



УДК 519.711.3

© 2016 г. О.С. Амосов, д-р техн. наук,

С.Г. Баена, канд. техн. наук

(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

## ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА, МОДЕЛИРУЕМОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФРАКТАЛЬНОГО ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ\*

Предлагается моделирование стохастической траектории подвижного объекта на основе фрактального винеровского процесса с учетом показателя Херста. Для численной реализации такого процесса используется вейвлет-разложение. Исследованы особенности оценивания параметров траектории с помощью фильтра Калмана и синтетических алгоритмов. Приведены иллюстрирующие примеры.

**Ключевые слова:** траекторное слежение, фильтр Калмана, синтетический алгоритм оценивания, фрактальный винеровский процесс, вейвлет, показатель Херста.

DOI: 10.22250/isu.2016.50.76-86

### Введение

При решении задачи фильтрации параметров траектории подвижного объекта используются различные модели движения [1 – 3]. Среди них можно выделить математические модели, построенные на основе классического винеровского процесса.

В настоящее время для моделирования стохастических процессов, обладающих фрактальными свойствами, используется обобщение в виде фрактального винеровского процесса (ФВП) [4].

В связи с этим в данной работе предлагается исследовать особенности фильтрации параметров траектории движения подвижного объекта, моделируемой с использованием ФВП.

В статье рассматривается задача траекторного слежения объекта по измерениям дальности и пеленга двухкоординатной РЛС. Для фильтрации при решении задачи траекторного слежения используются как традиционные алгоритмы – калмановского типа, метод сеток, метод Монте-Карло, метод гауссовских сумм [2, 5], так и синтетические алгоритмы – нейронные сети, вейвлеты, нечеткие системы

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-08-08593 а.

[6 – 11]. В данной работе для получения оценок используются фильтр Калмана (ФК) и синтетические алгоритмы.

### Модели движения объекта

Объект совершает движение в горизонтальной плоскости с координатами  $x$  и  $y$  декартовой системы координат. Ограничимся рассмотрением модели движения для одной координаты  $x$ , для другой координаты  $y$  модель аналогична.

Рассмотрим модели движения объекта, традиционно используемые для решения задач траекторного слежения [2, 3].

*Модель с винеровским процессом для ускорения*

$$\ddot{x} = w(t), \quad (1)$$

$$M[w(t)] = 0, \quad M[w(t)w(\tau)] = q(t)\delta(t - \tau), \quad (2)$$

здесь  $q(t)$  – интенсивность непрерывного белого шума  $w(t)$ .

Процессу (1) соответствует трехмерный вектор состояния  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T$ .

Уравнение динамики в непрерывном времени

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}w(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния в дискретном времени с периодом дискретизации  $T$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{i-1} + w_i, \quad (4)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица ковариации  $\mathbf{Q}$  для дискретного белого шума  $w_i$  в случае  $q(t) = q = \text{const}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} T^5/20 & T^4/8 & T^3/6 \\ T^4/8 & T^3/3 & T^2/2 \\ T^3/6 & T^2/2 & T \end{bmatrix} q.$$

*Модель с белым шумом для ускорения или винеровским процессом для скорости*

$$\ddot{x}(t) = w(t). \quad (5)$$

Процессу (5) соответствует двумерный вектор состояния  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$ .

Матрицы, определяющие динамику поведения объекта в непрерывном времени:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение состояния (4) в дискретном времени с периодом дискретизации  $T$  определяет переходная матрица

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица ковариации  $\mathbf{Q}$  для дискретного белого шума  $w_i$  в случае  $q(t) = q = const$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix} q.$$

*Модель с белым шумом для скорости или винеровским процессом для координаты*

$$\dot{x}(t) = w(t). \quad (6)$$

Процесс (6) является скалярным  $x = [x]$ . Уравнение динамики в непрерывном времени имеет вид

$$\dot{x}(t) = w(t).$$

Уравнение состояния в дискретном времени с периодом дискретизации  $T$

$$x_i = x_{i-1} + w_i. \quad (7)$$

Ковариация  $Q$  для дискретного шума  $w_i$  в случае  $q(t) = q = const$

$$Q = \sigma^2 = qT. \quad (8)$$

Процесс  $w_i$  может быть представлен в модели с использованием белого шума  $n_i$  с единичной интенсивностью посредством соотношения

$$w_i = \sqrt{qT} n_i.$$

Заметим, что описываемый при помощи стохастического дифференциального уравнения (6) процесс  $x(t)$  является винеровским, определенным через белый шум  $w(t)$ . Последовательность  $x_i$  (7) является последовательностью с некоррелированными приращениями и называется винеровской последовательностью.

