



УДК 681.51

© 2016 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

МОДИФИКАЦИЯ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОКАНАЛЬНЫМ ОБЪЕКТОМ С ВХОДНЫМ НАСЫЩЕНИЕМ

Рассматривается динамическая коррекция процесса самонастройки коэффициентов адаптивного регулятора в системе управления одноканальным объектом с ограничением по входу, функционирующим в условиях априорной неопределенности при действии внешних и параметрических возмущений. Синтез алгоритмов адаптивной системы управления основан на применении критерия гиперустойчивости и условий L -диссипативности, а также связан с использованием фильтр-корректора и явной эталонной модели с двумя выходами. Особенностью предлагаемой модификации контура адаптации, в отличие от известных способов, является применение динамического переключателя.

Ключевые слова: объект управления с насыщением по входу, эталонная модель с двумя выходами, фильтр-корректор, адаптивная система управления, динамический переключатель, гиперустойчивость, L -диссипативность.

DOI: 10.22250/isu.2016.49.119-131

Введение

Фактически в любой системе автоматического управления присутствует ограничение по входу, которое может возникать, например, из-за насыщения привода или по иной причине. Несмотря на это, при решении многих задач синтеза адаптивных систем управления присутствие входного ограничения зачастую игнорируется, что в результате может привести к ухудшению качества или потере работоспособности разрабатываемых систем управления. Более того, в ряде случаев из-за некорректного синтеза алгоритмов управления могут возникнуть и катастрофические последствия [1].

Одна из первых схем адаптивной системы управления объектом с входным ограничением была предложена в работе [2], за которой последовала разработка различных способов построения систем адаптации [3 – 13]. Например, в работах [8 – 13] предлагается структура адаптивной системы управления с эталонной моделью и ее модифицированные схемы, обеспечивающие как ограниченность всех сигналов замкнутой системы, так и сходимости ошибки слежения к нулю. Отличительной особенностью этих систем является введение в контур адаптации переключателя, который за счет изменения (заданным образом) скорости настройки

коэффициентов регулятора, частично или полностью компенсирует влияние входного насыщения. Однако такие результаты получены и строго обоснованы лишь в случае, когда одноканальный объект с насыщением удовлетворяет следующим допущениям: внешние помехи отсутствуют; переменные состояния объекта управления доступны измерению; значение некоторых параметров объекта известны или допускают возможность их идентификации.

В данной статье рассматривается задача управления параметрически неопределенным одноканальным объектом с входным насыщением без измерения его переменных состояния и при постоянно действующем внешнем возмущении. При этом в системе управления используется контур адаптации, в котором вместо статического вводится динамический переключатель, исключающий возможность возникновения скользящих режимов.

Решение указанной задачи основано на применении критерия гиперустойчивости и условий L -диссипативности, а при разработке адаптивной системы управления используются аналоги стабилизирующих устройств [14] и методика синтеза, применяемая в работах [15 – 24].

Математическая модель исходной системы управления

Пусть стационарный SISO объект управления (OY) в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B(\sigma(u(t)) + f(t)), \quad y(t) = x_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – состояния; x_0 – вектор начальных условий; $f(t) \in R$ – возмущение; $|f(t)| \leq f_0 = const$; $y(t) \in R$ – регулируемый выход; A – матрица в форме Фробениуса, нижняя строка которой имеет вид $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$; $B^T = [0, \dots, 0, b]$ – вектор n -го порядка; $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b = const$ – числовые коэффициенты; $u(t) \in R$ – управление; $\sigma(u(t))$ – нелинейная функция насыщения вида

$$\sigma(u(t)) = \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0, & u(t) > \sigma_0, \\ u(t), & |u(t)| \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0, & u(t) < -\sigma_0, \end{cases} \quad (2)$$

здесь $\sigma_0 > 0$ – известная константа, характеризующая уровень насыщения. Уравнению выхода $y(t)$, записанному относительно входного сигнала $\sigma(t)$ в изображениях по Лапласу, соответствует выражение

$$y(s) = W_{OY}(s)\sigma(s) = L^T (sE - A)^{-1} B\sigma(s) = \frac{b}{a(s)}\sigma(s), \quad (3)$$

где $L^T = [1, 0, \dots, 0]$ – вектор n -го порядка; $a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ – нормированный полином; s – комплексная переменная.

Предполагается, что OY удовлетворяет следующим допущениям:

- 1) коэффициент $b > 0$;
- 2) величина f_0 и коэффициенты $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, b$ – постоянные и априорно неопределенные числа, значения которых зависят от набора неизвестных параметров $\xi \in \Xi$, Ξ – известное ограниченное множество;

3) прямым измерениям доступен только сигнал $y(t) = x_1(t)$.

В системе управления, подобно [23, 24], используется явный эталон с двумя выходами, что эквивалентно применению двух эталонных моделей. При этом с помощью *основной эталонной модели (ОЭМ)* формируется желаемое поведение OY , а за счет *вспомогательной эталонной модели (ВЭМ)* обеспечивается требуемая динамика основного контура управления (*ОКУ*).

