



УДК 629.05

© 2019 г. А.С. Девятисильный, д-р техн. наук,
А.В. Шурыгин

(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ БОРТОВОГО РАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГЛОНАСС

В статье исследована математическая модель обратной задачи движения, целью решения которой являются оценки параметров траектории и пространственной ориентации движущегося объекта, т.е. местоположение, углы Эйлера-Крылова, их производные по времени, а также силы и моменты, обуславливающие выполнение траектории. Показано, что для решения задачи достаточно векторного ньютонометра и блока двух приемников навигационной спутниковой системы. Приведены результаты вычислительного эксперимента для случая сверхзвукового движения.

Ключевые слова: обратная траекторная задача, параметры движения, навигационная спутниковая система, силы, моменты.

DOI: 10.22250/isu.2019.61.3-10

Введение

Одним из интереснейших и важнейших достижений механики Ньютона стало создание метода инерциальной навигации [1, 2] – метода автономного определения параметров движения объекта по информации о нем, доставляемой инерциальными измерителями – ньютонометрами (акселерометрами) и гироскопами. Вместе с тем свойственная этому методу неустойчивость, обнаруживаемая при аналитических и численных исследованиях и верифицированная практикой создания автономных инерциальных навигационных систем, обуславливает необходимость нарушения его автономности и пополнения информационной базы метода наблюдениями (измерениями)

неинерциальной природы. Такие системы комплексирования разнородной информации о движении принято называть интегрированными системами навигации (ИСН).

В настоящей работе предложена математическая модель безгироскопной ИСН, информационная база которой представлена только измерителями вектора удельных сил негравитационной природы, или кажущегося ускорения [1], доставляемых ньютонометрами [2], и темпоральными данными о координатах места движущегося объекта (ДО), доставляемых не более чем двумя приемниками навигационной спутниковой системы (НСС) типа ГЛОНАСС/GPS. Область применения методологии таких ИСН – численно-аналитическое планирование маршрутных заданий, бортовое определение параметров движения и управление ДО различного назначения и базирования (сухопутного, морского, воздушного, космического).

Под «определением движения» здесь понимается решение двух задач – это, во-первых, определение кинематических параметров траектории (траекторная задача) и, во-вторых, определение параметров ориентации ДО в пространстве (задача ориентации).

Предлагаемая ИСН отличается от известных интегрированных инерциально-спутниковых систем [3 – 5] отсутствием в ней гироскопических измерителей абсолютной угловой скорости вращения ДО и методологией математического моделирования и решения обеих задач.

Основные модельные представления

Принимая во внимание форму геоида, в качестве его признанной опорной модели примем эллипсоид вращения (эллипсоид Клеро) [2,3]. В соответствии с этим и с учетом стандартов ПЗ-90 (Россия) и WGS-89 (США) известным образом введем эллипсоидальную (геодезическую) систему отсчета с координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ – геодезические широта, долгота и высота над поверхностью эллипсоида.

В точке O , принадлежащей траектории и отождествляемой с ДО, разместим начало правого прямоугольного координатного трехгранника $Ox = Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_3 , направленной по нормали к поверхности эллипсоида, и осями Ox_1 и Ox_2 , ориентированными соответственно на географические Восток и Север.

Траекторная задача. Обратимся теперь к кинематике, или к «геометрии движения» [1] точки O и обозначим через $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ вектор ее линейной скорости движения относительно твердой Земли, а через $\omega = (\omega_1, \omega_2,$

$\omega_3)^T$ – вектор угловой скорости вращения трехгранника Ox , обусловленной криволинейностью траектории. Оба вектора рассматриваются в проекциях на оси Ox . Между координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ и скоростями достаточно просто установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\varphi}, \omega_2 = \dot{\lambda} \cos \varphi, \omega_3 = \dot{\lambda} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{v_2}{r_2}, \dot{\lambda} = \frac{v_1}{r_1 \cos \varphi}, v_3 = \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $r_1 = a/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} + h$ и $r_2 = a(1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} + h$ – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных главных нормалей сечений поверхности $h = \text{const}$, проходящих через оси Ox_1 (сечение, касательное к параллели) и Ox_2 (меридиальное сечение); a, e – значения большой полуоси и эксцентриситета модели земного эллипсоида; $r_\psi = (r_1^{-1} \sin^2 \psi + r_2^{-1} \cos^2 \psi)^{-1}$ – радиус кривизны нормального сечения эллипсоида при $h = \text{const}$ в точке O , проходящего через вектор-проекцию \mathbf{v}_p вектора \mathbf{v} на плоскость Oy_1y_2 [2]; ψ – путевой угол движения, отсчитываемый по ходу часовой стрелке от оси Oy_2 к оси Oy_1 , так что $v_1 = v_p \sin \psi$, $v_2 = v_p \cos \psi$, $v_p = |\mathbf{v}_p|$.

