



УДК 681.5.015

© 2017 г. **О.С. Амосов**, д-р техн. наук,

**С.Г. Баена**, канд. техн. наук

(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет)

## ВЕЙВЛЕТ-АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ, ИМЕЮЩИХ НЕОДНОРОДНОСТИ И НАРУШЕНИЯ\*

Исследованы на основе вейвлетов алгоритмы оценивания нестационарных процессов с фрактальной структурой, имеющих локальные неоднородности и нарушения. Предложено решение нелинейной задачи оценивания с минимизацией среднеквадратического критерия на основе синтетических алгоритмов, в том числе и вейвлетов, как в рамках байесовского подхода с использованием обучающего множества в режиме off-line, так и в рамках метода наименьших квадратов при отсутствии обучающего множества и при наличии уравнения измерений в режиме реального времени on-line. Проведено исследование и сравнение вейвлет-алгоритмов и алгоритмов калмановского типа для оценивания нестационарных процессов с фрактальной структурой, имеющих неоднородности и нарушения.

**Ключевые слова:** оценивание, нестационарный процесс, неоднородность, разладка, фрактальность, вейвлет.

DOI: 10.22250/isu.2017.52.85-99

### Введение

Многие процессы в природе и технике являются нестационарными и изменяют во времени свои статистические свойства. Задача оптимального оценивания и фильтрации нестационарных случайных процессов является фундаментальной и до сих пор требует поиска эффективных алгоритмов [1 – 3]. В последнее время растет интерес к классу нестационарных процессов, имеющих фрактальную природу [4, 5], локальные особенности и неоднородности [6 – 8]. Такие процессы

---

\* Работа выполнялась при поддержке гранта РФФИ № 15-08-08593 а.

имеют место в навигации и управлении движением [7, 8], в информационных и компьютерных системах [9].

Поэтому в статье предлагаются модели динамики нестационарных систем с процессами указанного класса; эффективные с точки зрения точности и быстродействия, в том числе и на основе вейвлетов, алгоритмы оценивания нестационарных процессов с фрактальной структурой и процессов, имеющих неоднородности и нарушения – процессов с *разладкой*. Под разладкой будем понимать любое изменение вероятностных характеристик случайных процессов [5]. Задача о разладке состоит в обнаружении изменений свойств случайных процессов.

### Постановка задачи оценивания нестационарной системы

Необходимо оценить  $n$ -мерную случайную последовательность  $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$ , задаваемую с помощью разностных уравнений вида

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_{i-1}, \mathbf{n}_i) \quad (1)$$

по проводимым в каждый  $i$ -й момент времени  $m$ -мерным измерениям  $\mathbf{y}_i$ , определяемым как

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{v}_i), \quad (2)$$

при недостатке априорных сведений о сопровождающих параметрах  $\boldsymbol{\theta}_i$  и (или) о характеристиках шума канала измерения  $\mathbf{v}_i$  и (или) формирующего шума  $\mathbf{n}_i$  [3].

Априорная неопределенность моделей состояния и измерения передается вектором сопровождающих, неизвестных параметров  $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{1i}, \dots, \theta_{li})^T$  [1, 3].

В уравнениях (1) и (2)  $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{1i}, \dots, \theta_{li})^T$  –  $l$ -мерный вектор сопровождающих, неизвестных параметров;  $\Phi_i(\bullet), \mathbf{s}_i(\bullet)$  –  $n$ - и  $m$ -мерные в общем случае нелинейные относительно своих аргументов вектор-функции;  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  –  $d$ - и  $r$ -мерные независимые между собой и от  $\mathbf{x}_0$  случайные последовательности.

Для аддитивных шумов  $\mathbf{n}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  уравнения (1) и (2) могут иметь вид [3]:

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_{i-1}) + \Gamma_i(\mathbf{x}_{i-1})\mathbf{n}_i; \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{v}_i. \quad (4)$$

При решении задач линейной фильтрации уравнения (1) и (2) могут иметь вид [3]:

$$\mathbf{x}_i = \Phi_i \mathbf{x}_{i-1} + \Psi_i \boldsymbol{\theta}_{i-1} + \Gamma_i \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{w}_i = \Gamma_i \mathbf{n}_i, \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{O}_i \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{v}_i, \quad (6)$$

в которых  $\Phi_i, \Gamma_i, \Psi_i, \mathbf{H}_i$  и  $\mathbf{O}_i$  – известные матрицы размера  $n \times n, n \times d, n \times l, m \times r$  и  $m \times l$  соответственно.

Типовыми моделями подлежащего идентификации вектора неопределен-

ных параметров являются [3]:

$$\theta_i = \theta_{i-1}; \quad (7)$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} + n_{\theta i}; \quad (8)$$

$$\theta_i = g_i(\theta_{i-1}) + n_{\theta i}, \quad (9)$$

где  $n_{\theta i}$  – векторная случайная последовательность размерности  $l$ .

В качестве модели для неопределенных параметров  $\theta_i$  рассматривают и полумарковский процесс [2, 3].