Модель явного эталона описывается уравнениями

$$\frac{dx_M(t)}{dt} = A_M x_M(t) + B_M r(t), \quad x_M(0) = x_{M0}, \quad y_M(t) = x_{1M}(t), \quad z_M(t) = g^T x_M(t), \quad (4)$$

где $x_M(t) \in R^n$ – состояния; $y_M(t)$, $z_M(t)$ – основной и вспомогательный выходы; $r(t) \in R$ – задание; $A_M = (A - Bc_0^T)$ – гурвицева матрица с заданным расположением собственных значений; $B_M = Bk_0 = [0, \dots, 0, b_M]^T$, $b_M = bk_0$; k_0 и g , $c_0^T = (c_{01}, \dots, c_{0n})$ – соответственно число и векторы с постоянными значениями. Отметим, что если уравнения (4) переписать в изображениях:

$$y_M(s) = W_{OЭМ}(s)r(s) = L^T (sE - A_M)^{-1} B_M r(s) = \frac{b_M}{a_M(s)} r(s), \quad (5)$$

$$z_M(s) = W_{BЭМ}(s)r(s) = g^T (sE - A_M)^{-1} B_M r(s) = \frac{b_M g(s)}{a_M(s)} r(s), \quad (6)$$

где $W_{OЭМ}(s)$ и $W_{BЭМ}(s)$ – передаточные функции *ОЭМ* и *ВЭМ*, то хорошо видно, что структура передаточной функции (6) допускает упрощение. Действительно, за счет выбора значений коэффициентов вектора $g = [1, g_1, \dots, g_{n-1}]^T$ из условия

$$a_M(s) = (s + a_*)g(s) = (s + a_*) \left(s^{n-1} + \frac{g_{n-2}}{g_{n-1}} s^{n-2} + \dots + \frac{g_1}{g_{n-1}} s + \frac{1}{g_{n-1}} \right) g_{n-1}, \quad (7)$$

где a_* – любой из корней полинома $a_M(s) = s^n + a_{M(n-1)}s^{n-1} + \dots + a_{M1}s + a_{M0}$, получаем, что *ВЭМ* – инерционное звено 1-го порядка, т.е.

$$z_M(s) = W_{BЭМ}(s)r(s) = \frac{a_* b_M}{s + a_*} r(s). \quad (8)$$

Структура адаптивного регулятора задана следующим образом:

$$u(t) = k(t)r(t) - \sum_{i=1}^n c_i(t) x_i(t), \quad (9)$$

где $k(t)$ и $c_i(t)$ – коэффициенты самонастройки.

Постановка задачи

Разработку адаптивной системы управления осуществим поэтапно.

1. Предполагая, что переменные вектора состояния $x(t)$ доступны измерению, *определим* явный вид алгоритмов настройки коэффициентов $k(t)$, $c_i(t)$.

2. Введем в систему фильтр-корректор, на основе которого *получим* $\tilde{x}(t)$ – вектор оценок переменных $x(t)$ и построим технически реализуемый регулятор.

3. *Найдем* условия, обеспечивающие разработанной системе управления L -диссипативность и работоспособность в условиях неопределенности Ξ .

Для удобства дальнейших преобразований сформируем $z(t)$ – дополнительный (второй) выход OU и запишем уравнение (1) эквивалентным образом

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + B(\sigma(u(t)) - u(t) + f(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (10)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad z(t) = g^T x(t),$$

а также, рассматривая уравнения (1), (4), (9) и вектор отклонений $e(t) = x_M(t) - x(t)$, построим математическую модель в виде нелинейной системы первого типа:

$$\frac{de(t)}{dt} = A_M e(t) + B_M \mu(t), \quad v(t) = g^T e(t), \quad \Delta y(t) = y_M(t) - y(t), \quad (11)$$

$$\mu(t) = -k_0^{-1} \left\{ (k(t) - k_0)r(t) - \sum_{i=1}^n (c_i(t) - c_{0i})x_i(t) + \sigma(u(t)) - u(t) + f(t) \right\}, \quad (12)$$

где $\mu(t)$ – видоизмененное управление; $v(t)$ и $\Delta y(t)$ – ошибки выходных сигналов соответственно OKU и OU .

Постановка задачи. Для эквивалентных систем управления (1), (2), (4), (9) и (2), (11), (12) требуется синтезировать явный вид алгоритмов самонастройки коэффициентов $k(t)$ и $c_i(t)$ так, чтобы при любых x_0 и произвольном наборе $\xi \in \Xi$ было бы достигнуто выполнение как вспомогательной цели управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t)| \leq d_1 = const, \quad (13)$$

так и основной

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta y(t)| \leq d_0 = const; \quad (14)$$

а также целей адаптации

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |k(t)| \leq k_0 = const, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |c_i(t)| \leq c_{0i} = const, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где d_0, d_1 – малые скалярные величины. Здесь уместно отметить, что в адаптивной системе управления регулируемым выходом, относительно которого сформулирована вспомогательная цель, является выход OKU .

Синтез алгоритмов адаптации в системе (2), (11), (12) будем осуществлять на основе критерия гиперустойчивости. Следовательно, подобно [19, 23, 24], потребуется обеспечить выполнение следующих неравенств:

$$\operatorname{Re} W_{OKU}(j\omega) > 0, \quad \forall \omega, \quad (16)$$

где $W_{OKU}(j\omega)$ – частотная передаточная функция OKU ;

$$\eta(0, t) = -\int_0^t \mu(\theta)v(\theta)d\theta > -h_0 = const, \quad \forall t > 0. \quad (17)$$

Поскольку для (11) всегда можно выполнить тождество

$$v(s) = W_{OKU}(s)\mu(s) = g^T (sE - A_M)^{-1} B_M \mu(s) = \frac{b_M g(s)}{a_M(s)} \mu(s) = \frac{a_* b_M}{s + a_*} \mu(s), \quad (18)$$

то частотное условие (16) всегда имеет место.