Существенно, что все представленные модели движения (1), (5) и (6) определены через винеровский процесс, а их дискретные представления (4) и (7) – через винеровскую последовательность.

В следующем разделе нами предлагаются *новые* модели движения объекта, основанные на использовании *фрактального винеровского процесса* (фрактального броуновского движения – ФБД).

### **Модели движения объекта на основе фрактального винеровского процесса**

Фрактальный винеровский процесс. Случайный процесс  $x(t)$  называется ФВП с параметром Херста  $H$ ,  $0 < H < 1$ , если приращения случайного процесса  $\Delta x = x(t) - x(t_0)$  имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 \cdot (t - t_0)^{2H}$ , где  $\sigma$  – положительная константа, т.е. его вероятностная мера [4, 12]

$$P(\Delta x < X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot (t - t_0)^H} \cdot \int_{-\infty}^X \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{u}{\sigma \cdot (t - t_0)^H} \right)^2 \right] du. \quad (9)$$

Показатели хаотичности (показатель Херста  $H$  и фрактальная размерность  $D$ ) отражают природу анализируемого процесса. Показатель  $H$  связан с фрактальной размерностью выражением  $D = 2 - H$ , [4, 12, 13].

1. Для  $0 < H < 0,5$ ;  $1,5 < D < 2$  процесс принято называть розовым шумом и связывать с эргодическими или *антиперсистентными* свойствами, когда восходящая тенденция сменяется нисходящей или наоборот.

2. Так, если  $H \approx 0,5$ ;  $D \approx 1,5$ , то процесс принято называть белым шумом, что означает классическое броуновское движение – наблюдения случайны и *некоррелированы*, следовательно настоящие значения временного ряда не влияют на будущее. Для его моделирования могут с успехом использоваться марковские модели процессов, а для анализа и идентификации достаточно традиционных статистических методов.

3. Если  $0,5 < H < 1$ ;  $1 < D < 1,5$ , то это означает наличие фрактальных свойств в процессе и указывает на *персистентные* или трендоустойчивые свойства временного ряда. Так, например, если наблюдается восходящая тенденция, то в будущем будет наблюдаться динамика роста. С ростом  $H$  от 0,5 до 1 устойчивость становится все заметнее.

ФВП с параметром  $H = 0,5$  совпадает с классическим броуновским движением. Приращения  $\Delta x = x(t) - x(t_0)$  ФБД называются фрактальным гауссовским шумом, дисперсия которого подчиняется соотношению  $D[x(t) - x(t_0)] = \sigma^2 \cdot (t - t_0)^{2H}$ .

Выбрав вероятностную меру (9) для приращений случайного процесса (6), (7)  $\Delta x = x(t) - x(t_0) = x_i - x_{i-1}$ , получим *модель с фрактальным винеровским процессом для координаты*.

Поступив аналогично для процессов (1), (4) и (5), (4), получим *модель с фрактальным винеровским процессом для ускорения и модель с фрактальным винеровским процессом для скорости* соответственно.

### Модель измерений

Для определения местоположения объекта используется угломерно-дальномерный метод.