В рамках традиционного байесовского подхода искомая оценка  $\tilde{x}(y)$  минимизирует критерий [1]:

$$J = M[(x - \tilde{x}(y))^T (x - \tilde{x}(y))] = M\|x - \tilde{x}(y)\|^2 = \iint \|x - \tilde{x}(y)\|^2 f(x, y) dx dy, \quad (10)$$

где  $M$  – знак математического ожидания, соответствующий заданной совместной функции плотности распределения вероятностей (ФПРВ)  $f(x, y)$ .

Если предположить, что статистика шумов  $v$  неизвестна, то в случае классического метода наименьших квадратов (МНК) оценка  $\tilde{x}(y)$  отыскивается при оптимизации следующего критерия [1, 3]

$$I(x) = (y - s(x))^T (y - s(x)) = \sum_{i=1}^m (y_i - s_i(x))^2. \quad (11)$$

В обоих подходах оценка представляет собой задачу определения функции  $h(y)$  некоторым рациональным обоснованным способом:  $\tilde{x}(y) = h(y)$ .

С помощью моделей (1)–(6) можно описать многие классы случайных процессов, в том числе гауссовские, нестационарные процессы с фрактальной структурой и процессы с разладкой.

### Решение задачи фильтрации гауссовской случайной последовательности с помощью фильтров Калмана

Если в уравнениях (5), (6) предположить, что  $\theta_i = 0$ ,  $w_i$  и  $v_i$  –  $n$ - и  $m$ -мерные центрированные гауссовские белозумные последовательности, то приходим к решению линейной задачи оценивания вектора состояния, как это представлено в работе [10].

В таком случае необходимо оценить  $n$ -мерную гауссовскую случайную последовательность  $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{ni})^T$  в дискретный момент времени  $i = 1, 2, \dots$ , представленную в виде

$$x_i = \Phi_i x_{i-1} + w_i, \quad (12)$$

используя  $m$ -мерные измерения  $y_i = (y_{1i}, \dots, y_{mi})^T$ , вычисляемые как

$$y_i = H_i x_i + v_i, \quad (13)$$

где  $\mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  –  $n$ - и  $m$ -мерные центрированные гауссовские белозумные последовательности с матрицами ковариаций  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{R}_i$ ;  $\Phi_i$ ,  $\mathbf{H}_i$  – известные матрицы соответствующей размерности. В начальный момент времени значения  $\mathbf{x}_0$  представляют гауссовский центрированный случайный  $n$ -мерный вектор с матрицей ковариаций  $\mathbf{P}_0$  при  $\mathbf{w}_i$  порождающих и  $\mathbf{v}_i$  измерительных шумах, когда  $\mathbf{x}_0$  между собой статистически независимы.

В данной постановке известной считается совместная ФПРВ  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i)$  векторов  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{w}_i = [\mathbf{w}_1^T, \mathbf{w}_2^T, \dots, \mathbf{w}_i^T]^T$  и  $\mathbf{v}_i = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_i^T]^T$ . Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка, минимизирующая критерий (10), и соответствующая ей апостериорная матрица ковариаций ошибок оценивания могут быть найдены с помощью дискретного линейного *фильтра Калмана (ФК)* [10].

Если процессы динамики и измерений описываются нелинейными уравнениями (3) и (4), то задача оценивания может быть решена с помощью *расширенного фильтра Калмана (РФК)*, т.е. нелинейного субоптимального алгоритма.

Отличительная особенность *РФК* заключается лишь в том, что для прогноза состояния и измерения используются нелинейные уравнения динамики (3) и измерений (4), а в уравнениях для матриц ковариаций и матрицы усиления используются матрицы Якоби  $\Phi_{x_i}$  и  $\mathbf{H}_{x_i}$  вместо матриц динамики  $\Phi_i$  и измерения  $\mathbf{H}_i$ .

### Решение адаптивной задачи фильтрации процессов с разладкой

Если для уравнений (3), (4) предположить, что  $\mathbf{w}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  –  $n$ - и  $m$ -мерные центрированные гауссовские белозумные последовательности, а для вектора сопровождающих параметров  $\theta_i$  имеется типовая модель вида (7) – (9), тогда расширенный вектор состояния  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T, \theta^T)^T$ , записываем (3), (4) в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) + \tilde{\Gamma}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})\tilde{\mathbf{n}}_i; \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{s}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \mathbf{v}_i, \quad (15)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$ ;  $\tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} \Phi_i(\mathbf{x}_{i-1}, \theta_{i-1}) \\ \mathbf{g}_i(\theta_{i-1}) \end{bmatrix}$ ;  $\tilde{\Gamma}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}) = \begin{bmatrix} \Gamma_i(\mathbf{x}_{i-1}) & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix}$ ;  $\tilde{\mathbf{n}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_{\theta_i} \end{bmatrix}$ . При этом

адаптивная задача сводится к совместному оцениванию и идентификации на основе стохастического описания процесса и наблюдения вида (3) – (4).

