



УДК 519.6

© 2018 г. **В.А. Рукавишников**, д-р физ.-мат. наук
(Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск),

А.В. Рукавишников, канд. физ.-мат. наук
(Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА В ОБЛАСТИ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Для задачи Стокса с особенностью на границе области построен весовой метод конечных элементов, основанный на определении R_ν -обобщенного решения. Численные эксперименты в L-образной области показали преимущество построенного метода над классическими подходами, сделаны выводы.

Ключевые слова: задача Стокса с особенностью, весовой метод конечных элементов.

DOI: 10.22250/isu.2018.55.64-74

Введение

Эффективное численное решение задач течения вязкой несжимаемой жидкости представляет огромный интерес в инженерии.

Существуют три основные причины почему конечно-элементная дискретизация таких задач может сталкиваться со значительными трудностями. Во-первых, наличие угловых сингулярностей и пограничных слоев в решении. Во-вторых, необходимость построения LBB-устойчивых методов для пар пространств скорость – давление. В-третьих, подходящие пары пространств на каждой ячейке должны удовлетворять закону сохранения масс в сильном смысле, а не в слабом.

В представленной работе предложен численный метод решения задачи Стокса в двумерной области с тупым углом, преодолевающий вышеперечисленные трудности. Отметим, что решение задачи имеет особенность в угле ϕ , $\phi \in (\pi, 2\pi)$, даже если входные данные задачи гладкие. Двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в невыпуклой области впервые изучено в [1]. Хоро-

шо известно, обобщенное решение задачи Стокса: компоненты вектора скоростей и функция давления в области Ω с тупым углом на границе не принадлежат пространствам $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно (см. [2]), а приближенное решение, полученное с помощью стандартных конечно-разностных и конечно-элементных схем, сходится к точному решению задачи со скоростью, не превосходящей $O(h^\alpha)$, $\alpha < 1$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ (для компонент вектора скоростей). Такой эффект загрязнения (см. [3]) наблюдается не только в норме классического пространства Соболева, но и в норме весового.

В статье построен весовой метод конечных элементов [4 – 10] (МКЭ), основанный на определении R_ν -обобщенного решения [11 – 15] в L -образной области и использовании inf-sup-устойчивой Скотт-Вогелиус элементной пары [16]. Численные эксперименты модельной задачи показали, что приближенное R_ν -обобщенное решение (вектор скоростей) сходится к точному решению задачи со скоростью $O(h)$ в норме пространства $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, что почти в два раза лучше по порядку, чем в классических подходах [3]. При этом правильный выбор степени ν^* и μ^* в весовых функциях метода уменьшает погрешность (по абсолютной величине) для оптимальных значений ν и δ подхода. Предложенный метод прост в реализации и позволяет инженерам правильно рассчитывать течение жидкости вблизи особых точек на границе расчетной области.

1. Постановка задачи

Пусть R^2 – двумерное евклидово пространство, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – ее элемент с нормой $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и мерой $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$. Пусть $\Omega \subset R^2$ ограниченная, невыпуклая многоугольная область с границей Γ . Вершина тупого угла находится в начале координат, $\bar{\Omega}$ замыкание области Ω , т.е. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Обозначим через $\Omega'_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \|\mathbf{x}\| \leq \delta < 1, \delta > 0\}$ часть δ -окрестности точки $(0,0)$, принадлежащей $\bar{\Omega}$. Определим весовую функцию $\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \\ \delta, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega'_\delta. \end{cases}$

Пусть $W_{2,\alpha}^k(\Omega)$ – пространство функций с ограниченной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^k(\Omega)} = \left(\sum_{|m| \leq k} \|\rho^\alpha(\mathbf{x}) |D^m u(\mathbf{x})|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$D^m u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}}, |m| = m_1 + m_2, m_i \geq 0$ целые. Через $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ ($\alpha > 0$)

обозначим множество функций из пространства $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$, удовлетворяющих

УСЛОВИЯМ

$$\int_{\bar{\Omega} \setminus \Omega'_\delta} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) dx \geq C_1, \quad |D^m u(\mathbf{x})| \leq C_2 \frac{\gamma^m m!}{\rho^{m+\alpha}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Omega'_\delta, \quad (2)$$

$m=0,1, C_1, C_2 > 0, \gamma \geq 1$ константы, не зависящие от m , с ограниченной нормой (1).