Иначе говоря, синтез алгоритмов настройки коэффициентов адаптивного регулятора и вида функции переключения связан только с разрешением интегрального неравенства Попова (17).

Алгоритмы самонастройки адаптивной системы управления

Если, предполагая измеримыми переменные состояния $x(t)$, алгоритмы самонастройки коэффициентов регулятора (9) синтезировать следующим образом:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \begin{cases} h_0 r(t) v(t) \tilde{\delta}(t), & \forall |v(t)| > v_0, \\ 0, & \forall |v(t)| \leq v_0, \end{cases} \quad (19)$$

$$h_0 = \text{const} > 0, \quad v_0 = \text{const} > 0, \quad k(0) = 0,$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \begin{cases} -h_i x_i(t) v(t) \tilde{\delta}(t), & \forall |v(t)| > v_0, \\ 0, & \forall |v(t)| \leq v_0, \end{cases} \quad (20)$$

$$h_i = \text{const} > 0, \quad c_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

дополнительно изменяя скорость настройки коэффициентов регулятора с помощью динамического переключателя, описываемого уравнением

$$\tau \frac{d\tilde{\delta}(t)}{dt} + \tilde{\delta}(t) = \delta(t), \quad \tilde{\delta}(0) = 0, \quad \tau = \text{const} > 0, \quad (21)$$

где τ – заданная постоянная времени; $\tilde{\delta}(t)$ – выход динамического переключателя; $\delta(t)$ – функция переключения вида

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \forall [\sigma(u(t)) - u(t)]v(t) \geq 0, \\ \delta_0, & \forall [\sigma(u(t)) - u(t)]v(t) < 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$0 < \delta_0 = \text{const} < 1,$$

то левую часть выражения (17) можно преобразовать к следующему виду:

$$\eta(0, t) = k_0^{-1} \left\{ \int_0^t (k(\theta) - k_0) r(\theta) v(\theta) d\theta - \sum_{i=1}^n \int_0^t (c_i(\theta) - c_{0i}) x_i(\theta) v(\theta) d\theta + \int_0^t [\sigma(u(\theta)) - u(\theta)] v(\theta) d\theta \right\}, \quad (23)$$

относительно которого, как показано в *приложении*, будет иметь место интегральное неравенство Попова (17).

Таким образом, система управления (2), (11), (12), (19) – (22) в силу выполнения условий (16), (17) является гиперустойчивой и адаптивной, в которой будет достижима вспомогательная цель управления (13). При этом, учитывая (11), (18), будет выполняться и основная цель управления (14).

Однако разработка системы (2), (11), (12), (19) – (22) была осуществлена в предположении, что переменные состояния объекта $x(t)$ измеримы, хотя фактически измеряется лишь выход объекта $y(t)$, следовательно, адаптивный регулятор (9) и алгоритмы настройки (19), (20) технически нереализуемы. Поэтому для практического применения разработанной адаптивной системы управления необходимо иметь оценки переменных состояния объекта $\tilde{x}(t)$. С этой целью к выходу объекта (1) подключим фильтр-корректор и опишем его динамику, подобно [18, 19, 21 – 24], уравнениями

$$\frac{dx_\phi(t)}{dt} = A_\phi x_\phi(t) + By(t), \quad z_\phi(t) = q_\phi^T x_\phi(t) + D_\phi y(t), \quad (24)$$

где $z_\phi(t)$ и $x_\phi^T(t) = [x_{\phi 1}(t), \dots, x_{\phi(n-1)}(t)]$ – соответственно скалярный выход и вектор состояния фильтра. Элементы матриц A_ϕ , D_ϕ и вектора q_ϕ зададим так, чтобы передаточная функция фильтра-корректора имела вид:

$$W_\phi(s) = \frac{z_\phi(s)}{y(s)} = q^T (sE_{n-1} - A_\phi)^{-1} B + D_\phi = \frac{g(s)}{(Ts + 1)^{n-1}}, \quad (25)$$

где T – малая постоянная времени.

Можно показать, рассматривая установившийся режим в адаптивных системах управления (2), (11), (12), (19) – (22), (25) и (1), (2), (4), (9), (19) – (22), (25), что, задавая величину T меньше любого из следующих значений

$$T_1 = \frac{0.93}{(n-2)a_{M1}}, \quad T_2 = \frac{0.465 a_{M1}}{(n-1)a_{M2}}, \quad (26)$$

эти системы, аналогично [25], окажутся L -диссипативными. Другими словами, система (1), (2), (4), (9), (19) – (22), (25), теряя гиперустойчивость, сохранит работоспособность и адаптивность в заданном классе. Более того, поскольку адаптивная система управления (1), (2), (4), (9), (19) – (22), (25) теперь содержит оценки переменных состояния $x(t)$, математическое описание регулятора (9) и алгоритмов (19), (20) можно заменить уравнениями, которые имеют техническую реализацию

$$u(t) = k(t)r(t) - \sum_{i=1}^n c_i(t)x_{\phi i}(t), \quad (27)$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \begin{cases} h_0 r(t) \tilde{v}(t) \tilde{\delta}(t), & \forall |\tilde{v}(t)| > \nu_0, \\ 0, & \forall |\tilde{v}(t)| \leq \nu_0, \end{cases}$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \begin{cases} -h_i x_{\phi i}(t) \tilde{v}(t) \tilde{\delta}(t), & \forall |\tilde{v}(t)| > \nu_0, \\ 0, & \forall |\tilde{v}(t)| \leq \nu_0, \end{cases} \quad (28)$$

$$\tilde{v}(t) = g^T (x_M(t) - x_\phi(t)) = z_M(t) - z_\phi(t),$$

$$h_0, h_i = \text{const} > 0, \quad k(0), c_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $x_{\phi i}(t), i = \overline{1, n}$ – оценки переменных состояния $x_{ji}(t)$.