Адаптивная нелинейная фильтрация. Использование байесовского подхода для решения задачи адаптивной нелинейной фильтрации приводит к следующим выражениям для апостериорным плотностям вероятностей [3]:

$$f(\mathbf{x}_i, \theta_i / \mathbf{Y}_{i-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f[\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})] f(\mathbf{x}_{i-1}, \theta_{i-1} / \mathbf{Y}_{i-1}) d\mathbf{x}_{i-1} d\theta_{i-1}. \quad (16)$$

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i / Y_i) = C_i^{-1} f[\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i)] \int_{-\infty}^{\infty} f[\tilde{\mathbf{x}}_i - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_i(\tilde{\mathbf{x}}_{i-1})] \times \\ \times f(\mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}_{i-1} / Y_{i-1}) d\mathbf{x}_{i-1} d\boldsymbol{\theta}_{i-1}, Y_i = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_i^T]^T. \quad (17)$$

Последовательность операций при байесовском адаптивном оценивании стохастического векторного процесса  $\mathbf{x}_i$  в условиях априорной неопределенности представляется в виде схемы  $Y_i \rightarrow f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i / Y_i) \rightarrow f(\mathbf{x}_i / Y_i) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_i$ .

Однако нелинейные алгоритмы сложны в реализации, а их эффективность исследована пока недостаточно. Поэтому в инженерной практике вместо оптимальных находят применение различного рода субоптимальные решения рассматриваемой задачи, с возможно более полным использованием подходов и структур, разработанных для линейных фильтров Калмана [2, 11].

Использование банка фильтров Калмана. Для решения задач оценивания нестационарных процессов с разладкой используется многоальтернативный метод на основе банка фильтров  $\Phi K$ , который был впервые предложен для оценки процесса с неизвестными постоянными параметрами. Этот метод получил развитие и сейчас находит широкое применение в различных задачах, где приходится сталкиваться с многоальтернативными состояниями системы или процесса [2, 6, 11]. В методе применяется набор фильтров, каждый из которых настроен на конкретную гипотезу о модели, описывающей поведение процесса. Невязки фильтров используются для вычисления апостериорных вероятностей гипотез о различных состояниях. Такой метод является оптимальным при использовании  $\Phi K$  для всех возможных моделей процесса.

При решении задач траекторного слежения находят применение как вариант с одним  $\Phi K$  с перестраиваемой моделью динамики, так и с двумя  $\Phi K$  с переключением [2, 11].

Банк  $\Phi K$  подходит для решения задачи обнаружения и оценивания нарушений в информационно-измерительных системах, где как раз и приходится иметь дело с набором гипотез о возможных неисправностях в системе [6]. При этом  $\Phi K$ , помимо собственно нарушения, должен оценивать еще и вектор состояния, имеющий, как правило, высокую размерность. Вместо банка  $\Phi K$  можно использовать один Р $\Phi K$ , как в работе [6].

### **Постановка и решение нелинейной задачи оценивания с помощью синтетических алгоритмов в рамках байесовского подхода**

Для решения задачи оценивания в рамках байесовского подхода предлагается вычислительный метод оценивания с реализацией на основе синтетических алгоритмов оценивания состояния процесса с использованием декомпозиции:

1) вводится класс параметрически заданных функций  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{W}})$ ;

2) при наличии обучающего множества

$$\left\{(\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{x}^{(j)})\right\}_{j=1}^N \quad (18)$$

определяется среднеквадратический критерий оптимизации [12]

$$\tilde{J}(\tilde{\mathbf{W}}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\mathbf{x}^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\mathbf{y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}})\right)^T \left(\mathbf{x}^{(j)} - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\mathbf{y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}})\right), \quad (19)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(\mathbf{y}^{(j)}, \tilde{\mathbf{W}})$  – формируемая оценка;

3) критерий (19) оптимизируется на основе минимизации эмпирического риска [13]  $P \left\{ \sup_{\tilde{\mathbf{W}}} |J(\tilde{\mathbf{W}}) - \tilde{J}(\tilde{\mathbf{W}})| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$ , при  $N \rightarrow \infty$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность;

$$J(\tilde{\mathbf{W}}) = M \left\| \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{W}}) \right\|^2;$$

4) при минимизации критерия (19) для вычисления оценки используется синтетическая система, реализующая преобразование

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mu}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}^{\mu}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{W}}), \quad \mu = NN, FS, W, \quad (20)$$

где  $\mathbf{y}$  – вход синтетических систем;  $\tilde{\mathbf{W}}$  – матрица, отвечающая за параметры синтетических систем: при  $\mu = NN$  это массив смещений и весовых коэффициентов НС;  $\mu = FS$  – матрица, определяющая набор свободных параметров (параметры функций принадлежности и весовые коэффициенты правил);  $\mu = W$  – массив аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов сигнала [14 – 16];

5) после обучения системы, располагая измерением  $\mathbf{y}$  по формуле (20), определяется значение оценки.

С учетом сказанного, можно следующим образом уточнить постановку задачи оценивания в рамках предложенного подхода: располагая измерением  $\mathbf{y}$ , обучающим множеством (18) и используя критерий (19), конкретизировать алгоритм нахождения оценки в виде (20), т.е. найти  $\tilde{\mathbf{W}}^*$ , минимизирующую (19), а затем вычислить само ее значение для измерения  $\mathbf{y}$ .