Через $L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций из пространства $W_{2,\alpha}^0(\Omega)$, которые подчиняются (2), с нормой $\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)}^2 = \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) dx$. Пусть

$$L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta) = \{q \in L_{2,\alpha}(\Omega, \delta) : \int_{\Omega} \rho^\alpha q dx = 0\}. \quad \text{Через } \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) \text{ (} \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) \subset W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)\text{)}$$

обозначим замыкание по норме (1) множества бесконечно дифференцируемых, ограниченных в Ω функций, удовлетворяющих условиям (2). Будем говорить, что

$\varphi(\mathbf{x}) \in W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, если существует $\Phi(\mathbf{x})$ из $\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$, такая, что $\Phi(\mathbf{x})|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{x})$

и $\|\varphi\|_{W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta)} = \inf_{\Phi|_{\Gamma} = \varphi} \|\Phi\|_{\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)}$. Аналогично вводятся пространства вектор-функций:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) &= [W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)]^2, \quad L_{2,\alpha}(\Omega, \delta) = [L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)]^2, \quad \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta) = [\overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)]^2, \\ \overset{\circ}{W}_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta) &= [W_{2,\alpha}^{1/2}(\Gamma, \delta)]^2. \end{aligned}$$

Задача Стокса состоит в том, чтобы найти поле скоростей $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и функцию давления p , удовлетворяющие системе уравнений и граничным условиям:

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } \Gamma. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{f} и \mathbf{g} – заданные функции в Ω и на Γ соответственно.

Введем для задачи (3), (4) понятие R_ν -обобщенного решения. Для этого определим билинейные и линейную формы

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{w}) dx, \quad b(\mathbf{w}, p) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{w}) dx, \\ c(\mathbf{u}, q) &= - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} q) \operatorname{div} \mathbf{u} dx, \quad l(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx. \end{aligned}$$

Определение 1. Пару $(\mathbf{u}_\nu, p_\nu) \in \overset{\circ}{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи Стокса (3), (4); если \mathbf{u}_ν удовлетворяет (4) на Γ , то и для

любой пары $(\mathbf{w}, q) \in \overset{\circ}{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ и $\mathbf{f} \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$, $\mathbf{g} \in W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, $\nu \geq \beta$ справедливы интегральные тождества

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p_\nu) = l(\mathbf{w}), \quad c(\mathbf{u}_\nu, q) = 0.$$

2. Схема весового метода конечных элементов

Выполним триангуляцию Θ_h , основанную на барицентрическом разбиении элементов квазиравномерной триангуляции T_h области $\bar{\Omega}$. Разобьем $\bar{\Omega}$ на конечное число треугольников $L_i, L_i \in T_h$ (макроэлемент). Затем каждый L_i поделим на три треугольника K_{ij} (конечный элемент), $K_{ij} \in \Theta_h$ (общая вершина находится в барицентре L_i). Обозначим через R_l и S_k вершины и середины сторон K_s соответственно. Тогда

1) $R^{vel} = R_{\Omega}^{vel} \cup R_{\Gamma}^{vel} = \{R_l \cup S_k\}$, где R_{Ω}^{vel} и R_{Γ}^{vel} – множества узлов триангуляции для компонент вектора скоростей в Ω и на Γ соответственно;

2) $R^{pres} = \{Q_l\}$ – множество узлов триангуляции для давления, где Q_l совпадает с узлом R_k на соответствующем элементе K_{ij} .

Обозначим через $\Omega_h = \bigcup_{K_s \in \Theta_h} K_s$ совокупность конечных элементов со сторо-

ной порядка h . Далее опишем Скотт-Вогелиус (SV) элементную пару (см. [16], случай $k = 2$). Для компонент вектора скоростей используем полиномы 2-й степени (X^h), а для давления – 1-й степени (Z^h):

$$X^h = \{w^h \in C(\Omega) : w^h|_K \in P_2(K), \forall K \in \Theta_h\};$$

$$Z^h = \{z^h \in L_2(\Omega) : z^h|_K \in P_1(K), \forall K \in \Theta_h, \int_{\Omega} z^h dx = 0\}.$$

