



УДК 517.9

© 2017 г. С.В. Поршневу, д-р техн. наук,
Д.А. Божалкин

(Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина, Екатеринбург)

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Приведены результаты численных исследований фрактальных характеристик случайных последовательностей (СП), сгенерированных в соответствии с известными алгоритмами генераторов фрактального броуновского движения (ФБД), в которых вместо генератора случайных чисел (СЧ) с нормальным законом распределения (НЗР) использован ГСЧ с ограниченной областью рассеяния (ООР).

Ключевые слова: броуновская частица, фрактальное броуновское движение, показатель Херста, случайные числа, ограниченная область рассеяния, процесс случайного блуждания.

DOI: 10.22250/isu.2017.51.23-32

Введение

Модель ФБД широко используется для описания временных рядов в различных областях науки, техники и экономики (см., например, [1, 2]). Напомним, следуя [3], что ФБД с параметром H , $0 < H < 1$ (показатель Херста) называется гауссовский процесс $X(t)$, если он обладает следующими свойствами:

$X(0) = 0$ и функция $X(t)$ почти всегда непрерывна;

свойство гауссовости приращений: случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$ имеет НЗР с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}$, где $t_2 > t_1$, σ – положительная константа такая, что

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^H} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) du,$$

из которого следует закон дисперсии для ФБД:

$$E\left[(X(t_2) - X(t_1))^2\right] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (1)$$

Из (1) следует известное выражение:

$$E\left[(X(t) - X(0))(X(t + \Delta t) - X(t))\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 \left[(t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H}\right], \quad (2)$$

используемое в алгоритмах генерации ФБД.

Из (1) видно, что ФБД с параметром $H = 1/2$ совпадает с классическим броуновским движением.

Известен ряд алгоритмов, используемых для генерации ФБД, из которых наиболее распространенными являются алгоритмы, представленные на рис. 1, 2.

```
Назначение:  
Вычисление ФБД в соответствии с методом половинного деления.  
Используется рекурсивная процедура DIVIDE1.  
Вход:  
 $H$  – показатель Херста;  
 $MaxLevel$  – максимальное число рекурсий;  
 $Scale$  – масштабирующий множитель.  
Выход:  
 $X$  – вектор длины  $2^{MaxLevel} + 1$ , содержащий значения ФБД.  
Инициализация:  
 $N = 2^{MaxLevel}$   
 $Level = 1$   
 $i_0 = 1$   
 $i_2 = N + 1$   
 $X(i) = 0, i = 0, 1, \dots, N + 1$   
Шаги:  
 $Ratio = 1/2^H$   
 $Std = Scale \cdot Ratio$   
 $X(1) = Scale \cdot randn(0,1)$   
 $X(N+1) = Scale \cdot randn(0,1)$   
 $(randn(0,1))$  – функция, возвращающая случайное число, сгенерированное  
в соответствии с нормальным законом распределения с нулевым средним и  
единичной дисперсией).  
 $X = DIVIDE1(X, Ratio, Std, i_0, i_1, Level, MaxLevel)$   
Процедура DIVIDE1  
Вход (параметры, передаваемые с верхнего уровня):  
 $X, Ratio, Std, i_0, i_1, Level, MaxLevel$ .  
Выход:  
 $X$  (с измененными значениями).  
Шаги:  
 $i_1 = (i_0 + i_2)/2$   
 $X(i_1) = 0.5 \cdot (X(i_0) + X(i_2)) + Std \cdot randn(0,1)$   
if  $Level < MaxLevel$   
     $StdMid = Std \cdot Ratio$   
     $X = DIVIDE1(X, Ratio, StdMid, i_0, i_1, Level + 1, MaxLevel)$   
     $X = DIVIDE1(X, Ratio, StdMid, i_1, i_2, Level + 1, MaxLevel)$   
end if
```

Рис. 1. Описание алгоритма срединного смещения на псевдокоде.

Вход:
 H – показатель Херста;
 $Level$ – параметр, определяющий длину вектора, содержащего значения ФБД.

Выход:
 X – вектор, содержащий значения ФБД.