### **Решение нелинейной задачи оценивания с помощью синтетических алгоритмов в рамках метода наименьших квадратов**

Такое решение важно для использования синтетических систем в режиме реального времени:

1) вводится класс параметрически заданных функций  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{W}})$ ;

2) при отсутствии обучающего множества  $\left\{(\mathbf{y}^{(j)}, \mathbf{x}^{(j)})\right\}_{j=1}^N$  и при наличии из-

вестной функции  $s(\mathbf{x})$  вычисляется среднеквадратический критерий оптимизации [3, 17]

$$\tilde{I}(\tilde{W}) = \{\mathbf{y} - s[\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{W})]\}^T \{\mathbf{y} - s[\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{W})]\} = \sum_{i=1}^m \{y_i - s_i[\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{W})]\}^2, \quad (21)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \tilde{W})$  – формируемая оценка. Отметим, что в рассматриваемом случае возможно наличие обучающего множества вида  $\{\mathbf{y}^{(j)}\}_{j=1}^N$ , которое может быть использовано для вычисления критерия (21);

3) производится минимизация критерия (21) на основе минимизации эмпирического риска

$$P \left\{ \sup_{\tilde{W}} |I(\tilde{W}) - \tilde{I}(\tilde{W})| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0, \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность;  $I(\tilde{W}) = M \|\mathbf{y} - s[\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{y})]\|^2$ ;

4) минимизация реализуется с помощью нейронных сетей, нечетких систем и вейвлетов, осуществляющих вычисление оценки по формуле (20)  $\tilde{\mathbf{x}}^\mu(\mathbf{y}) = \mathbf{K}^\mu(\mathbf{y}, \tilde{W})$ , где  $\tilde{W}$  – матрица, отвечающая за параметры синтетических систем [14 – 16];

5) после обучения системы, располагая измерением  $\mathbf{y}$ , по формуле (20) определяется и само значение оценки.

## Примеры моделей процессов с фрактальной структурой

1. Математическая модель ошибок инерциальных датчиков навигационных систем с учетом показателя хаотичности. При обработке навигационной информации важно учесть свойства ошибок выходных сигналов датчиков навигационных систем. При моделировании ошибок инерциальных датчиков, имеющих стохастическое описание, широко применяется винеровский процесс [18]. В частности, такая модель используется для описания дрейфа нуля гироскопа.

*Модель винеровского процесса для ошибки  $x(t)$  в непрерывном времени имеет вид*

$$\dot{x}(t) = w(t), \quad (22)$$

где

$$M[w(t)] = 0, \quad M[w(t)w(\tau)] = q(t)\delta(t - \tau), \quad (23)$$

здесь  $q(t)$  – интенсивность непрерывного белого шума  $w(t)$ .

Уравнение состояния в дискретном времени с периодом дискретизации  $T$

$$x_i = x_{i-1} + w_i. \quad (24)$$

Ковариация  $Q$  для дискретного шума  $w_i$  в случае  $q(t) = q = const$ :

$$Q = \sigma^2 = qT. \quad (25)$$

Процесс  $w_i$  может быть представлен в модели с использованием белого шума  $n_i$  с единичной интенсивностью посредством соотношения

$$w_i = \sqrt{qT}n_i.$$

Заметим, что описываемый при помощи стохастического дифференциального уравнения (22) процесс  $x(t)$  является винеровским, определенным через белый шум  $w(t)$ . Последовательность  $x_i$  с некоррелированными приращениями (24) называется винеровской последовательностью [1].

Анализ графиков поведения ошибок инерциальных датчиков по результатам экспериментов, приведенных в работах отечественных и зарубежных авторов, свидетельствует, что процессы, описывающие ошибки, имеют фрактальную природу.

На это указывают представленные результаты испытаний дрейфа гироскопа в работах [8, 18]. При описании модели дрейфа гироскопа учтены постоянная и переменная составляющие, коэффициент корреляции, дисперсия переменной составляющей ухода и белый шум. В работе [18] также предлагается математическая модель ошибок датчика на основе вариации Аллана, в котором используются неизвестные параметры, характеризующие вклад составляющих ошибок датчика, соответствующих линейному тренду, винеровскому процессу, фликкер-шуму, белому шуму и шуму квантования.

Для выявления особенностей фрактальной структуры процесса используется показатель Херста. При показателе Херста  $H$ :  $0 < H < 0.5$  – процесс обладает *антиперсистентными* свойствами;  $H \approx 0.5$  – процесс называется белым шумом, что означает классическое броуновское движение;  $0.5 < H < 1$  – процесс обладает фрактальными свойствами с трендоустойчивыми свойствами [4].

*Экспериментальное подтверждение фрактальных свойств процесса ухода нуля гироскопа.* Испытанию подвергся цифровой гироскоп STMicroelectronics L3G4200D PmodGYRO и акселерометр ADXL345 с использованием устройства myRIO National Instruments в среде моделирования LabView. Пример записи ухода гироскопа и смещения нуля акселерометра при проведении таких испытаний приведен на рис. 1.

На рис. 1а представлен уход гироскопа из опыта в 1 час при параметрах: диапазон измерений 250 град/сек (dps); чувствительность датчика 0,00875 dps/LSB; скорость передачи данных 100 Hz; выборка за 1 час с шагом  $T = 10^{-2}$ с – 360000 значений при чувствительности 250 dps.

На рис. 1б показано смещение нуля акселерометра из опыта 20 мин. при параметрах: диапазон разрешения 16 g; масштаб 0.0625 g/LSB; скорость передачи



данных 100 Hz; выборка за 20 мин. с шагом  $T = 10^{-2}$ с – 127077 значений, температура 23°C.