Далее представим базисные функции и построим схему весового МКЭ для задачи (3), (4). Каждому узлу $M_k \in R_{\Omega}^{vel}$ ($N_l \in R^{pres}$) соответствует базисная функция $\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{v^*}(\mathbf{x}) \cdot \phi_k(\mathbf{x})$, ($\chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{\mu^*}(\mathbf{x}) \cdot \psi_l(\mathbf{x})$), $k, l = 0, 1, \dots$, $\phi_k \in X^h$, $\phi_k(M_j) = \delta_{kj}$, $k, j = 0, 1, \dots$, ($\psi_l \in Z^h$, $\psi_l(N_j) = \delta_{lj}$, $l, j = 0, 1, \dots$); δ_{ij} – символ Кронекера; v^* и μ^* – действительные числа.

Пространства V^h и Q^h для компонент вектора скоростей и давления определяются как линейные оболочки систем базисных функций $\{\theta_k\}_k$ и $\{\chi_l\}_l$ соответственно. Определим $V_0^h = \{w^h \in V^h : w^h(M_k)|_{M_k \in R_{\Gamma}^{vel}} = 0\}$.

Компоненты вектора скоростей и функции давления будем искать в виде

$$u_{v,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), u_{v,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k+1} \cdot \theta_k(\mathbf{x}), p_v^h(\mathbf{x}) = \sum_l e_l \cdot \chi_l(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $d_j = \rho^{-v^*}(M_{[j/2]}) \cdot \tilde{d}_j$, $e_i = \rho^{-\mu^*}(N_i) \cdot \tilde{e}_i$. Коэффициенты d_j и e_i в (5) находим в результате решения системы (6), а \tilde{d}_j и \tilde{e}_i суть значения функций в соответст-

вующих узлах. Пусть $V^h = [V^h]^2$, $V_0^h = [V_0^h]^2$, $V^h \subset W_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$, $V_0^h \subset W_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$, $Q^h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$.

Определение 2. Приближенным R_ν -обобщенным решением задачи (3), (4) назовем пару $(\mathbf{u}_\nu^h, p_\nu^h) \in V^h \times Q^h$ – такую, что \mathbf{u}_ν^h в узлах R_Γ^{vel} удовлетворяет (4) и $\forall (\mathbf{w}^h, q^h) \in V_0^h \times Q^h$, $\mathbf{f} \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$, $\mathbf{g} \in W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)$, $\nu \geq \beta$ выполняются тождества

$$a(\mathbf{u}_\nu^h, \mathbf{w}^h) + b(\mathbf{w}^h, p_\nu^h) = l(\mathbf{w}^h), \quad c(\mathbf{u}_\nu^h, q^h) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Система уравнений (6), с учетом (5), имеет следующий вид:

1-е уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_i d_{2i} \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\varphi_k(x)\}} \delta^{2(\nu+\nu^*)} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) dx + \right. \\ & \quad + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\varphi_k(x)\}} \left(\nu^* \rho^{2(\nu+\nu^*-1)} \varphi_i \left((2\nu + \nu^*) \varphi_k + \left(x_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + (2\nu + \nu^*) \rho^{2(\nu+\nu^*)} \left(\rho^{-2} \left(x_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) \right) dx \right] - \\ & - \sum_l e_l \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\varphi_k(x)\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \psi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\varphi_k(x)\}} \left(\rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \psi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (2\nu + \nu^*) \rho^{2(\nu-1)+\nu^*+\mu^*} x_1 \psi_l \varphi_k \right) dx \right] = \int_{\bar{\Omega}_h \cap \{\varphi_k(x)\}} \rho^{2\nu+\nu^*} f_1 \varphi_k dx, \quad k=0,1,\dots; \end{aligned}$$

2-е уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_i d_{2i+1} \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\varphi_k(x)\}} \delta^{2(\nu+\nu^*)} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) dx + \right. \\ & \quad + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\varphi_k(x)\}} \left(\nu^* \rho^{2(\nu+\nu^*-1)} \varphi_i \left((2\nu + \nu^*) \varphi_k + \left(x_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + (2\nu + \nu^*) \rho^{2(\nu+\nu^*)} \left(\rho^{-2} \left(x_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right) \right) dx \right] - \\ & - \sum_l e_l \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\varphi_k(x)\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \psi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\varphi_k(x)\}} \left(\rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \psi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (2\nu + \nu^*) \rho^{2(\nu-1)+\nu^*+\mu^*} x_2 \psi_l \varphi_k \right) dx \right] = \int_{\bar{\Omega}_h \cap \{\varphi_k(x)\}} \rho^{2\nu+\nu^*} f_2 \varphi_k dx, \quad k=0,1,\dots; \end{aligned}$$