Инициализация:
 $N = 2^{Level}$
 $i = \sqrt{-1}$

Шаги:
 $\hat{X}(0) = randn(0,1)$
 ($randn(0,1)$ – функция, возвращающая случайное число, сгенерированное в соответствии с нормальным законом распределения с нулевым средним и единичной дисперсией).

for $j = 1$ to $N/2 - 1$
 $\hat{X}(j) = randn(0,1) e^{2\pi i rand(0,1) / j^{(H+0.5)}}$
 ($rand(0,1)$ – функция, возвращающая случайное число, сгенерированное в соответствии с равномерным законом распределения на интервале $[0,1]$).

end for
 $\hat{X}(N/2) = randn(0,1) e^{2\pi i rand(0,1) / (N/2)^{(H+0.5)}}$

for $j = N/2 + 1$ to $N - 1$
 $\hat{X}(j) = randn(0,1) e^{2\pi i rand(0,1) / j^{(H+0.5)}}$
 ($rand(0,1)$ – функция, возвращающая случайное число, сгенерированное в соответствии с равномерным законом распределения на интервале $[0,1]$).

end for
 $X = ОДПФ(\hat{X})$
 (ОДПФ – обратное дискретное преобразование Фурье)

Рис. 2. Описание алгоритма генерации ФБД с помощью Фурье-фильтрации (АФФ) на псевдокоде.

Отметим, что свойства СП, сгенерированные в соответствии с алгоритмом срединного смещения (АСС) (рис. 1) для случая $H = 1/2$, оказываются близкими к свойствам классического броуновского движения. Для случаев $H \neq 1/2$, напротив, СП, сгенерированные в соответствии с данным алгоритмом, не обладают основными свойствами ФБД: дисперсия не удовлетворяет (1), а приращения оказываются нестационарными [4]. Однако АСС широко использовался при моделировании естественных ландшафтов, – например, горных массивов [5].

Анализ алгоритма генерации ФБД с помощью Фурье-фильтрации (АФФ), псевдокод которого представлен на рис. 2, показывает, что он основан на использовании известного свойства спектральной плотности мощности:

$$S_x(f) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T X(t) e^{-2\pi f t} dt \right|^2,$$

ФБД $X(t)$, заданного на интервале $[0; T]$:

$$S_x(f) \propto \frac{1}{f^{2H+1}}.$$

Известны также алгоритмы, основанные на использовании (2), в соответствии с которыми во временной области вычисляется детерминированная последовательность Z_k , $k = \overline{0, K-1}$, члены которой удовлетворяют (2). Далее вычисляется дискретное преобразование Фурье данной детерминированной последовательности $S_n = \sum_{k=0}^{N-1} Z_k e^{-2\pi i k n / N}$, $i = \sqrt{-1}$. Затем действительная часть каждой спектральной гармоники $\text{Re}(S_n)$ умножается на случайное число вида $\text{randn}(0,1) + i \cdot \text{randn}(0,1)$, здесь $\text{randn}(0,1)$ – функция, возвращающая случайное число, сгенерированное в соответствии с нормальным законом распределения, с нулевым средним и единичной дисперсией:

$$\tilde{S}_n = \text{Re}(S_n) \cdot (\text{randn}(0,1) + i \cdot \text{randn}(0,1)).$$

Применение к преобразованному спектру \tilde{S}_n обратного преобразования Фурье позволяет получить значения так называемого фрактального броуновского шума (ФБШ):

$$z_k = \text{Re} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{S}_n e^{2\pi i k n / N} \right),$$

накопленная сумма $\sum_{k=0}^{m-1} z_k$, $m = \overline{0, N-2}$ которого принимается в качестве реализации ФБД X_m (листинг функции на языке пакета MATLAB, возвращающей вектор, содержащий вычисленные в соответствии с данным алгоритмом значения ФБД, см. [6]).

Еще один вариант алгоритма генерации ФБД на основе детерминированной последовательности, члены которой удовлетворяют (2), предложен в [7]. Здесь каждый из членов детерминированной последовательности умножается на случайное число, извлекаемое из выборки со стандартным нормальным распределением, что позволяет, по мнению авторов данного алгоритма, получить ФБШ, накопленная сумма которого принимается в качестве ФБД.