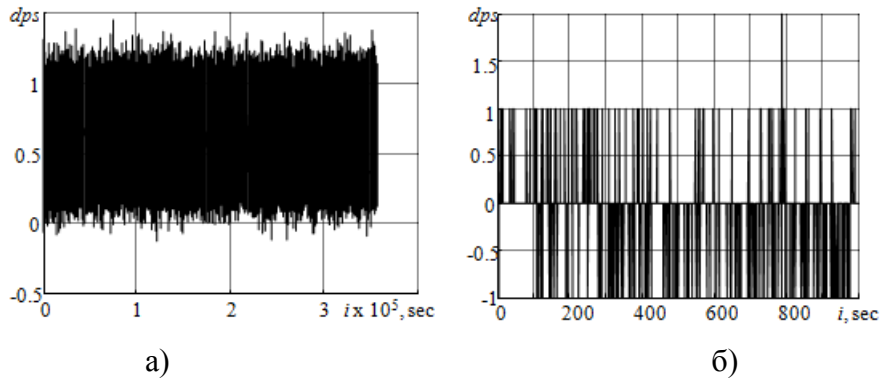


Рис. 1. Уход гироскопа: а) и смещение нуля акселерометра; б) по координате x.

Средствами MatLab проведен расчет показателя Херста, как видно для испытания по уходу гироскопа длительностью в 1 час (рис. 2а) значение показателя колеблется около 0.26. А для испытания по смещению нуля акселерометра длительностью в 20 мин. (рис. 2б) значение показателя Херста колеблется около 0,03. Следовательно, процессы обладают *антиперсистентными* свойствами.

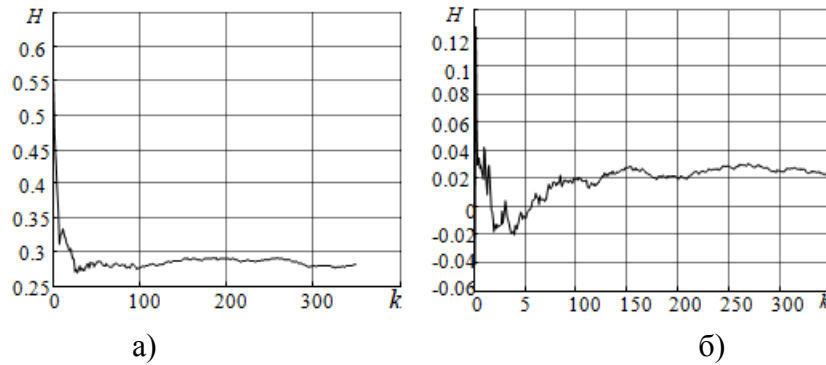


Рис. 2. Показатель Херста при дрейфе (уходе) гироскопа за 1 час (а) и при смещении нуля акселерометра (б).

Вышеизложенное позволяет предложить для описания ошибок датчиков обобщенный фрактальный винеровский процесс.

*Фрактальный винеровский процесс* называется случайным процессом  $x(t)$  с параметром Херста  $H$  ( $0 < H < 1$ ), если  $\Delta x = x(t) - x(t_0)$  имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2 \cdot (t - t_0)^{2H}$ , где  $\sigma$  – положительная константа, т.е. его вероятностная мера [19]:

$$P(\Delta x < X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot (t - t_0)^H} \cdot \int_{-\infty}^X \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma \cdot (t - t_0)^H}\right)^2\right] du. \quad (26)$$

При  $H = 0,5$  ФВП совпадает с классическим броуновским движением. Приращения  $\Delta x = x(t) - x(t_0)$  ФБД называются фрактальным гауссовским шумом, дисперсия которого подчиняется соотношению  $D[x(t) - x(t_0)] = \sigma^2 \cdot (t - t_0)^{2H}$ .

*Модели ошибок датчиков на основе фрактального винеровского процесса.* Выбрав вероятностную меру (26) для приращений случайного процесса (22), (24)  $\Delta x = x(t) - x(t_0) = x_i - x_{i-1}$ , получим модель с фрактальным винеровским процессом для ошибки.

*Модель измерений ошибок датчиков.* На основе полученных результатов обработки данных испытаний гироскопа предлагается математическая модель ухода гироскопа с учетом показателя хаотичности:

$$\xi_i = \eta_i + x_i + v_i,$$

где  $\eta_i$  – трендовая составляющая;  $x_i$  – компонента, выражающая меру хаотичности процесса, описывающая характер процесса и зависящая от  $H$  – показателя Херста;  $v_i$  – случайный белый шум с дисперсией  $R_i$ ;  $T = t_i - t_{i-1}$  – моменты времени.

2. Математические модели движения объекта для задач траекторного слежения. Объект совершает движение в горизонтальной плоскости с координатами  $x$  и  $y$  декартовой системы координат. Ограничимся рассмотрением модели движения для одной координаты  $x$ , для координаты  $y$  модель аналогична.

Рассмотрим модели движения объекта, традиционно используемые для решения задач траекторного слежения [7, 11, 20].

*Модель с винеровским процессом для ускорения*

$$\ddot{x} = w(t), \tag{27}$$

с характеристиками белого шума  $w(t)$  (23).