3-е уравнение

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_i d_{2i} \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\psi_j(x)\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \psi_j dx + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\psi_j(x)\}} \left(\nu^* \rho^{2(\nu-1)+\nu^*+\mu^*} x_1 \phi_i \psi_j + \rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \psi_j \right) dx \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_i d_{2i+1} \left[\int_{(\bar{\Omega}_h \setminus \Omega'_\delta) \cap \{\psi_j(x)\}} \delta^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \psi_j dx + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_{\Omega'_\delta \cap \{\psi_j(x)\}} \left(\nu^* \rho^{2(\nu-1)+\nu^*+\mu^*} x_2 \phi_i \psi_j + \rho^{2\nu+\nu^*+\mu^*} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \psi_j \right) dx \right] \right) = 0, \quad j = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Для численного решения полученной системы уравнений используем (см. [17]) неполный алгоритм Удзавы с переобусловливанием матрицы системы.

3. Результаты численных экспериментов

Пусть $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$. Тогда разобьем $\bar{\Omega}$ горизонтальными и вертикальными отрезками $x_1^{(j)} = -1 + jh$, $x_2^{(i)} = -1 + ih$, $j, i = 0, \dots, N$ на элементарные квадраты $S_l, \{S_l\}_{l=1}^{G_h}$, $h = \frac{2}{N}$; N – четное число; $G_h = \frac{3N^2}{4}$ (рис. 1). Затем каждый S_l диагональю разделим на два треугольника L_m , их множество (макроэлементов) обозначим через $\{L_m\}_{m=1}^{2G_h}$. Далее каждый L_m разбиваем на три треугольника K_s (барицентрическое разбиение), их множество обозначим через $\{K_s\}_{s=1}^{6G_h}$.

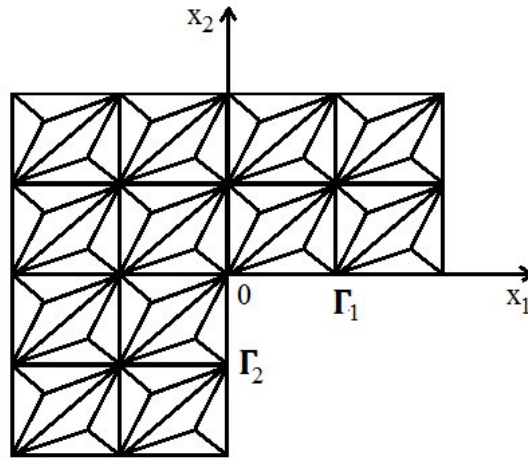


Рис. 1. Триангуляция Θ_h области $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим (u, p) решение задачи (3), (4), имеющее особенность в окрест-

ности входящего тупого угла $\omega = \frac{3\pi}{2}$ с вершиной в точке $(0,0)$. В полярных координатах (r, φ) точное решение имеет вид:

$$u_1(r, \varphi) = r^\lambda \cdot ((1 + \lambda)\Psi(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + \Psi'(\varphi) \cdot \cos(\varphi)),$$

$$u_2(r, \varphi) = r^\lambda \cdot (\Psi'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - (1 + \lambda)\Psi(\varphi) \cdot \cos(\varphi)),$$

$$p(r, \varphi) = -r^{\lambda-1} \cdot \frac{(1 + \lambda)^2 \Psi'(\varphi) + \Psi'''(\varphi)}{1 - \lambda}, \quad \Psi(\varphi) = \frac{\sin((1 + \lambda)\varphi) \cdot \cos(\omega\lambda)}{1 + \lambda} - \cos((1 + \lambda)\varphi) - \frac{\sin((1 - \lambda)\varphi) \cdot \cos(\omega\lambda)}{1 - \lambda} + \cos((1 - \lambda)\varphi).$$

Причем $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, а число λ ($\lambda \approx 0.544483$) является наименьшим действительным решением уравнения $\sin(\lambda\omega) + \lambda \sin(\omega) = 0$.