Приведенные выше краткие описания алгоритмов генерации ФБД отнюдь не исчерпывают всего перечня известных алгоритмов ФБД. Однако позволяют выделить общий подход, состоящий в использовании случайных величин, генерируемых в соответствии с нормальным законом распределения. При этом возникает закономерный вопрос: возможно ли сгенерировать ФБД с заданным показателем Херста, если использовать случайные числа с законом распределения, отличным от нормального?

Отметим, что данный вопрос, представляет не только академический, но и практический интерес. Например, известны результаты систематических исследований дампов Интернет-трафика [8], передаваемого в высокоскоростном магистральном Интернет-канале [9, 10], которые опубликованы в [11]. Результаты дальнейших исследований показали, что распределения СП, содержащих значения

накопленных сумм зависимостей количества переданных пакетов и объемов переданной информации в течение выбранного временного интервала в магистральном Интернет-канале от времени, описываются соответствующими законами распределения случайной величины с ограниченной областью рассеяния, а их накопленные суммы имеют свойства, аналогичные свойствам ФБД [12]. Однако для подтверждения правомерности отнесения изученных СП к ФБД требуется проверка гипотезы о том, что случайные числа с ограниченной областью рассеяния могут порождать ФБД.

В статье изложены результаты исследования свойств СП, первые разности которых представляют собой случайные числа с ограниченной областью рассеяния.

Плотность распределения случайных распределений с ограниченной областью рассеяния

Свойства случайных чисел с ограниченной областью рассеяния изучались А. Эйнштейном и М. Смолуховским в работах по теории броуновского движения [13]. Они показали, что математическая модель плотности распределения (ПР) может быть построена как распределение конечного состояния некоторого случайного процесса без последствия с ограниченной областью рассеяния $[x_{\min}; x_{\max}]$. ПР данного случайного процесса в системе координат, начало которой находится в середине области рассеяний, относительно границ области рассеяния в точках с координатами $x_{\min, \max} = \pm l$ (рис. 3) вычисляется по формуле:

$$f_{LAD}(x; x_0, \sigma, l) = A \left[\varphi(x; x_0, \sigma, l) + \sum_{g=0}^{\infty} \varphi_{2g+1}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) + \sum_{g=1}^{\infty} \varphi_{2g}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) \right], \quad (3)$$

где A – нормировочный коэффициент, определяемый из условия:

$$\int_a^b f_{LAD}(\xi; x_0, \sigma, l) d\xi = 1, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x; x_0, \sigma, l) &= \exp\left[-(x - x_0)^2 / 2\sigma^2\right], \\ \varphi_{2g+1}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) &= \exp\left[-(x - x_{2g+1}^{\pm})^2 / 2\sigma^2\right], \\ \varphi_{2g}^{\pm}(x; x_0, \sigma, l) &= \exp\left[-(x - x_{2g}^{\pm})^2 / 2\sigma^2\right]. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{2g+1}^{\pm}, \varphi_{2g}^{\pm}$ (см. рис. 3) вычисляются по формулам:

$$\varphi_{2g}^{\pm} = \pm 4gl + x_0, \quad \varphi_{2g+1}^{\pm} = \pm(4g + 2)l - x_0, \quad (5)$$

где $g = 0, 1, \dots$

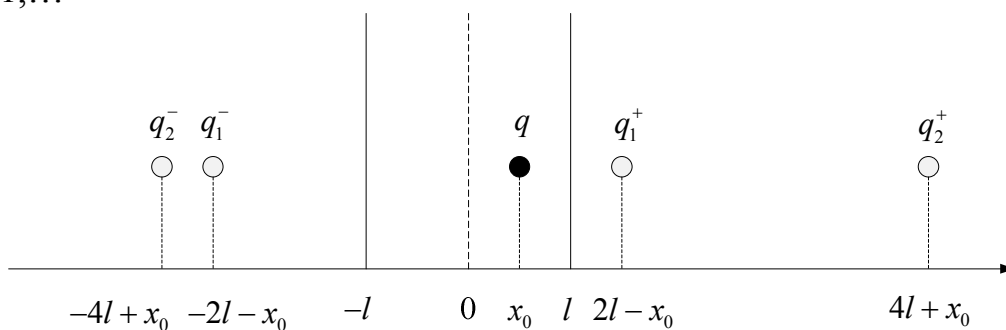


Рис. 3. Линейная комбинация функций распределений.