*Измерения дальности и пеленга*

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \xi_{1i} \\ \xi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(x_i, y_i) \\ s_2(x_i, y_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \rho_i \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ \arctg(y_i / x_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \rho_i \\ \Delta \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для получения линейной модели измерений первичные измерения полярных координат объекта дальности  $\rho_i$  и пеленга  $\alpha_i$  могут быть преобразованы в прямоугольную систему координат и представлены в форме [1]:

$$x_i^* = \underbrace{\rho_i \cos \alpha_i}_{x_i} + \Delta x_i; \quad y_i^* = \underbrace{\rho_i \sin \alpha_i}_{y_i} + \Delta y_i, \quad (11)$$

где  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  – случайные ошибки измерений координат с характеристиками

$$M(\Delta x_i) = M(\Delta y_i) = 0;$$

$$\sigma_{\Delta x_i}^2 = M(\Delta x_i^2) = \sigma_{\Delta \rho_i}^2 \cos^2 \alpha_i + \sigma_{\Delta \alpha_i}^2 \rho_i^2 \sin^2 \alpha_i,$$

$$\sigma_{\Delta y_i}^2 = M(\Delta y_i^2) = \sigma_{\Delta \rho_i}^2 \sin^2 \alpha_i + \sigma_{\Delta \alpha_i}^2 \rho_i^2 \cos^2 \alpha_i,$$

$$M(\Delta x_i \Delta y_i) = R_{\Delta x_i \Delta y_i} = (\sigma_{\Delta \rho_i}^2 - \sigma_{\Delta \alpha_i}^2 \rho_i^2) \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$

Линейные измерения будут использованы для фильтра Калмана.

### Постановка задачи траекторного слежения

Сначала приведем формулировку задачи траекторного слежения в общем виде: оценить вектор состояния подвижного объекта  $\mathbf{x}_i = [x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i]^T$  по набору измерений  $\Lambda_i = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_i^T]^T$ ,  $\xi_i = [\xi_{1i}, \xi_{2i}]^T = [s_1(x_i, y_i), s_2(x_i, y_i)]^T + [\Delta \rho_i, \Delta \alpha_i]^T$ .

Дадим частную формулировку задачи траекторного слежения, сознательно выбрав для исследования простейшую модель с фрактальным винеровским процессом для координаты, чтобы наглядно выявить особенности фильтрации параметров траектории, моделируемой с использованием ФБД:

оценить вектор состояния подвижного объекта  $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]^T$  по набору измерений  $\Lambda_i = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_i^T]^T$ ,  $\xi_i = [\xi_{1i}, \xi_{2i}]^T = [s_1(x_i, y_i), s_2(x_i, y_i)]^T + [\Delta \rho_i, \Delta \alpha_i]^T$ .

### Решение задачи фильтрации

В работах [1 – 3] показано, что для решения задач траекторного слежения за объектом при использовании угломерно-дальномерного метода измерений полярных координат дальности и азимута после их пересчета в декартову систему координат эффективно для фильтрации применение ФК.

Для решения задач субоптимального нелинейного оценивания в рамках байесовского подхода оправдано применение синтетических систем, построенных на базе нейронных сетей, нечеткой логики и вейвлетов с использованием для существенного повышения их быстродействия декомпозиции [6, 7].

На этих алгоритмах и остановим выбор с целью решения задачи фильтрации параметров траектории, моделируемой с использованием ФВП.

Они подробно изложены в статьях [6, 7]. Поэтому решение задачи фильтрации на основе ФК и декомпозиционных синтетических систем рассмотрим в сжатом виде.

### Решение задачи фильтрации с помощью фильтра Калмана

Рассмотрим решение для линейной задачи оценивания вектора состояния, как это представлено в работе [5].

Для этого необходимо оценить  $n$ -мерную гауссовскую случайную последовательность  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_{1i}, \dots, \mathbf{x}_{ni})^T$  в дискретный момент времени  $i = 1, 2, \dots$ , представ-

ленную в виде

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{w}_i, \quad (12)$$

используя  $m$  - мерные измерения  $\mathbf{y}_i = (\mathbf{y}_{1i}, \dots, \mathbf{y}_{mi})^T$ , вычисляемые как

$$\xi_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i, \quad (13)$$

где  $\mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  –  $n$  - и  $m$  - мерные центрированные гауссовские белозумные последовательности с матрицами ковариаций  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{R}_i$ ;  $\Phi_i$ ,  $\mathbf{H}_i$  – известные матрицы соответствующей размерности. В начальный момент времени значения  $\mathbf{x}_0$  представляют гауссовский центрированный случайный  $n$  - мерный вектор с матрицей ковариаций  $\mathbf{P}_0$ , причем  $\mathbf{w}_i$  порождающие и  $\mathbf{v}_i$  измерительные шумы, а также  $\mathbf{x}_0$  между собой статистически независимы.