Окончательно, учитывая (27), (28), адаптивная система управления будет описываться уравнениями (1), (2), (4), (21), (22), (25), (27), (28).

Вычислительный эксперимент

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим одноканальный ОУ (1), (2) третьего порядка с входным насыщением ($\sigma_0 = 10$), функционирующий в условиях априорной неопределенности, уровень которой задан соотношениями:

$$-4 \leq a_0 \leq 3.5, \quad 0 \leq a_1 \leq 2, \quad -5.0 \leq a_2 \leq -3, \quad 1. \leq b \leq 1.5, \quad f_0 \leq 2,$$

где параметры объекта принимают следующие значения:

$$a_0 = 1.5, \quad a_1 = 1, \quad a_2 \leq -4, \quad b = 1.5; \quad \sigma_0 = 10, \quad (29)$$

а внешняя помеха является гармонической

$$f(t) = 2 \cdot \sin(0.03t). \quad (30)$$

Пусть к выходу объекта (1), (2), (29) подключен фильтр-корректор (25), описываемый уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\phi 1}(t) &= x_{\phi 2}(t), \\ \dot{x}_{\phi 2}(t) &= -10^6 \cdot x_{\phi 1}(t) - 2000 \cdot x_{\phi 2}(t) + 10^6 \cdot y(t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$z_{\phi}(t) = x_{\phi 1}(t) + x_{\phi 2}(t) + 0.25 \cdot \dot{x}_{\phi 2}(t), \quad x_{\phi 1}(0) = x_{\phi 2}(0) = 0,$$

а желаемое поведение объекта (1), (2), (29) и требуемая динамика основного контура (1), (2), (29), (31) определяются явной эталонной моделью с двумя выходами

$$\begin{aligned} \dot{x}_{M1}(t) &= x_{M2}(t), \\ \dot{x}_{M2}(t) &= x_{M3}(t), \\ \dot{x}_{M3}(t) &= -8 \cdot x_{M1}(t) - 12 \cdot x_{M2}(t) - 6 \cdot x_{M3}(t) + 8 \cdot r(t), \\ y_M(t) &= x_{M1}(t), \end{aligned} \quad (32)$$

$$z_M(t) = x_{M1}(t) + x_{M2}(t) + 0.25 \cdot x_{M3}(t),$$

$$x_{M1}(0) = x_{M2}(0) = x_{M3}(0) = 0,$$

$$r(t) = 1.2 + 0.5 \cdot \sin(0.03t) + 0.6 \cdot \sin(0.06t).$$

Как следует из предыдущего для объекта управления (1), (2), (29), (30) с фильтр-корректором (31) и эталонной моделью (32), достижение целевых условий (13) – (15) обеспечивает адаптивный контур (21), (22), (25), (27), (28), параметры которого на этапе имитационного моделирования были выбраны со значениями:

$$\begin{aligned} g^T &= (1 \ 1 \ 0.25), \\ h_0 &= 3000, \quad h_1 = 2500, \quad h_2 = 1000, \quad h_3 = 300; \\ k(0) &= c_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ v_0 &= 0.0001; \quad \delta_0 = 0.0001. \end{aligned} \quad (33)$$

На рис. 1 показаны результаты моделирования по ошибке $\Delta y(t) = y_M(t) - y(t)$ системы управления (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33) при начальных условиях $x_0 = 0$.

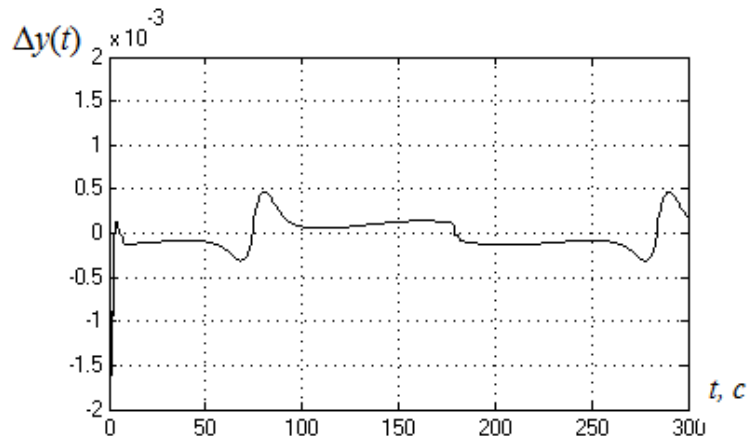


Рис. 1. Характер изменения ошибки в системах типа (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33).