Анализ свойств функции $f_{LAD}(x; 0, \sigma, l)$, вычисляемой в соответствии с (3) показывает, что при $x_0 \equiv 0$ функция $f_{LAD}(x; 0, \sigma, l)$ оказывается симметричной относительно прямой $x = 0$, а центр области рассеяния совпадает с математическим ожиданием, медианой и модой; при $l \geq 2.5\sigma$ влияние фиктивных источников уменьшается и рассеяние приближается к нормальному закону; по мере уменьшения размера области рассеяния влияние фиктивных источников возрастает и при $l \leq 0.7\sigma$ распределение выглядит как равномерное. Если положение источника не совпадает с центром области рассеяния, то $f_{LAD}(x; x_0, \sigma, l)$ также порождает семейство распределений с аналогичными свойствами, однако несимметричными относительно прямой $x = 0$.

Анализ фрактальных свойств случайных последовательностей, генерируемых с использованием случайных чисел с ограниченной областью рассеяния

Для генерации случайных последовательностей был использован алгоритм генерации ФБД на основе Фурье-фильтрации (см. рис. 2), в котором вместо случайных чисел с нормальным законом распределения были использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с распределением (3).

Для оценки показателя Херста были использованы методы, описанные в [14, 15, 16, 17], которые реализованы в пакете MATLAB в виде функции `wfbmes.ti.m`, а также метод накопленной дисперсии, программная реализация которого приведена в [18]. (Далее оценки показателя Херста, полученные данными методами, будем обозначать H_1, H_2, H_3, H_4 , соответственно).

На первом этапе исследований была проведена оценка точности вычисления показателей Херста, получаемых с помощью каждого из выбранных методов. Здесь для генерации ФБД использовалась функция пакета MATLAB `wfbm.m`, представляющая собой программную реализацию алгоритма, основанного на использовании биортогональных вейвлетов [19, 20] (далее метод №1), а также разработанная авторами в пакете MATLAB функция, реализующая АФФ (далее метод №2).

Средние значения показателей Херста, вычисленные по ансамблю оценок показателей Херста для 100 независимых реализаций ФБД (длина реализации – 2^{15} значений), сгенерированных с помощью методов № 1, № 2, представлены соответственно в табл. 1 и 2.

Отметим, что использование двух различных алгоритмов генерации ФБД обусловлено тем, что фактически сравнивается не столько точность оценки показателя Херста реализаций ФБД, сколько точность оценки результата последовательного использования алгоритма генерации ФБД и алгоритма оценки показателя Херста.

Из табл. 1 и 2 видно:

1. В целом оценки показателя Херста реализаций ФБД H_1, H_2, H_4 для обоих методов генерации ФБД согласуются друг с другом.

2. Оценка значения показателя Херста реализаций ФБД H_3 оказывается неудовлетворительной для $H \in [0.1; 0.5]$ для обоих методов генерации ФБД.

3. Оценки значений показателя Херста реализаций ФБД, генерируемых в соответствии с методом № 1, для заданного значения показателя Херста $H \in [0.1; 0.3]$, составляют 70%, 20% и 6% при $H = 0.1, 0.2, 0.3$ соответственно.

4. Отличие оценок показателей H_1, H_2, H_4 Херста ФБД, генерируемого с помощью метода №2, от H оказывается существенно меньше: это позволяет сделать вывод, что качество реализаций ФБД, генерируемых для $H \in [0.1; 0.3]$ в соответствии с методом № 2, оказывается выше, чем при использовании метода №1.

5. Значения показателя Херста, оцениваемые с помощью метода накопленной дисперсии (H_4), при $H \in [0.8; 1]$ оказываются ниже заданного значения показателя Херста H . Обнаруженное отличие увеличивается по мере приближения значения заданного значения показателя Херста H к единице.