Пара функций (\mathbf{u}, p) аналитична в $\bar{\Omega} \setminus (0,0)$, но $\nabla \mathbf{u}$ и p имеют особенность в начале координат, при этом $\mathbf{u} \notin W_2^2(\Omega)$ и $p \notin W_2^1(\Omega)$ – типичное поведение решения задачи течения жидкости в многоугольной области с входящим тупым углом на границе Γ .

Численные эксперименты проведены на сетках с различным шагом h . Величины погрешности R_ν -обобщенного и обобщенного ($\nu = 0, \delta \equiv 1, \nu^* = \mu^* = 0$) решений определили с помощью модуля разности между точным и приближенным решениями в узлах M_k , а также в нормах $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно. В каждом узле M_i вычислили погрешности $\delta_{ji} = |u_j(M_i) - u_{\nu,j}^h(M_i)|$ (для R_ν -обобщенного) и $\delta'_{ji} = |u_j(M_i) - u_j^h(M_i)|$ (для обобщенного) решений $M_i \in R_\Omega^{vel}, j = 1, 2$.

В табл. 1 представлены результаты численных экспериментов классического МКЭ, где величины $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{W_2^1(\Omega)}$ обобщенного решения, при $\nu = 0, \delta \equiv 1, \nu^* = \mu^* = 0$.

В табл. 2 приведены погрешности вычислений для весового МКЭ, $\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$ и разных входных параметрах ν, δ метода, где величины $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\nu^h\|_{W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)}$ R_ν -обобщенного решения для различных ν и δ , при $\nu^* = \mu^* = \lambda - 1$.

Таблица 1

| | N = 80 | N = 160 | N = 320 |
|---|-----------|-----------|-----------|
| $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}^h\ _{W_2^1(\Omega)}$ | 2,768e-01 | 1,898e-01 | 1,302e-01 |

Таблица 2

| ν | δ | N = 80 | N = 160 | N = 320 |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1,5 | 0,0125 | 2,619e-04 | 1,303e-04 | 6,475e-05 |
| | 0,015 | 3,946e-04 | 1,958e-04 | 9,744e-05 |
| 1,8 | 0,0125 | 7,153e-05 | 3,551e-05 | 1,769e-05 |
| | 0,015 | 1,144e-04 | 5,709e-05 | 2,824e-05 |

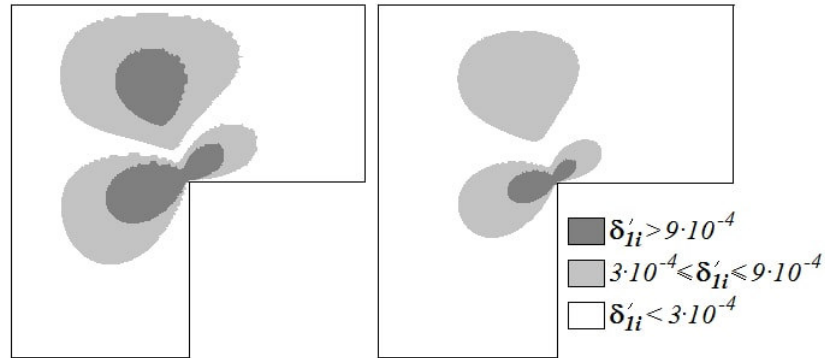


Рис. 2. Распределение точек M_k с погрешностью δ'_i для u_1^h , $\nu = 0$, $\delta = 1$, $\nu^* = \mu^* = 0$; (левая) $N = 160$, (правая) $N = 320$.

На рис. 2 – 4 продемонстрирована погрешность вычислений в норме пространства $C(\bar{\Omega})$, а в табл. 3, представлены количества вершин, в процентах от общего числа, где ошибки δ'_{ji} и δ_{ji} не превосходят заданных величин $\bar{\Delta}_k$ для классического и предложенного методов (при различных значениях степеней весовой функции: асимптотического и оптимального, экспериментально полученного).

На рис. 5 и 6 отражены графики зависимости погрешности решения в норме пространства $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ от степени весовой функции ν^* ($\nu^* = \mu^*$).

Каждый минимум соответствует оптимальному значению для соответствующих ν и δ .