В данной постановке известной считается совместная ф.п.р.в.  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i)$  векторов  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{w}_i = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_i^T]^T$  и  $\mathbf{v}_i = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_i^T]^T$ .

Оценка оптимальная в среднеквадратическом смысле (оценка с минимальной дисперсией ошибки) рассчитывается с помощью критерия

$$J_i = M[(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\xi_i))^T (\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\xi_i))] = M\|(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i(\xi_i))\|^2, \quad (14)$$

где  $M$  – знак математического ожидания;  $\tilde{\mathbf{x}}_i(\mathbf{y}_i)$  – оценка, полученная с помощью всего набора измерений  $\xi_i = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_i^T]^T$  в текущий момент времени.

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка, минимизирующая критерий (14), и соответствующая ей апостериорная матрица ковариаций ошибок оценивания могут быть найдены с помощью дискретного ФК. В дискретном ФК, как правило, выделяется два блока: блок прогноза и блок обновления.

В блоке прогноза с использованием оптимальной оценки вектора состояния для предыдущего момента времени  $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$  и матрицы динамики  $\Phi_i$  находится прогноз вектора  $\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}$  и матрица ковариаций  $\mathbf{P}_{i/i-1}$  его ошибок  $\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi_i \tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$ ,  $\mathbf{P}_{i/i-1} = \Phi_i \mathbf{P}_{i-1} \Phi_i^T + \mathbf{Q}_i$ .

В блоке обновления с использованием значений прогноза  $\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}$  и текущего измерения  $\mathbf{y}_i$  вычисляется оптимальная оценка вектора состояния для текущего момента времени  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  и матрица ковариаций  $\mathbf{P}_i$  ее ошибок

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i (\xi_i - \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1}),$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} - \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i/i-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_{i/i-1},$$

где  $\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_{i/i-1} \mathbf{H}_i^T + \mathbf{R}_i)^{-1}$  – матрица коэффициентов усиления.

На первом шаге предполагается, что  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = M[\mathbf{x}_0] = 0$ .

Из приведенной постановки следует, что заданными являются уравнения (12), (13), описывающие динамику изменения оцениваемой последовательности  $\mathbf{x}_i$  и связь измеряемой последовательности  $\xi_i$  с  $\mathbf{x}_i$  и ошибками измерений  $\mathbf{v}_i$ . Кроме того, известной предполагается совместная функция плотности распределения вероятностей  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i)$ .

## Решение задачи оценивания траектории подвижного объекта с использованием синтетических алгоритмов

Для решения задачи оценивания траектории подвижного объекта в рамках байесовского подхода нами ранее был предложен вычислительный метод оценивания с его реализацией на основе синтетических алгоритмов оценивания состояния динамических систем с использованием декомпозиции [6, 7].

1. Вводится класс параметрически заданных функций  $\tilde{\mathbf{x}}(\xi, \tilde{\mathbf{W}})$ .

2. Используется имеющееся в наличии обучающее множество  $\{(\xi^{(j)}, \mathbf{x}^{(j)})\}_{j=1}^N$ .

3. Определяется среднеквадратический критерий оптимизации

$$\tilde{J}^*(\tilde{\mathbf{W}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \mathbf{x}^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\xi^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}) \right)^T \left( \mathbf{x}^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\xi^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}}) \right), \quad (14)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\xi^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}})$  – формируемая оценка.

4. Критерий (14) оптимизируется на основе минимизации эмпирического риска

$$P \left\{ \sup_{\tilde{\mathbf{W}}} |J(\tilde{\mathbf{W}}) - \tilde{J}^*(\tilde{\mathbf{W}})| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность;  $J(\tilde{\mathbf{W}}) = M \left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(\xi, \tilde{\mathbf{W}}) \right\|^2$ .