При этом один и тот же график $\Delta y(t)$ будет соответствовать трем системам, у которых контуры адаптации построены как с переключателями (статическим, $\tau = 0$; динамическим, $\tau = 2$), так и без него ($\tilde{\delta}(t) = 1$). Такая ситуация, как видно из графиков на рис. 2, имеет простое объяснение – модуль управляющего воздействия $u(t)$ не превышает величину $\sigma_0 = 10$, т.е. в данном случае наличие в объекте насыщения по входу не оказывает влияния на процессы, протекающие в системе управления.

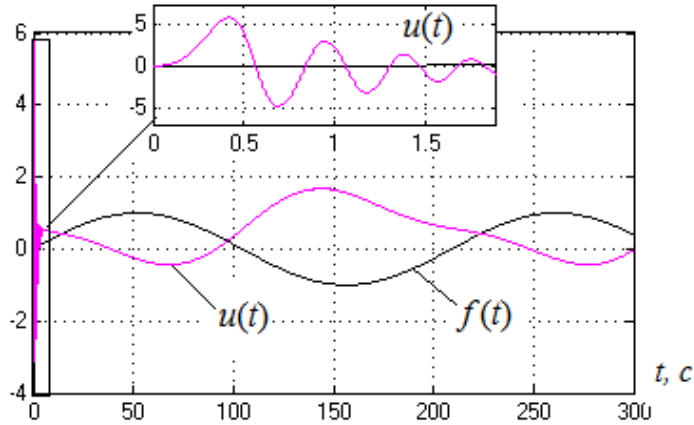


Рис. 2. Динамика управляющего воздействия в системах типа (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33).

При ненулевых начальных условиях динамические процессы рассматриваемых систем управления начинают существенно различаться между собой.

В частности, при начальных условиях $x_1(0) = 0.2$ и $x_2(0) = -0.1$ адаптивная система управления (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33), без переключателя в контуре настройки коэффициентов адаптивного регулятора, фактически теряет работоспособность, поскольку, как показано на рис. 3, система не отрабатывает заданную траекторию движения объекта управления.

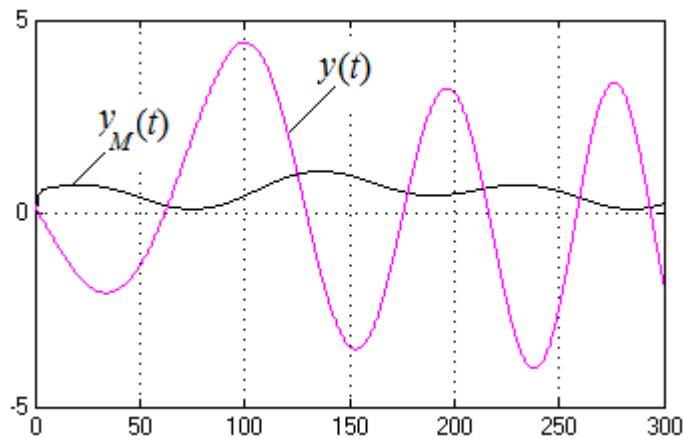


Рис. 3. Динамика системы (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33) без переключателя.

При этом адаптивная система управления (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33), использующая статический переключатель ($\tau = 0$), будет сохранять работоспособность, но качество работы системы управления (быстродействие, точность) оказывается неудовлетворительным (рис. 4). Кроме того, управляющее воздействие становится кусочно-постоянным и высокочастотным, принимающим предельно допустимые значения $\pm\sigma_0$.