Таблица 3

| $\bar{\Delta}_k$ | Обобщенное решение | | | R_ν -обобщенное решение $\nu = 1,5$, $\delta = 0,0125$ | | | | | |
|-------------------|--------------------|---------|---------|---|---------|---------|--------------------------|---------|---------|
| | | | | $\nu^* = \mu^* = 1 - \lambda$ | | | $\nu^* = \mu^* = -0,375$ | | |
| | N = 80 | N = 160 | N = 320 | N = 80 | N = 160 | N = 320 | N = 80 | N = 160 | N = 320 |
| $5 \cdot 10^{-4}$ | 53,4 | 68,9 | 84,7 | 62,5 | 76,2 | 97,0 | 90,1 | 96,3 | 99,0 |
| 10^{-4} | 31,4 | 41,1 | 52,3 | 36,1 | 46,5 | 64,2 | 66,4 | 87,0 | 97,1 |
| 10^{-5} | 14,9 | 15,4 | 23,1 | 15,7 | 18,9 | 29,1 | 20,3 | 39,2 | 68,4 |

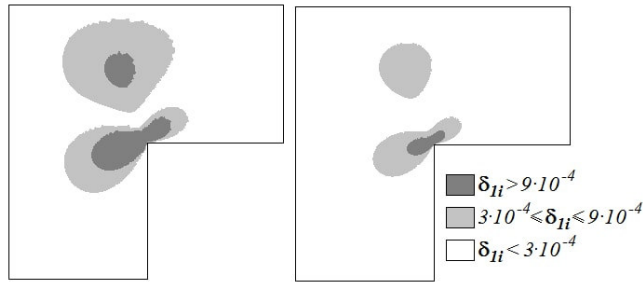


Рис. 3. Распределение точек M_k с погрешностью δ_{li} для $u_{\nu,1}^h$, $\nu = 1,5$, $\delta = 0,0125, \nu^* = \mu^* = \lambda - 1$; (левая) $N = 160$, (правая) $N = 320$.

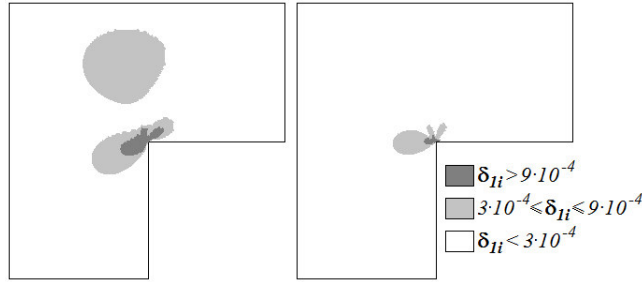


Рис. 4. Распределение точек M_k с погрешностью δ_{li} для $u_{\nu,1}^h$, $\nu = 1,5$, $\delta = 0,0125, \nu^* = \mu^* = -0,375$; (левая) $N = 160$, (правая) $N = 320$.

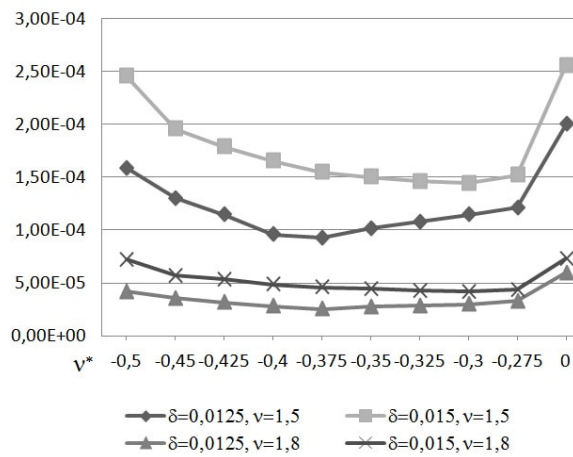


Рис. 5. График зависимости $\|u - u_{\nu}^h\|_{W_{2,\nu}^1(\Omega,\delta)}$ от степени ν^* , $N = 160$.