*Модель с белым шумом для ускорения или винеровским процессом для скорости*

$$\dot{x}(t) = w(t). \tag{28}$$

*Модель с белым шумом для скорости или винеровским процессом для координаты* определяется уравнениями (22) – (25):

$$\dot{x}(t) = w(t), M[w(t)] = 0, M[w(t)w(\tau)] = q(t)\delta(t - \tau), x_i = x_{i-1} + w_i.$$

Существенно, что все представленные модели движения (22), (27) и (28) определены через винеровский процесс, а их дискретные представления с периодом дискретизации  $T$  в виде

$$x_i = \Phi x_{i-1} + w_i$$

– через винеровскую последовательность [1].

С учетом этого нами предложены *новые* модели движения объекта, основанные на использовании *фрактального винеровского процесса* (фрактального броуновского движения – ФБД) [7, 8].

*Модели движения объекта на основе фрактального винеровского процесса.* Выбрав вероятностную меру (26) для приращений случайного процесса (22), (24)

$\Delta x = x(t) - x(t_0) = x_i - x_{i-1}$ , получим модель с фрактальным винеровским процессом для координаты.

Поступив аналогично для процессов (27), (28), получим модель с фрактальным винеровским процессом для ускорения и модель с фрактальным винеровским процессом для скорости соответственно.

## Примеры моделей процессов с разладкой

1. Модели движения маневрирующих целей в задачах траекторного движения. В качестве разладки – маневра – принимается внезапное (непредвиденное) изменение характера движения объекта под воздействием случайных и (или) детерминированных сил. Общее уравнение движения маневрирующей цели записывается в виде (3). В качестве вектора неопределенных параметров  $\theta_i = (\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_l})^T$  рассматриваются и подлежат оцениванию параметры, характеризующие ускорение движения объекта на участке маневра.

*Пример модели движения маневрирующей цели для координаты  $\lambda(t)$ :*

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= v_\lambda(t) + \Delta v_\lambda(t), \\ \ddot{\lambda}(t) &= \Delta a_\lambda(t) + \begin{cases} 0, & \text{для } t < t_{\text{н.м.}}, \\ a_\lambda(t), & \text{для } t_{\text{н.м.}} \leq t \leq t_{\text{к.м.}}, \\ 0, & \text{для } t > t_{\text{к.м.}}, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $t_{\text{н.м.}}$ ,  $t_{\text{к.м.}}$  – время начала и конца маневра соответственно;  $v_\lambda(t)$ ,  $a_\lambda(t)$  – проекции скорости и ускорения объекта соответственно.

2. Модели процессов в инерциальных навигационных системах. Примеры процессов с нарушениями рассмотрены в [6, 21] в виде скачкообразного или линейного изменения при уходе гироскопов и смещения нуля акселерометров инерциальных навигационных систем.

## Численная реализация ФВП

Для моделирования ФВП нет простого метода (например, как для классического броуновского движения). Для построения ФВП можно воспользоваться вейвлет-разложением [22, 23]. В этом случае разложение может быть получено с помощью фрактального процесса авторегрессии и скользящего среднего FARIMA [19, 22, 23]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{-H-1/2}(t-k) S_k^{(H)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-jH} \psi_{-H-1/2}(2^j t - k) \varepsilon_{j,k} - b_0,$$

где  $\psi_{-H-1/2}$  – биортогональная вейвлет-функция;  $\Phi_{-H-1/2}$  – соответствующая  $\psi_{-H-1/2}$  скейлинг-функция;  $S_k^{(H)} = \sum_{j=1}^k \zeta_j$ , если  $k \geq 1$ ,  $S_0^{(H)} = 0$  и  $S_k^{(H)} = -\sum_{j=0}^{-k} \zeta_j$ ,

если  $k \leq 1$  при  $(\zeta_j)_{j \in N}$  – гауссовский процесс FARIMA  $[0, H-1/2, 0]$ , с независимой спектральной плотностью  $g(\lambda) = (2\pi)^{-1} |1 - e^{-i\lambda}|^{1-2H}$ ;  $\varepsilon_{j,k}$  – независимые гауссовские случайные величины с распределением  $N(0, 1)$ ;  $b_0$  – случайная константа.

### Пример оценивания

Чтобы наглядно выявить особенности фильтрации фрактального процесса, сознательно выберем простейшую модель, описываемую с использованием выражений (22) – (27) для фрактального винеровского процесса.

Необходимо оценить координату фрактального винеровского процесса (24)

$$x_i = x_{i-1} + w_i$$

по линейным измерениям вида

$$\xi_i = x_i + v_i,$$

где  $i = 0, 1, \dots$  – моменты времени;  $w_i, v_i$  – белые шумы с дисперсиями  $Q = \sigma_w^2$  и  $R = \sigma_v^2$  соответственно.

Параметры моделирования: начальное состояние  $m_{x_0} = 0$ ,  $\sigma_{x_0} = 20$ ; параметры порождающего и шума измерения:  $\sigma_w = 1,1457$  при  $H = 0,1$ ;  $\sigma_w = 0,4041$  при  $H = 0,5$ ;  $\sigma_w = 0,2152$  при  $H = 0,9$ ;  $\sigma_v = 10$ , период дискретизации  $T = 1$  с.