Таблица 1

H	H_1	H_2	H_3	H_4
0.1	0.171±0.007	0.171±0.006	-0,027±0,013	0,157±0,008
0.2	0,240±0,008	0,240±0,007	0,099±0,012	0,229±0,009
0.3	0.321±0.009	0.320±0.009	0.219±0.011	0.313±0,008
0.4	0.408±0.008	0.408±0.008	0.335±0.012	0.403±0.010
0.5	0.499±0.008	0.499±0.008	0.450±0.013	0.499±0.009
0.6	0.596±0.006	0.596±0.007	0.564±0.012	0.598±0.010
0.7	0.696±0.007	0.696±0.008	0.671±0.014	0.697±0.011
0.8	0.794±0.006	0.795±0.008	0.774±0.014	0.791±0.011
0.9	0.894±0.006	0.894±0.008	0.864±0.015	0.872±0.013
0.95	0.945±0.006	0.945±0.010	0.902±0.014	0.912±0.012
0.99	0.984±0.007	0.984±0.010	0.925±0.014	0.931±0.012

Таблица 2

H	H_1	H_2	H_3	H_4
0.1	0.101±0.009	0.100±0.007	-0.105±0.012	0.099±0.007
0.2	0.200±0.007	0.200±0.007	0.072±0.012	0.199±0.009
0.3	0.300±0.008	0.300±0.008	0.208±0.013	0.298±0.009
0.4	0.401±0.007	0.402±0.007	0.334±0.014	0.399±0.010
0.5	0.502±0.007	0.503±0.008	0.449±0.013	0.500±0.010
0.6	0.599±0.007	0.598±0.008	0.565±0.012	0.600±0.009
0.7	0.701±0.007	0.701±0.007	0.674±0.012	0.698±0.011
0.8	0.800±0.007	0.799±0.008	0.782±0.017	0.790±0.012
0.9	0.900±0.006	0.900±0.009	0.894±0.035	0.871±0.014
0.95	0.950±0.006	0.949±0.009	0.944±0.039	0.902±0.011
0.99	0.991±0.005	0.991±0.008	0.979±0.029	0.928±0.013

Средние значения показателей Херста, вычисленные по ансамблю оценок показателей Херста для 100 независимых реализаций ФБД, сгенерированных с помощью метода № 2, в котором использовались случайные числа с ограничен-

ной областью рассеяния, представлены в табл. 3 – 5. ПР использованных случайных чисел представлены на рис. 4.

Таблица 3

H	H_1	H_2	H_3	H_4
0.1	0.099±0.009	0.100±0.007	-0.102±0.012	0.107±0.008
0.2	0.199 ±0.008	0.199 ±0.007	0.073 ±0.011	0.203 ±0.008
0.3	0.300 ±0.008	0.300 ±0.007	0.210 ±0.011	0.301 ±0.009
0.4	0.399±0.007	0.399±0.007	0.334±0.012	0.399±0.010
0.5	0.500±0.008	0.500±0.009	0.451±0.013	0.498±0.009
0.6	0.599 ±0.007	0.599 ±0.009	0.566 ±0.014	0.600 ±0.010
0.7	0.700 ±0.008	0.700 ±0.009	0.673 ±0.014	0.696 ±0.010
0.8	0.800 ±0.006	0.800 ±0.008	0.786 ±0.018	0.790 ±0.012
0.9	0.900 ±0.006	0.900 ±0.008	0.893 ±0.031	0.870 ±0.015
0.95	0.951 ±0.007	0.951 ±0.008	0.942 ±0.038	0.903 ±0.014
0.99	0.990 ±0.006	0.989 ±0.009	0.985 ±0.024	0.924 ±0.014