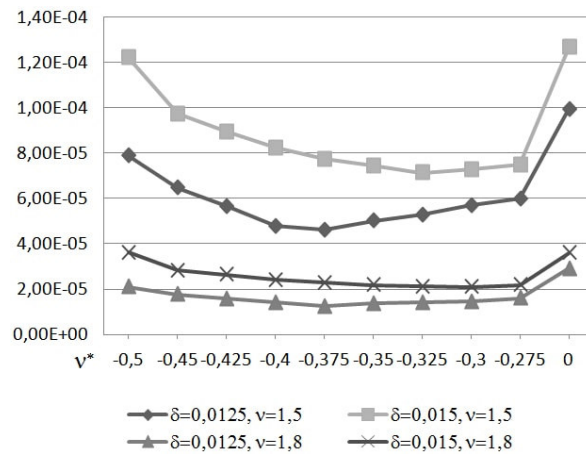


Рис. 6. График зависимости $\|u - u_{\nu}^h\|_{W_{2,\nu}^1(\Omega,\delta)}$ от степени ν^* , $N = 320$.

Заключение

Результаты серии численных экспериментов показали следующее.

Приближенное R_ν -обобщенное решение задачи Стокса (3), (4) (вектор скоростей) сходится к точному решению со скоростью $O(h)$ в норме $W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$, в то время как приближенное обобщенное решение – со скоростью $O(h^\lambda)$ ($\lambda \approx 0,55$ так называемый эффект загрязнения [3]) в норме $W_2^1(\Omega)$.

Для всех значений δ , близких к оптимальному, приближенное R_ν -обобщенное решение сходится к точному со скоростью $O(h)$.

Для всех значений δ , близких к оптимальному, можно определить наилучшую степень $\nu^*(\mu^*)$ весовой функции $\rho(\mathbf{x})$ с точки зрения наименьшей погрешности, которая находится между числом, определяющим асимптотику решения, $\lambda - 1$ и 0.

Количество и процент узлов M_k с ошибкой, превосходящей заданные $\bar{\Delta}_k$, уменьшаются с убыванием величины шага сетки h .

Предложенный метод прост в реализации и позволяет инженерам правильно рассчитывать течение жидкости вблизи особых точек на границе расчетной области.

Для выполнения расчетов были использованы ресурсы ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner// *Journal of Fluid Mechanics.* – 1964. – V. 18. – P. 1-18.
2. *Dauge M.* Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three- dimensional domains with corners. I. Linearized equation// *SIAM Journal on Mathematics.* – 1989. – V. 20. – P. 74-97.
3. *Blum H.* The influence of reentrant corners in the numerical approximation of viscous flow problems // *Notes on Numerical Fluid Mechanics.* – 1990. – V. 30. – P. 37-46.
4. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // *ДАН.* – 1994. – Т. 338, № 6. – С. 731-733.
5. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных// *Сиб. журнал вычислительной математики.* – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 313-324.
6. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2010. – V. 234. – P. 2870-2882.
7. *Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O.* New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // *Journal of Computational Physics.* – 2012. – V. 231. – P. 2438-2448.

8. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I.* On the error estimation of the finite element method for the boundary value problems with singularity in the Lebesgue weighted space // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2013. – V. 34. – P. 1328-1347.
9. *Рукавишников В.А., Николаев С.Г.* Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // ДАН. – 2013. – Т. 453, № 4. – С. 378-382.
10. *Рукавишников В.А., Мосолапов А.О.* Весовой векторный метод конечных элементов для одной задачи электромагнетизма с сильной сингулярностью // ДАН. – 2013. – Т. 449, № 2. – С. 144-148.
11. *Рукавишников В.А.* О дифференциальных свойствах R_V -обобщенного решения задачи Дирихле // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 6. – С. 1318-1320.
12. *Рукавишников В.А.* О единственности R_V -обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. – 2001. – Т. 376, № 4. – С. 451-453.
13. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* О принадлежности R_V -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$ // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 894-898.
14. *Рукавишников В.А.* О существовании и единственности R_V -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. – 2014. – Т. 458, № 3. – С. 261-263.
15. *Рукавишников В.А., Николаев С.Г.* Об R_V -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // ДАН. – 2015. – Т. 463, № 2. – С. 137-139.
16. *Scott L.R., Vogelius M.* Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 1985. – V. 19. – P. 111-143.
17. *Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T.* Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 1997. – V. 34. – P. 1072-1092.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Ереминым.

E-mail:

Рукавишников Виктор Анатольевич – vark0102@mail.ru;

Рукавишников Алексей Викторович – 78321a@mail.ru.