5. Минимизация реализуется с помощью нейронных сетей, нечетких систем и вейвлетов

$$\tilde{\mathbf{x}}^\mu(\xi) = \mathbf{K}^\mu(\xi, \tilde{\mathbf{W}}), \quad \mu = NN, FS, W, \quad (15)$$

где  $\mathbf{W}$  – матрица, отвечающая за параметры синтетических алгоритмов;  $\xi$  – вход синтетических алгоритмов;  $NN$  – нейронные сети;  $FS$  – нечеткие системы;  $W$  – вейвлеты.

Проблема получения алгоритма оценивания на основе синтетического алгоритма сводится вне зависимости от топологии системы к процедуре нахождения параметров этой системы, отыскиваемых в результате минимизации критерия (14), формируемого с использованием данных обучающей выборки.

### Численная реализация ФВП

Для моделирования ФВП нет простого метода, например, как для классического броуновского движения, – путем суммирования гауссовских случайных величин.

Одним из подходов является построение ФВП с помощью биортогональных вейвлетов [14, 15]. В этом случае построение реализации ФВП осуществляется с помощью дискретного вейвлет-преобразования, где детализирующие вейвлет-коэффициенты на каждом уровне являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, а аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты получены с помощью фрактального процесса авторегрессии и скользящего среднего FARIMA [12, 14, 15]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{-H-1/2}(t-k) S_k^{(H)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH} \psi_{-H-1/2}(2^j t - k) \varepsilon_{j,k} - b_0,$$

где  $\psi_{-H-1/2}$  – биортогональная вейвлет-функция;  $\Phi_{-H-1/2}$  – соответствующая  $\psi_{-H-1/2}$  скейлинг-функция;  $S_k^{(H)} = \sum_{j=1}^k \zeta_j$ , если  $k \geq 1$ ,  $S_0^{(H)} = 0$  и  $S_k^{(H)} = -\sum_{j=0}^{-k} \zeta_j$ , если  $k \leq -1$  при  $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$  – гауссовский процесс FARIMA  $[0, H-1/2, 0]$  с независимой спектральной плотностью  $g(\lambda) = (2\pi)^{-1} |1 - e^{-i\lambda}|^{1-2H}$ ;  $\varepsilon_{j,k}$  – независимые гауссовские случайные величины с распределением  $N(0, 1)$ ;  $b_0$  – случайная константа.

Первоначально предложенный алгоритм [14], в котором искомая реализация содержала много высокочастотных компонент, был усовершенствован [15].

### Пример моделирования

*Траекторное слежение за объектом.*

Рассмотрим пример движения объекта в сферической системе координат. Предполагается отсутствие его перемещений в вертикальной плоскости. Необходимо оценить в декартовой системе координат вектор состояния  $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]^T$  движущегося в горизонтальной плоскости объекта (высота не меняется) по результатам измерения полярных координат дальностей  $\rho_i$  и пеленгов  $\alpha_i$  двухкоординатной радиолокационной станцией, используя (10), (11) [7].

Полиномиальная модель движения в горизонтальной плоскости в декартовой системе координат для координат  $x_1$  и  $x_2$  может быть записана в виде

$$x_i = x_{i-1} + w_i^{Vx}, \quad y_i = y_{i-1} + w_i^{Vy}, \quad (16)$$

где  $i = 0, 1, \dots$  – моменты времени;  $w_i^{Vx}, w_i^{Vy}$  – белый шум.

Процессы (16) будут моделироваться как фрактальные винеровские процессы. Для этого воспользуемся встроенной функцией MatLab «wfbm», реализованной в соответствии с изложенным выше методом, которая позволяет строить фрактальные последовательности с различными значениями показателя Херста  $H$ .

Параметры моделирования: погрешность измерения дальности  $\sigma_{\Delta \rho_i} = 20$  м; погрешность измерения пеленга  $\sigma_{\Delta \alpha_i} = 5$ ; параметры порождающего шума  $\sigma_w^{Vx_i} = \sigma_w^{Vy_i} = 10$  м / с; период обзора  $T = 2$  с; начальное состояние  $m_{x_0} = m_{y_0} = 100$  км;  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 150$  м.