Для моделирования с использованием синтетических алгоритмов  $\tilde{x}_i^\mu = \mathbf{K}_i^\mu(\tilde{x}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)})$  генерировались обучающий  $\{(\tilde{x}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)}), x_i^{(j)}\}_{j=1}^N$  и тестовый  $\{(\tilde{x}_{i-1}^{(j)}, \xi_i^{(j)}), x_i^{(j)}\}_{j=1}^{N^*}$  массивы данных. Для сравнения точности полученных оценок использовались среднеквадратические отклонения (CKO) ошибок оценивания:

$$\tilde{\sigma}_i^\eta \approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (e_i^{\eta(j)})^2}; \quad e_i^{\eta(j)} = \tilde{x}_i^{\eta(j)}(\xi_i^{(j)}, \mathbf{W}_i) - x_i^{(j)}; \quad L = \{N, N^*\}, N = 30000, N^* = 3000;$$

$$\eta = FK, NN, FS, W.$$

Для получения искомой оценки с помощью вейвлет-алгоритмов фильтрации применена рекуррентная декомпозиционная схема оценивания в виде каскадного и параллельного соединения, с двумя входами и одним выходом, где на вход поступает текущее измерение  $\xi_i$  и оценка  $x_{i-1}$ , полученная на предыдущем шаге. Для моделирования генерировался обучающий массив данных, где  $N = 30000$ , количество измерений  $i = 1.200$ . Для реализации вейвлет-алгоритма оценивания выбран вейвлет Добеши 6 с уровнем разложения 8. Проведено моделирование процесса с различным показателем Херста  $H$  (рис. 3).

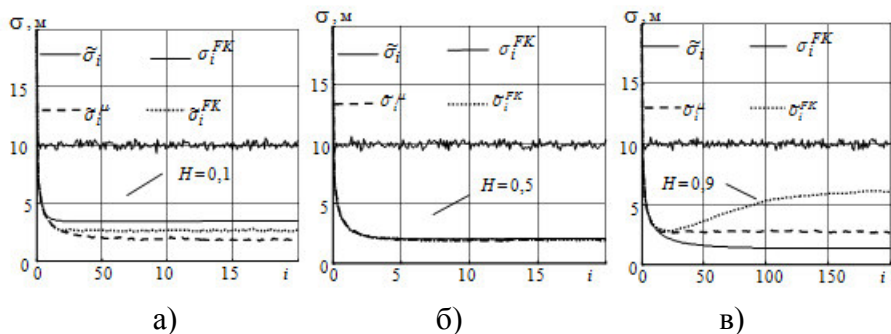


Рис. 3. СКО ошибок оценивания процесса с различным показателем Херста  $H$ .

На рис. 3 представлены:  $\sigma_i^{FK}$  – расчетное СКО ошибок оценивания, соответствующее дисперсии ошибки оптимального оценивания, которая является единственным элементом расчетной матрицы ковариаций ошибок  $\Phi K$ ;  $\tilde{\sigma}_i^{FK}$  – выборочное СКО ошибок фильтрации при использовании  $\Phi K$ ;  $\tilde{\sigma}_i^{\mu}$  – выборочное СКО ошибок фильтрации при использовании синтетических алгоритмов;  $\tilde{\sigma}_i$  – выборочное СКО ошибки измерений.

Исследование показало, что при процессе с уровнем хаотичности  $H = 0.1$  с помощью вейвлет-алгоритмов может быть достигнута более высокая точность оценивания, в отличие от  $\Phi K$  (рис. 3а). При уровне хаотичности  $H = 0.5$   $\Phi K$  и вейвлет-алгоритмы оценивают процесс с одинаковой точностью (рис. 3б). Для уровня хаотичности  $H = 0.9$  при оценивании процесса происходит сбой работы  $\Phi K$ , в отличие от вейвлет-алгоритмов, которые проявляют стабильность работы (рис. 3в). Для  $H = 0.1$  и  $H = 0.9$  наблюдается несовпадение расчетной и действительной (выборочной) характеристик для  $\Phi K$ .

Из результатов моделирования видно, что применение линейного  $\Phi K$  не дает необходимого результата. Для его достижения необходимо решить адаптивную задачу оценивания с введением и оценкой неизвестного параметра – показателя фрактальности  $H$ .

## Выводы

Предложена единая математическая модель нестационарного процесса, с помощью которой удалось описать гауссовские случайные процессы, нестационарные процессы с фрактальной структурой и процессы, имеющие неоднородности и нарушения. Применительно к навигации и управлению подвижными объектами выявлены процессы, имеющие фрактальную природу: ошибки инерциальных датчиков, в частности уходы гироскопов и акселерометров, траекторное движение подвижных объектов.

Рассмотрены модели процессов, имеющих неоднородности и нарушения: скачкообразным или линейным изменением в уходе гироскопов и смещениями

нуля акселерометров инерциальных навигационных систем; модели движения маневрирующих объектов при решении задач траекторного слежения.

Решение задачи оценивания указанных процессов сведено к решению адаптивной задачи как в рамках байесовской, так и небайесовской постановок.