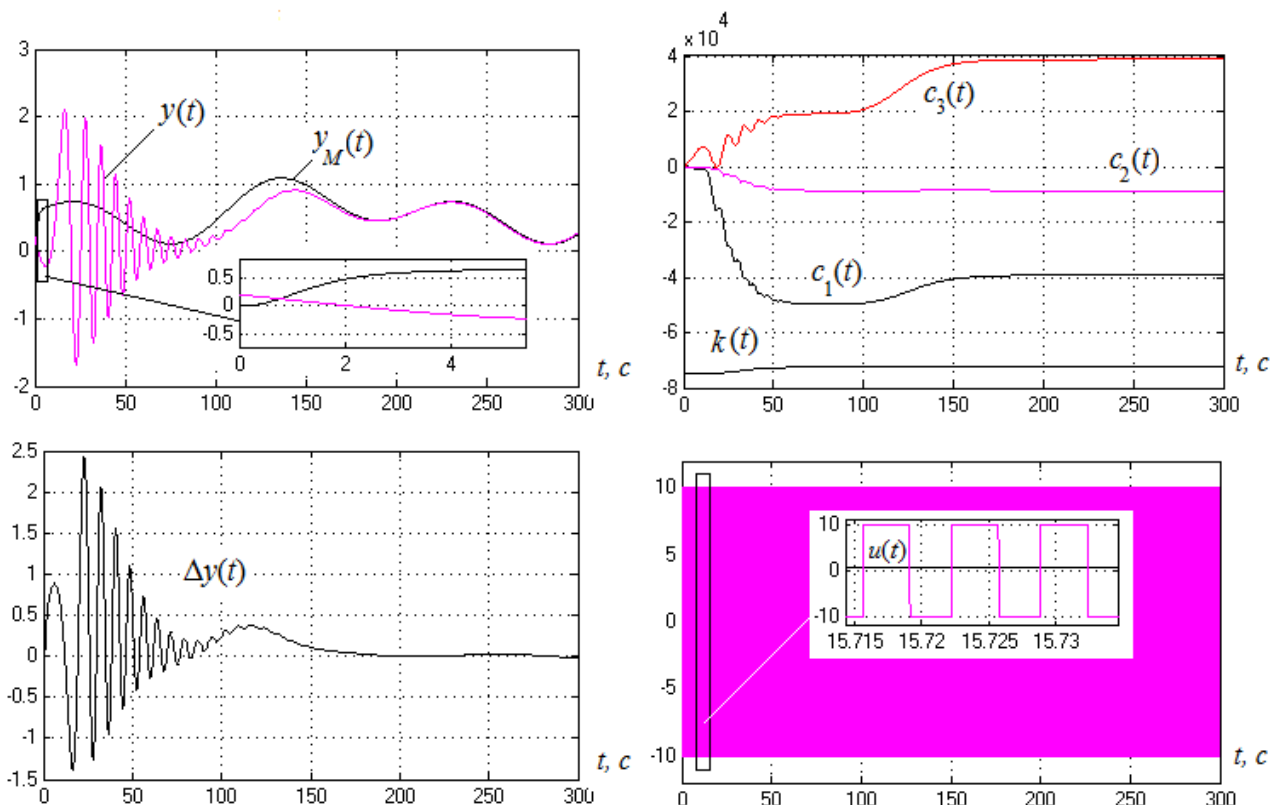


Рис. 4. Динамические процессы в системе (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33) при $\tau = 0$.

Однако показатели качества адаптивной системы управления (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33), при тех же начальных условиях, но уже с динамическим переключателем ($\tau = 2$) в контуре адаптации, по-прежнему, остаются достаточно высокими (рис. 5).

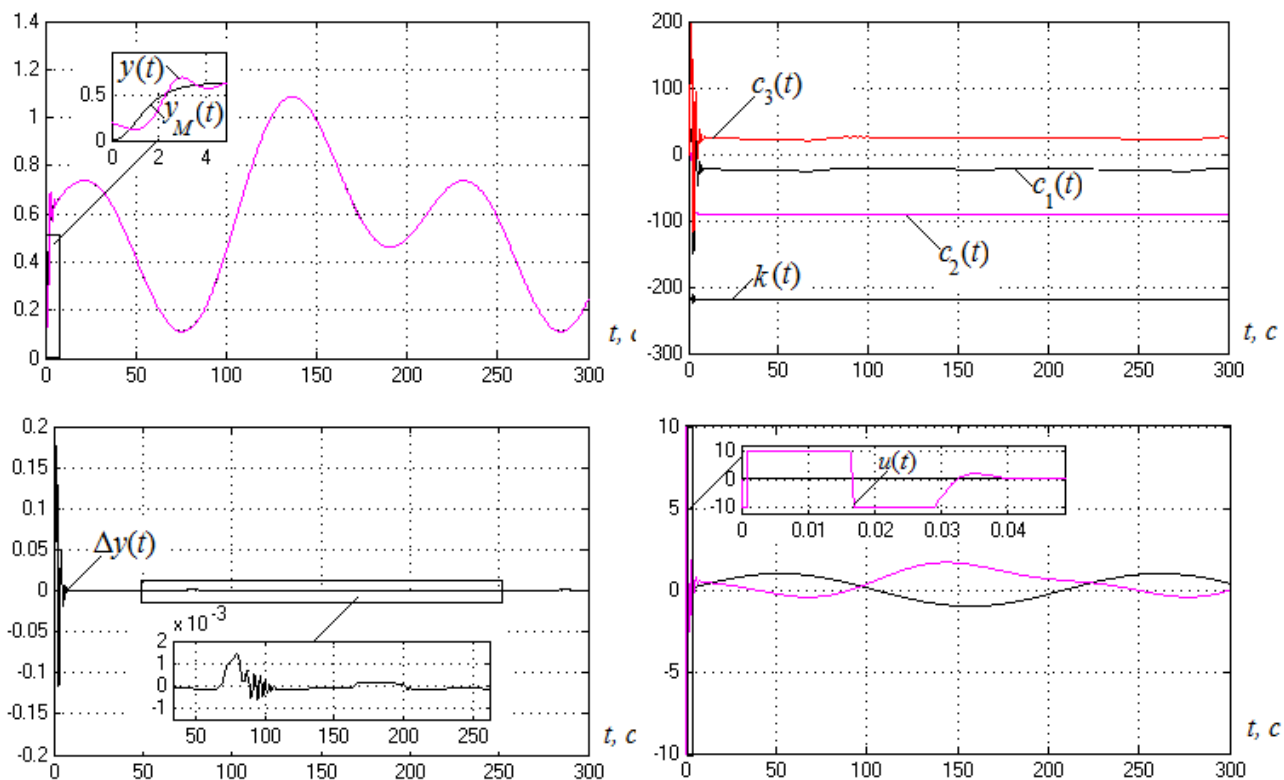


Рис. 5. Динамические процессы в системе (1), (2), (21), (22), (25), (27) – (33) при $\tau = 2$.

Действительно, спустя несколько секунд с начала работы в адаптивной системе управления завершается процесс настройки коэффициентов регулятора, после чего она выходит на заданный режим, и объект управления с ошибкой, не превышающей 0.1%, начинает отслеживать заданную траекторию движения. При этом управление выходит на предельные значения только в начале работы, на этапе отработки существенного начального рассогласования между эталоном и объектом, а затем управляющее воздействие не превышает уровень входного насыщения объекта.