Введем вектор оценок  $\tilde{\mathbf{x}}_i = [\tilde{x}_i, \tilde{y}_i]^T$  вектора состояния объекта  $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i]^T$ , соответствующего набору измерений радиолокационной станции  $\xi_i = [\rho_i, \alpha_i]^T$ .

Для моделирования с использованием синтетических алгоритмов  $\tilde{\mathbf{x}}_i^\mu = \mathbf{K}_i^\mu(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)})$  генерировался обучающий массив данных  $\{(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)}), x_i^{(j)}\}_{j=1}^N$  и тестовый массив данных  $\{(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)}), x_i^{(j)}\}_{j=1}^{N^*}$ .



Для сравнения точности полученных оценок использовалось среднеквадратичное отклонение (СКО) ошибок оценивания: расчетное СКО ошибок оценивания  $\sigma_i^{FK}$ , соответствующее дисперсии ошибки оптимального оценивания, которая является единственным элементом расчетной матрицы ковариаций ошибок ФК; выборочные действительные СКО ошибок оценивания для ФК (FK)  $\tilde{\sigma}_i^{FK}$  и для синтетического алгоритма  $\tilde{\sigma}_i^\mu$ , вычисляемые как:

$$\tilde{\sigma}_i^\eta \approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (e_i^{\eta(j)})^2}, \quad e_i^{\eta(j)} = \tilde{x}_i^{\eta(j)}(\xi_i^{(j)}, \mathbf{W}_i) - x_i^{(j)}, \quad \eta = FK, NN, FS, W;$$

$$L = \{N, N^*\}, \quad N = 30000, \quad N^* = 3000.$$

Для получения искомой оценки вместо системы с двумя выходами (рис. 1а) используем две параллельно соединенные системы с одним выходом (рис. 1б).

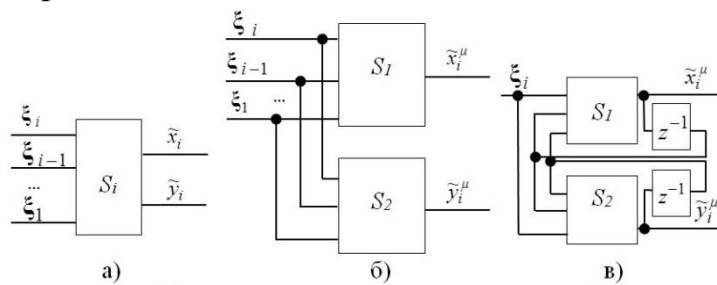


Рис. 1. Структура синтетического алгоритма фильтрации:  
 а) исходная система; б) система, декомпозированная по координатам;  
 в) система, декомпозированная по измерениям.

Декомпозированная система представляет собой систему MISO (many inputs single output) с  $i$  входами и одним линейным выходом. Для моделирования генерировался обучающий массив данных, где  $N = 30000$ , количество измерений  $i = \overline{1, 200}$ .

Проведено моделирование траектории подвижного объекта с различным показателем Херста  $H$ . На рис. 2а, 2б и 2в отражены: стохастическая составляющая движения объекта по координате  $x_i$ ; случайная ошибка измерений  $x_i^*$  и оценка координаты  $x_i$  подвижного объекта с помощью ФК  $\tilde{x}_i^{FK}$  и синтетических алгоритмов  $\tilde{x}_i^\mu$ . На рис. 2б, 2г и 2е представлены:  $\sigma_i^{FK}$  – расчетное СКО ошибок оценивания;  $\tilde{\sigma}_i^{FK}$  – выборочное СКО ошибок фильтрации при использовании ФК;  $\tilde{\sigma}_i^\mu$  – выборочное СКО ошибок фильтрации при использовании синтетических алгоритмов и  $\tilde{\sigma}_i^*$  – выборочное СКО ошибки измерений.