Предложено решение нелинейной задачи оценивания с минимизацией среднеквадратического критерия на основе синтетических алгоритмов, в том числе вейвлетов, как в рамках байесовского подхода с использованием обучающего множества в режиме off-line, так и в рамках метода наименьших квадратов при отсутствии обучающего множества и при наличии уравнения измерений в режиме реального времени on-line.

На примере показаны особенности оценивания параметров фрактального процесса с помощью фильтра Калмана и вейвлет-алгоритма.

Дальнейшие исследования связаны с разработкой адаптивных методов и алгоритмов фильтрации нестационарных процессов с фрактальной структурой и процессов с разладкой, а также с построением гибридной системы оценивания на базе традиционных подходов и предложенных вейвлетов, нейронных сетей, нечетких систем для применения их при обработке навигационной информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов О.А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 1998.
2. *Кузьмин С.З.* Цифровая радиолокация. Введение в теорию. – Киев: Изд-во КВиЦ, 2000.
3. *Амосов О.С.* Нейросетевые и нечеткие методы оценивания стохастических систем: Дис. ... д-ра техн. наук. – Владивосток, 2004.
4. *Пащенко Ф.Ф., Амосов О.С., Муллер Н.В.* Структурно-параметрическая идентификация временного ряда с применением фрактального и вейвлет-анализа // Информатика и системы управления. – 2015. – № 2 44). – С.80-88.
5. *Старченко Н.В.* Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2005.
6. *Кошаев Д.А.* Методы оценивания сигналов навигационных систем на основе многоальтернативного и неполного стохастического описания: Дис... д-ра техн. наук. – СПб., 2010.
7. *Амосов О.С., Баена С.Г.* Оценивание параметров траектории подвижного объекта, моделируемой с использованием фрактального винеровского процесса на основе вейвлет-разложения // Информатика и системы управления. – 2016. – № 4(50). – С.76-86.
8. *Амосов О.С., Баена С.Г.* Фильтрация стохастических процессов с фрактальной структурой применительно к задачам обработки навигационной информации // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2016. – Т.1, №4(28). – С.34-44.
9. *Амосов О.С., Магола Д.С., Муллер Н.В.* Фрактальный и вейвлет-анализ телекоммуникационных рядов информационной системы // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2016. – Т.1, № 1(25). – С.28-36.

10. Степанов О.А., Амосов О.С. Оптимальная линейная фильтрация с использованием нейронной сети // Гироскопия и навигация. – 2004. – № 3 (46). – С.14-29.
11. Bar-Shalom Y. Estimation with applications to tracking and navigation / by Yaakov Bar-Shalom, X.-Rong Li, Thiagalingam Kirubarajan. – New York: John Wiley & Sons, 2001.
12. Stepanov O.A., Amosov O.S. Optimal Estimation by Using Neural Networks // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline) sponsors: 16th Triennial World Congress of International, Federation of Automatic Control. – Prague, July 03–08, 2005. – P.236.241.
13. Vapnik V.N., Chervonenkis A.Ya. Necessary and sufficient conditions for the uniform convergence of means to their expectations // Theory of Probability & Its Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1982. – Vol. 26, No. 3. – P.532-553.
14. Амосов О.С., Амосова Л.Н., Магола Д.С. Оценивание случайных последовательностей с использованием регрессии и вейвлетов // Информатика и системы управления. – 2009. – № 3(21). – С.101-109.
15. Амосов О.С., Малашевская Е.А., Баена С.Г. Субоптимальное оценивание случайных последовательностей с использованием иерархических нечетких систем // Информатика и системы управления. – 2013. – № 3(37). – С.123–133.
16. Stepanov O.A., Amosov O.S. The comparison of the Monte-Carlo method and neural networks algorithms in nonlinear estimation problems // IFAC Proceedings Volumes 9th IFAC Workshop “Adaptation and Learning in Control and Signal Processing”, ALCOSP’2007. – Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 2007. – P.392-397.
17. Amosov O.S. Optimal and Adaptive Estimation Using On-Line Training Neural Networks // Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Control and Information Processing, ICICIP 2011. – Harbin, July 25-28, 2011. – P.208-213.
18. Степанов О.А., Моторин А.В. Сравнение методов идентификации моделей ошибок датчиков, основанных на вариациях Аллана и алгоритмах нелинейной фильтрации // XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2014. – С.98-103.
19. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
20. Амосов О.С. Фильтрация марковских последовательностей на основе байесовского, нейросетевого подходов и систем нечеткой логики при обработке навигационной информации // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2004. – №4. – С. 61-69.
21. Амосов О.С., Баена С.Г. Субоптимальное нелинейное оценивание на основе иерархических синтетических систем // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – Т.56, № 2. – С.4-8.
22. Patrice Abry, Fabrice Sellan. The Wavelet-Based Synthesis for Fractional Brownian Motion Proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and Fast Implementation // Applied and computational harmonic analysis. – 1996. – № 3. – P. 377–383.
23. Bardet J.M. Generators of long-range dependent processes: a survey, Theory and applications of long-range dependence // Theory and applications of long-range dependence. Birkhäuser. – 2003. – № 1. – P. 579-623.

*E-mail:*

Амосов Олег Семенович – [osa18@yandex.ru](mailto:osa18@yandex.ru);

Баена Светлана Геннадьевна – [svetlana.baena@yandex.ru](mailto:svetlana.baena@yandex.ru).