Таблица 4

H	H_1	H_2	H_3	H_4
0.1	0.100 ±0.009	0.099 ±0.007	-0.101 ±0.012	0.187 ±0.006
0.2	0.201 ±0.008	0.200 ±0.007	0.073 ±0.012	0.251 ±0.007
0.3	0.301±0.007	0.300±0.007	0.210±0.012	0.324±0.009
0.4	0.401±0.008	0.401±0.008	0.333±0.012	0.405±0.010
0.5	0.500±0.008	0.499±0.008	0.452±0.014	0.498±0.009
0.6	0.600±0.007	0.600±0.008	0.564±0.012	0.601±0.008
0.7	0.702±0.007	0.701±0.008	0.679±0.014	0.699±0.011
0.8	0.803±0.007	0.800±0.009	0.793±0.025	0.787±0.012
0.9	0.905±0.006	0.900±0.008	0.910±0.039	0.854±0.012
0.95	0.957±0.005	0.950±0.008	0.954±0.037	0.884±0.012
0.99	0.999±0.006	0.991±0.009	0.982±0.026	0.903±0.010

Таблица 5

H	H_1	H_2	H_3	H_4
0.1	0.100±0.007	0.100±0.006	-0.104±0.012	0.099±0.007
0.2	0.200±0.007	0.200±0.007	0.071±0.011	0.200±0.008
0.3	0.301±0.008	0.300±0.007	0.210±0.014	0.299±0.009
0.4	0.399±0.007	0.399±0.007	0.334±0.012	0.399±0.008
0.5	0.500±0.007	0.500±0.007	0.451±0.013	0.500±0.009
0.6	0.600±0.007	0.599±0.007	0.563±0.013	0.598±0.009
0.7	0.699±0.007	0.699±0.008	0.674±0.013	0.697±0.012
0.8	0.801±0.006	0.801±0.008	0.782±0.016	0.791±0.013
0.9	0.900±0.007	0.900±0.009	0.893±0.031	0.873±0.014
0.95	0.950±0.006	0.949±0.008	0.949±0.035	0.906±0.014
0.99	0.990±0.006	0.990±0.0010	0.988±0.023	0.929±0.012

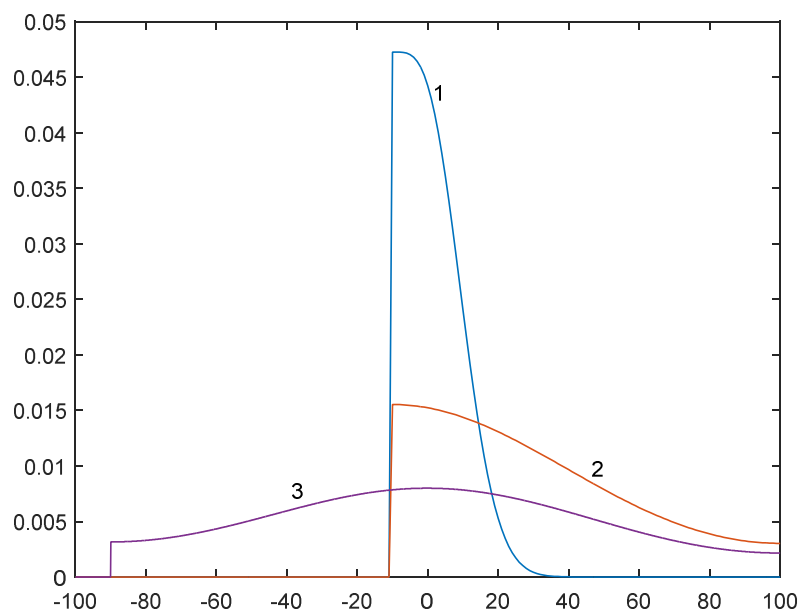


Рис. 4. Плотности случайных распределений, использовавшиеся для генерации случайных чисел реализующих ФБД в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации.

Из табл. 3 – 5 видно, что свойства показателя Херста изученных случайных последовательностей, сгенерированных в соответствии с АФФ, в котором использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с плотностями распределений, представленных на рис. 3, оказываются аналогичными ранее изученным реализациям ФБД (см. табл. 1, 2). Таким образом, СП, у которой ПР первых разностей описывается функцией, аналогичной закону распределения случайной величины с ограниченной областью рассеяния (1), может обладать свойством самоподобия.

