $\eta(t)$.

Поскольку значения $\eta(t_i)$ не известны, вероятность P_T не может быть найдена по формуле (13). Однако, зная ограничения на компоненту $\eta(t)$, можно найти границы интервала $[P_н, P_в]$, в котором лежит P_T:

$$P_н = \min_{\boldsymbol{\eta}\in Q} P_T(\eta_1,\ \cdots, \eta_n); \quad P_в = \max_{\boldsymbol{\eta}\in Q} P_T(\eta_1,\ \cdots, \eta_n),$$

где $\eta_i = \eta(t_i)$, $i=\overline{1,n}$; $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$; Q – множество векторов $\boldsymbol{\eta}$, элементы которых удовлетворяют условию (12).

На практике распределение ошибок измерений обычно описывается нормальным законом. Для определенности будем считать, что ошибки $E_1, E_2, \ldots, E_n$ являются гауссовыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием:

$$f_E(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots; \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_i^2}\right),$$

где σ_i – среднее квадратическое отклонение ошибки i-го измерения. При этом формула (9) принимает вид

$$f(a_1; \ldots; a_m | \eta_1; \ldots; \eta_n) = \\ = \frac{\exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2}\left(y_i - \eta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_j\,\varphi_j(t_i)\right)^2\right\}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2}\left(y_i - \eta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} A_j\,\varphi_j(t_i)\right)^2\right\} dA_1\,dA_2\cdots dA_m},$$

откуда следует

$$P_T = \frac{\int\limits_G \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2}\left(y_i - \eta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} A_j\,\varphi_j(t_i)\right)^2\right\} dA_1\,dA_2\cdots dA_m}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma_i^2}\left(y_i - \eta_i - \sum\limits_{j=1}^{m} A_j\,\varphi_j(t_i)\right)^2\right\} dA_1\,dA_2\cdots dA_m}. \qquad (14)$$

Введем обозначения $z_i = \dfrac{y_i - \eta_i}{\sqrt{2}\sigma_i}$, $\quad \psi_{ij} = \dfrac{\varphi_j(t_i)}{\sqrt{2}\sigma_i}$, тогда

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma_i^2}\left(y_i - \eta_i - \sum_{j=1}^{m} A_j\,\varphi_j(t_i)\right)^2\right\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \sum_{j=1}^{m} A_j\psi_{ij}\right)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{j=1}^{m} A_j \psi_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} A_j \psi_{ij}\right)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{i=1}^{n} z_i \psi_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_j \psi_{ij} A_k \psi_{ik}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{i=1}^{n} z_i \psi_{ij} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_{ij}\psi_{ik}\right) A_j A_k\right\}.$$

Последняя сумма в показателе степени является симметрической квадратичной формой от $A_1, \ldots, A_m$, поэтому существует невырожденное однородное линейное преобразование с действительными коэффициентами, приводящее ее к сумме квадратов новых переменных $u_1, \ldots, u_m$ [4]. При этом вторая сумма показателя – линейная форма – принимает вид $\sum_{j=1}^{m} 2u_j L_j(z_1, \ldots, z_n)$, где $L_1, \ldots, L_m$ – некоторые линейные комбинации от $z_1, \ldots, z_n$. Выполнив такую замену переменных в интегралах числителя и знаменателя (14) и умножив затем оба интеграла на $\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{j=1}^{m}\left[L_j(z_1, \cdots, z_n)\right]^2\right\}$, получим:

$$P_T = \frac{\int\limits_W \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\left[u_j - L_j(z_1, \ldots, z_n)\right]^2\right\} du_1 \ldots du_m}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\left[u_j - L_j(z_1, \ldots, z_n)\right]^2\right\} du_1 \ldots du_m}, \qquad (15)$$

где W – образ множества G в пространстве переменных $u_1, \ldots, u_m$.

Окончательное выражение для вероятности P_T найдем, вычислив интеграл в знаменателе (15) и абстрагировавшись от аргументов $z_1, \ldots, z_n$:

$$P_T = P_T(L_1, \ldots, L_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi^m}} \int\limits_W \ldots \int \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\left(u_j - L_j\right)^2\right\} du_1 \cdots du_m. \qquad (16)$$

В силу линейности выполненного преобразования переменных интегрирования линейным ограничениям (11) соответствуют линейные ограничения на новые переменные, т.е. W – множество векторов $(u_1, \ldots, u_m)$, координаты которых удовлетворяют условиям $x_н < \sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_j < x_в$, с постоянными коэффициентами $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Поскольку множество W выпукло и симметрично относительно гиперплоскости $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j u_j = (x_н + x_в)/2$, максимальную вероятность $P_в$ можно найти, подставив в формулу (16) значения $L_1, \ldots, L_m$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j L_j = (x_н + x_в)/2. \qquad (17)$$

При удалении точки $(L_1, \ldots, L_m)$ от этой гиперплоскости значение вероятности $P_T(L_1, \ldots, L_m)$ уменьшается. Поскольку квадрат расстояния от какой-либо точки $(L_1^*, \ldots, L_m^*)$ до гиперплоскости (17) определяется отношением [5]

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j L_j^* - (x_н + x_в)/2 \right)^2 \Big/ \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2 ,$$

минимальную вероятность $P_в$ нетрудно найти, выразив переменные L_j^* через $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Наибольшее удаление от гиперплоскости (17) достигается, очевидно, при выборе $\eta_i = \eta_н(t_i)$ или $\eta_i = \eta_в(t_i)$ (в зависимости от знака коэффициента при η_i) для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заключение

Предлагаемый в данной статье подход может применяться при небольшом количестве контрольных измерений, поскольку он не использует асимптотические свойства оценок. Не требуется и знания априорной плотности распределения вероятностей оцениваемых параметров. Ключевым звеном является формула (9), которая допускает следующую интерпретацию с точки зрения байесовского подхода. Предположим, что задана некоторая ограниченная область, за пределами которой плотность совместного распределения оцениваемых параметров равна нулю. В подобных ситуациях неизвестный априорный закон распределения, как правило, заменяется равномерным на заданном ограниченном множестве ввиду отсутствия оснований отдать заранее предпочтение каким-либо значениям случайных величин. В этом случае формула (9) совпадает с формулой Байеса. При минимаксном подходе вместо неизвестного априорного распределения часто используется равномерное как наименее информативное в смысле того или иного критерия (как наиболее «осторожное», т.е. минимизирующее максимальный риск [6]), и формула (9) вполне согласуется с этим фактом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Физматгиз, 1963.
2. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.
3. *Кривошеев В.П., Торгашов А.Ю.* Управление процессом ректификации на основе обратной нелинейной модели при воздействии возмущений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2002. – № 5. – С. 127-135.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.
5. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966.
6. *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Советское радио, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:
Климченко Владимир Владимирович – volk@iacp.dvo.ru.