Исследование показало, что при траектории движения подвижного объекта с уровнем хаотичности  $H = 0,1$  с помощью синтетических алгоритмов может быть достигнута в отличие от ФК более высокая точность оценивания (рис. 2а и 2б).

При уровне хаотичности  $H = 0,5$  ФК и синтетические алгоритмы оценивают траекторию движения с одинаковой точностью (рис. 2в, 2г). Для уровня хаотичности  $H = 0,9$  при оценивании траектории объекта происходит сбой работы ФК, в отличие от синтетических алгоритмов, которые проявляют стабильность (рис. 2д,

2е). Для  $H = 0,1$  и  $H = 0,9$  наблюдается несовпадение расчетной и выборочной характеристик для ФК.

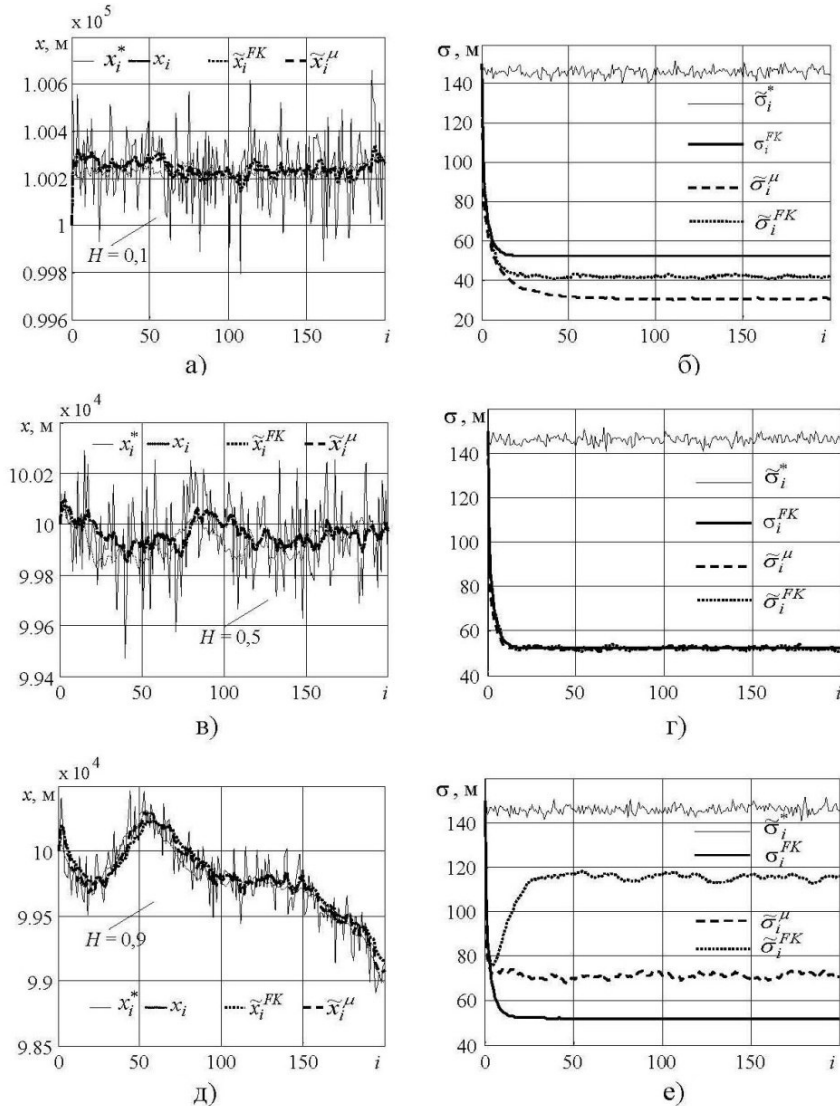


Рис. 2. Оценивание траектории подвижного объекта с различным показателем Херста  $H$ : а, в, д – состояние, измерение и оценка  $x$ ; б, г, е – СКО ошибок оценивания процесса.

Применение декомпозиционных синтетических алгоритмов позволило достичь высокой точности оценивания при скорости обучения и адаптации их значительно меньшей, чем для исходных систем без декомпозиции.