Заключение

Предложена модификация контура самонастройки коэффициентов адаптивного регулятора для систем управления в классе одноканальных объектов с ограничением по входу. В отличие от адаптивных систем управления со статическим переключателем в контуре настройки коэффициентов регулятора применение динамического переключателя позволяет более эффективно компенсировать влияние входного насыщения в тех случаях, когда начальные условия ненулевые, относительный порядок объекта больше единицы, а переменные состояния не измеряются. При этом гарантированно обеспечивается желаемое качество функционирования объекта управления в условиях априорной неопределенности, при наличии постоянно действующих внешних и параметрических помех.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С целью получения условий, обеспечивающих выполнение интегрального неравенства (17), осуществим оценку значений интеграла (19), принимая во внимание функцию переключения (23), принимающую только два значения.

Во-первых, рассматривая случай $\delta(t) = 1$, соответствующий условию $[\sigma(u(t)) - u(t)]v(t) \geq 0$,

согласно решению уравнения (22)

$$\tilde{\delta}(t) = \tilde{\delta}(0) \exp(-t/\tau) + [1 - \exp(-t/\tau)]1(t),$$

можно считать, что $\tilde{\delta}(t) \cong 1, \forall t \geq t_* = const \gg \tau$, трактуя это допущение как наличие в задаче управления некоего затухающего возмущения. Тогда, учитывая неотрицательное значение функционала

$$\int_0^t [\sigma(u(\theta)) - u(\theta)]v(\theta)d\theta \geq 0,$$

для интеграла (17), с учетом алгоритмов (19), (20), можно получить оценку

$$\begin{aligned} \eta(0,t) &\geq \eta_* + k_0^{-1} \int_{t_*}^t \frac{(k(\theta) - k_0) dk(\theta)}{h_0} d\theta + k_0^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{t_*}^t \frac{(c_i(\theta) - c_{0i}) dc_i(\theta)}{h_i} d\theta \geq \\ &\geq \eta_* - 0.5k_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} = const, \quad \forall t > 0, \end{aligned} \tag{П.1}$$

где $\eta_* = \eta(0, t_*)$ – это некоторое число:

$$\eta_* = k_0^{-1} \int_0^{t_*} \left\{ \tilde{\delta}(0) \exp(-\theta/\tau) + [1 - \exp(-\theta/\tau)] \right\} \frac{(k(\theta) - k_0)}{h_0} \frac{dk(\theta)}{d\theta} d\theta -$$

$$- k_0^{-1} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_*} \left\{ \tilde{\delta}(0) \exp(-\theta/\tau) + [1 - \exp(-\theta/\tau)] \right\} \frac{(c_i(\theta) - c_{0i})}{h_i} \frac{dc_i(\theta)}{d\theta} d\theta = const$$

в силу ограниченности подынтегральных функций на конечном временном интервале.

Во-вторых, в случае, когда $\delta(t) = \delta_0$, в силу существования неравенства $[\sigma(u(t)) - u(t)]v(t) < 0$,

аналогично предыдущему и с учетом решения

$$\tilde{\delta}(t) = \tilde{\delta}(0) \exp(-t/\tau) + [1 - \exp(-t/\tau)] \delta_0(t),$$

$$\tilde{\delta}(t) \cong \delta_0,$$

$$\forall t \geq t_* = const \gg \tau,$$

для интеграла (19) можно записать соотношение

$$\eta(0, t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} + \int_0^t [\sigma(u(\theta)) - u(\theta)] v(\theta) d\theta. \quad (\text{П.2})$$

Поскольку интеграл в этом выражении, согласно (2), отличен от нуля при условии $|u(t)| > \sigma_0$, то неравенство (П.2) можно представить в виде:

при $u(t) > \sigma_0$,

$$\eta(0, t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} + \int_0^t [\sigma_0 - u(\theta)] v(\theta) d\theta; \quad (\text{П.3})$$

при $u(t) < -\sigma_0$,

$$\eta(0, t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} + \int_0^t [-\sigma_0 - u(\theta)] v(\theta) d\theta, \quad (\text{П.4})$$

а используя интегральное тождество [20]

$$\int_0^t u(\theta) v(\theta) d\theta = \int_0^t \left(k(\theta) r(\theta) v(\theta) + \sum_{i=1}^n c_i(\theta) x_i(\theta) v(\theta) \right) d\theta =$$

$$= \delta_0 h_0 \int_0^t r(\theta) v(\theta) \int_0^\theta r(v) v(v) dv d\theta +$$

$$+ \delta_0 \sum_{i=1}^n h_i \int_0^t x_i(\theta) v(\theta) \int_0^\theta x_i(v) v(v) dv d\theta =$$

$$= 0.5 \delta_0 h_0 \left(\int_0^t r(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2 + 0.5 \delta_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\int_0^t x_i(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2,$$

описать соотношения (П.3) и (П.4) следующим образом:

при $u(t) > \sigma_0$,

$$\eta(0,t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} + \sigma_0 \int_0^t v(\theta) d\theta - 0.5 \delta_0 h_0 \left(\int_0^t r(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2 - 0.5 \delta_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\int_0^t x_i(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2; \quad (\text{П.5})$$

при $u(t) < -\sigma_0$,

$$\eta(0,t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} - \sigma_0 \int_0^t v(\theta) d\theta - 0.5 \delta_0 h_0 \left(\int_0^t r(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2 - 0.5 \delta_0 \sum_{i=1}^n h_i \left(\int_0^t x_i(\theta) v(\theta) d\theta \right)^2. \quad (\text{П.6})$$