Заключение

Проведенное исследование свойств реализаций, генерируемых в соответствии с алгоритмом Фурье-фильтрации, позволяет сделать вывод: невыполнение требования определения [21] о НЗР первых разностей ФБД не является достаточным условием для отклонения гипотезы о том, что изучаемая СП является реализацией ФБ.

Данный результат подтверждает гипотезу, сформулированную в [12], относительно того что накопленные суммы случайных последовательностей, содержащих значения зависимостей количества переданных пакетов, а также значений объемов переданной информации в течение выбранного временного интервала в магистральном Интернет-канале от времени, обладают свойствами, аналогичными свойствам ФБД.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000.

3. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркер, 2000.
4. *Benoit B. Mandelbrot.* Comment on computer rendering of fractal stochastic models // Communications of the ACM. – 1982. – Vol. 25, № 8. – P. 581-583.
5. *Foumer A., Fussel D., Carpenter L.* Computer rendering of stochastic models // Communications of the ACM. – 1982. – Vol. 25, № 6. – P. 371-384.
6. Mathworks – MATLAB and Simulink for Technical Computing [Электронный ресурс]. 1994-2014. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29686-multifractal-model-of-asset-returns--mmar-/content/ffGn.m> (дата обращения: 01.07.2016).
7. *Закревская Н.С., Ковалевский А.П.* Алгоритм идентификации фрактального броуновского движения по разности оценок // Сборник научных трудов НГТУ. – 2004. – № 2(36). – С. 29-36.
8. MAWI Working Group Traffic Archive [Электронный ресурс]. URL: <http://mawi.wide.ad.jp/mawi> (дата обращения: 01.07.2016).
9. *Поршнев С.В., Божалкин Д.А.* Технология семантического анализа дампа трафика информационных потоков в компьютерных сетях // Информационные технологии. – 2014. – №11. – С. 12-19.
10. *Поршнев С.В., Божалкин Д.А., Копосов А.С.* Опыт использования суперкомпьютера для обработки дампов сетевого трафика магистрального Интернет-канала // Информационные технологии. – 2016. – №1. – С. 42-47.
11. *Поршнев С.В., Божалкин Д.А., Копосов А.С.* Исследование особенностей потоков сетевого трафика в магистральном Интернет-канале // Электросвязь. – 2016. – №2. – С. 27-34.
12. *Поршнев С.В., Божалкин Д.А.* К вопросу о самоподобии трафика, передаваемого в магистральном Интернет-канале // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 2(32). – С. 301-310.
13. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Брауновское движение: сб. статей. – Ленинград: ОНТИ – Гл. ред. общетехнической литературы, 1936.
14. *Abry P., Flandrin P., Taqqu M.S., Veitch D.* Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens // Theory and applications of long-range dependence. – 2003. – P. 527-556.
15. *Bardet J.-M., Lang G., Oppenheim G., Philippe A., Stoev S., Taqqu M.S.* Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter: a survey // Theory and applications of long-range dependence. – 2003. – P. 557-577.
16. *Flandrin P.* Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion // IEEE Trans. on Inf. Th., 38. – 1992. – P. 910-917.
17. *Istas J., Lang G.* Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process // Ann. Inst. Poincaré, 33. – 1994. – P. 407-436.
18. *Поршнев С.В.* Диагностика газоперекачивающих агрегатов на основе анализа технологической информации: монография. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
19. *Abry P., Sellan F.* The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation // Appl. and Comp. Harmonic Anal. – 1996. – № 3(4). – P. 377-383.
20. *Bardet J.-M., Lang G., Oppenheim G., Philippe A., Stoev S., Taqqu M.S.* Generators of long-range dependence processes: a survey // Theory and applications of long-range dependence. – 2003. – P. 579-623.
21. *Benoit B. Mandelbrot, John W. Van Ness.* Fractional Noises and Applications // SIAM Review. – 1968. – Vol. 10, №. 4. – P. 422-437.

Статья представлена к публикации членом редколлегии *Е.А. Ереминым.*

E-mail:

Поршнев Сергей Владимирович – sergey_porshnev@mail.ru;

Божалкин Даниил Александрович – bozhalkin@mail.ru.