## Заключение

Предложены новые математические модели траектории с использованием фрактального винеровского процесса, реализуемого с помощью вейвлет-разложения. Для решения задачи траекторного слежения использован фильтр Калмана и синтетические алгоритмы с декомпозицией.

По результатам компьютерного моделирования фрактальной траектории проведено сопоставление по точности оценивания традиционного и синтетического алгоритмов. Выявлено отличие характеристик точности оценивания для рассматриваемых алгоритмов фильтрации.

В качестве перспективного исследования рассматривается сопоставление

различных субоптимальных алгоритмов оценивания параметров фрактальной траектории при слежении за объектами, осуществляющими маневрирование.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмин С.З.* Цифровая радиолокация. Введение в теорию. – Киев: Издательство КВиЦ, 2000.
2. *Bar-Shalom Yaakov.* Estimation with applications to tracking and navigation / by Yaakov Bar-Shalom, X.-Rong Li, Thiagalingam Kirubarajan. – New York: John Wiley & Sons, 2001.
3. *Амосов О.С.* Фильтрация марковских последовательностей на основе байесовского, нейросетевого подходов и систем нечеткой логики при обработке навигационной информации // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 61–69.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
5. *Степанов О.А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. – Ч.1. Введение в теорию оценивания. – Изд. 2-е, исправ. и доп. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010.
6. *Амосов О.С., Баена, С.Г.* Быстродействующие численные нейросетевые и нечеткие методы стохастического оценивания состояния динамических систем // Информатика и системы управления. – 2014. – № 4 (42). – С. 118–129.
7. *Амосов О.С., Малашевская Е.А., Баена С.Г.* Быстродействующие нейронечеткие алгоритмы фильтрации параметров траектории подвижного объекта // XXIII Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. – С. 331–334.
8. *Stepanov O.A., Amosov O.S.* Optimal Estimation Algorithms Based on the Monte Carlo Method and Neural Networks for Nonlinear Navigational Problems // Proceedings of the IEEE CAC/CACD/ICC. – Munich, Germany, October 4–6, 2006. – P. 1432–1437.
9. *Amosov O.S., Amosova L.N.* Optimal estimation by using fuzzy systems // Proc. of the 17-th World Congress IFAC. – Seoul, Korea, 2008. – P. 6094-6099.
10. *Amosov O.S., Amosova L.N.* Random Sequences Optimal Estimation by Using Regression and Wavelets // 7th IEEE International Conference on Control and Automation. – Christchurch, New Zealand, December 9–11, 2009. – P. 2293–2298.
11. *Stepanov O.A., Amosov O.S., Toropov A.B.* Comparison of Kalman-type algorithms in nonlinear navigation problems for autonomous vehicles // 6th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, IAV2007. – Toulouse, France, 2007. – Vol. 6, Issue PART 1. – P. 493-498.
12. *Кириченко Л.О., Дейнеко Ж.В.* Оценивание самоподобия стохастического временного ряда методом вейвлет-анализа // Радиоэлектронные и компьютерные системы. Компьютерные системы и информационные технологии. – 2009. – № 4(38). – С. 99–105.
13. *Пащенко Ф.Ф., Амосов О.С., Муллер Н.В.* Структурно-параметрическая идентификация временного ряда с применением фрактального и вейвлет-анализа // Информатика и системы управления. – 2015. – № 2 (44). – С. 80–88.
14. *Patrice Abry, Fabrice Sellan.* The Wavelet-Based Synthesis for Fractional Brownian Motion Proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and Fast Implementation // Applied and computational harmonic analysis. – 1996. – № 3. – P. 377–383.
15. *Bardet J.M.* Generators of long-range dependent processes: a survey, Theory and applications of long-range dependence // Theory and applications of long-range dependence. Birkhäuser. – 2003. – № 1. – P. 579-623.

*E-mail:*

*Амосов Олег Семенович – osa18@yandex.ru;*

*Баена Светлана Геннадьевна – svetlana.baena@yandex.ru.*