Учитывая, что выбор значения δ_0 произволен и задавая его малым числом, выполняем условие $|u(t)| < \sigma_0$ и, как следствие, получаем обнуление интеграла

$$\int_0^t [\sigma(u(\theta)) - u(\theta)] v(\theta) d\theta.$$

Таким образом, при малом значении δ_0 , за счет обнуления суммы интегралов в неравенствах (П.5) и (П.6), для интеграла (П.2) будет справедливой оценка

$$\eta(0,t) \geq \delta_0^{-1} \eta_* - 0.5 k_0^{-1} \delta_0^{-1} \left\{ \frac{(k(t_*) - k_0)^2}{h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{(c_i(t_*) - c_{0i})^2}{h_i} \right\} = const, \quad \forall t > 0, \quad (\text{П.7})$$

а существование оценок (П.1), (П.2) и (П.7) гарантирует выполнение интегрального неравенства Попова (17), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Скрытые колебания и возбуждение интегратора при насыщении в контуре управления летальных аппаратов // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. (Электронный ресурс). – М.: ИПУ РАН, 2014. – С.482-990. (CD-ROM).
2. Monopoli R.V. Adaptive control for system with hard saturation // Proc. of IEEE 14th Conf. on Decision and Control. – 1975. – P.841-842.
3. Feng G., Zhang C., Palaniswami M. Stability analysis of input constrained continuous time indirect adaptive control // Systems and Control Letters. – 1991. – Vol. 17, No. 3. – P.209-215.
4. Wang H., Sun J. Modified model reference adaptive control with saturated inputs // Proc. of IEEE 31st Conf. on Decision and Control. – 1992. – P.3255-3256.
5. Zhang C., Evans, R.J. Continuous direct adaptive control with saturation input constraint // IEEE Tans. on Automatic Control. – 1994. – Vol. 39, No. 8. – P.1718-1722.
6. Yang B-J., Calise A.J., Craig, J.I. Adaptive output feedback control with input saturation // Proc. of 2003 American Control Conference. – 2003. – P.1572-1577.
7. Astrom K.J., Hagglund T. Advanced PID-control. – ISA (The Instrumentation, Systems and Automation Society), 2006.
8. Takagi N., Nishida T., Kobayashi T. A Design of Adaptive Control Systems with Input Saturation // SICE-ICASE International Joint Conference. – 2006. – P.984-987.

9. *Takagi N., Nishida T., Kobayashi T.* Design of adaptive control systems for unstable plants in the presence of input saturation // IEEE SICE Annual Conference. – 2007. – P.454-457.
10. *Takagi N., Oya M., Wang Q., Kobayashi T.* Adaptive control scheme achieving smooth control input in the presence of input saturation // Int. J. Advanced Mechatronic Systems. – 2010. – Vol. 2, No. 4. – P.225-235.
11. *Takagi N., Oya M., Wang Q., Kobayashi T.* Adaptive control of systems with input saturation: A scheme using output derivatives of order up to relative degree // IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA). – 2009. – P.415-420.
12. *Takagi N., Zhuo J., Oya M., Wang Q.* Modification of an adaptive controller for systems with input saturation and available output derivatives up to the order of relative degree // IEEE International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes (ADCONIP). – 2011. – P.114-119.
13. *Takagi N., Sato K., Oya M.* A modified adaptive control scheme in the presence of input saturation // Int. J. Advanced Mechatronic Systems. – 2011. – Vol. 3, No. 3. – P.168-180.
14. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967.
15. *Еремин Е.Л.* L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. I // Информатика и системы управления. – 2006. – № 2(12). – С.94-101.
16. *Еремин Е.Л.* L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. II // Информатика и системы управления. – 2007. – № 1(13). – С.130-139.
17. *Еремин Е.Л.* L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. III // Информатика и системы управления. – 2007. – № 2(14). – С.153-165.
18. *Еремин Е.Л.* L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. IV // Информатика и системы управления. – 2013. – № 2(36). – С.100-106.
19. *Еремин Е.Л.* Адаптивная система управления с неявным эталоном и блоком быстродействующей коррекции // Информатика и системы управления. – 2012. – №1(31). – С.183-194.
20. *Еремин Е.Л., Цыкунов А.М.* Синтез адаптивных систем управления на основе критерия гиперустойчивости. – Бишкек, 1992.
21. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Алгоритмы робастного нелинейного управления нестационарными скалярными объектами // Информатика и системы управления. – 2007. – № 1(13). – С.149-160.
22. *Еремин Е.Л., Кван Н.В., Семичевская Н.П.* Робастное управление нелинейными объектами с наблюдателем полного порядка и быстродействующей эталонной моделью // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 5. – С. 2-6.
23. *Еремин Е.Л., Чепак Л.В.* Робастная система управления аффинным объектом в схеме с двумя эталонными моделями // Информатика и системы управления. – 2014. – №3(41). – С.121-129.
24. *Еремин Е.Л.* Робастный регулятор для неаффинного по управлению нестационарного объекта // Информатика и системы управления. – 2016. – №1(47). – С.106-116.
25. *Еремин Е.Л.* Робастное управление для одного класса неаффинных нелинейных SISO-систем // Информатика и системы управления. – 2015. – №3(45). – С.89-100.

E-mail:

Еремин Евгений Леонидович – ereminel@mail.ru.