Под решением траекторной задачи далее понимается решение задачи оценки значений и их производных до порядка $(n - 1)$ параметров $\varphi, \lambda, h, r_1, r_2, r_\psi, v_1, v_2, v_3$ и т.д. При этом математическая модель такой общей задачи рассматривается как совокупность моделей частных обратных задач вида «состояния-измерения» порядка n , где каждая из частных моделей ассоциируется с некоторой функцией времени $\eta(t)$, аппроксимируемой моделью «состояний» вида $\eta(t) = \eta_1, d\eta_1/dt = d\eta_2/dt = \dots = d\eta_n/dt = 0$, по ее темпорально измеряемым с инструментальными погрешностями значениями $\eta(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $t_{k+1} = t_{k+\tau}$, $\tau = \text{const}$. Как видно, каждая частная модель «состояний» – это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простейшей одноклеточной жордановой (с нулевыми диагональными элементами) матрицей [6] в качестве матрицы связи, имеющей индекс нильпотентности, равный n . Естественное обращение к такой модели существенно упростило дискретизацию задачи по времени и реализацию нейросетевого алгоритма динамического псевдообращения [7, 8] калмановского типа с ядерным механизмом настройки [8] на фоне преодоления проблемы разрешимости задачи при больших значениях n и малых τ в условиях конечной точности вычислений и измерений [9].

Полагая далее, что траекторная задача решена [9], обратимся к динамике теперь уже материализованной точки O , т.е. к уравнениям Ньютона, которые с учетом вращения Земли с угловой скоростью $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ в осях

трехгранника Ox представимы в следующем виде:

$$D_{ij}V_j = g_i + f_j, V_j(0) = V_{0,j}, \quad (2)$$

где $D_{ij} = \delta_{ij}d/dt + e_{ikj}(\omega_k + u_k)$ – оператор абсолютной производной; δ_{ij} – символ Кронекера; e_{ikj} – символ Леви-Чивита ($i, k, j = 1, 2, 3$ (по повторяющимся индексам производится суммирование)); $u = |u|$, $u_1 = 0$, $u_2 = u \cos \varphi$, $u_3 = u \sin \varphi$; $V = (V_1, V_2, V_3)^T$ – вектор абсолютной скорости, причем $V_1 = v_1 + u_2 r_1$, $V_2 = v_2$, $V_3 = v_3$; $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ – вектор кажущегося ускорения; $g = (g_1, g_2, g_3)^T$ – напряженность гравитационного поля Земли, известного с достаточной точностью.

Разрешая уравнение (2) относительно f покомпонентно и принимая во внимание (1), получаем:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r_1}(v_3 - v_2 \operatorname{tg} \varphi) - v_2 u_3 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right) + v_3 u_2 + u_2 \dot{r}_1 - g_1, \\ f_2 &= \dot{v}_2 + \frac{v_1^2}{r_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_2 u_3}{r_2} + 2v_1 u_3 + u_2 u_3 r_1 - g_2, \\ f_3 &= \dot{v}_3 - \frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} - 2v_1 u_2 - u_2^2 r_1 - g_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что все значения переменных в правой части (3) известны благодаря интерпретации данных спутникового позиционирования ДО, т.е. при решении траекторной задачи [9], вектор f также может быть вычислен. Таким образом, устанавливается и каузальность траектории, что существенно для дальнейших построений.

Задача ориентации. Введем жестко связанный с ДО правый координатный трехгранник, в осях которого могут производиться векторные измерения, – приборный трехгранник $Oy = Oy_1Oy_2Oy_3$, в идеале совпадающий с трехгранником Ox , но реально связанный с ним матрицей ориентации $A = (a_{ij})$, ($i, j = (1, 2, 3)$), так что $y_i = a_{ij}x_j$ и $x_j = a_{ji}y_i$. Суть задачи определения ориентации ДО в физическом пространстве состоит в оценке элементов матрицы A и, как следствие, значений трех углов последовательного вращения трехгранника Oy из состояния $Oy \equiv Ox$ в текущее состояние. Учитывая, что под ДО здесь понимается объект искусственного происхождения, целесообразно считать, что оси трехгранника Oy совпадают со строительными осями ДО и ввести углы Эйлера-Крылова – углы курса (α), крена (β) и тангажа (θ), соответствующие последовательности парциальных вращений относительно осей Oy_3, Oy_2, Oy_1 .

Для определения значений девяти элементов (направляющих косинусов) матрицы A (или трех углов Эйлера-Крылова), вообще говоря, достаточ-

но найти систему двух неколлинеарных векторов, известных своими проекциями как в Ox , так и в Oy . В качестве таких двух векторов могут быть взяты орты известных звезд, пульсаров или иных объектов. Корректность решения проблемы в таком случае обуславливается возможностью пополнения системы двух векторов третьим, образуемым векторным произведением известных двух, и, таким образом, линейной независимостью этих трех векторов; в предельном случае, когда наблюдению в Ox и Oy доступен только один вектор, определить ориентацию Oy относительно Ox можно только с точностью до поворота Oy относительно Ox вокруг этого единственного вектора как оси.

Возможность вычисления f , демонстрируемая системой уравнений (3), обращает внимание на методологически другую возможность – это непосредственное измерение проекций f в трехграннике Oy с помощью тройки линейных ньютонометров; таким образом решается проблема выбора первого из двух требуемых векторов. Однако существенно отметить, что, оставаясь в рамках анонсируемой в настоящей работе задачи комплексирования измерений геодезических координат места объекта с помощью НСС и измерений ньютонометров, строго решить проблему и второго вектора также можно, но только в случае двух- (и более) позиционного бортового приема данных НСС. Вместе с тем, как показывают вычислительные эксперименты, и при однопозиционном приеме возможны вполне допустимые приближенные оценки углов, если отождествлять угол α с путевым углом ψ в рамках псевдоизмерения $\alpha = -\psi + \delta\alpha$, когда $\delta\alpha$ выступает в качестве небольшой по величине методологической погрешности, обусловленной взаимодействием ДО с внешней средой. В таком случае методом последовательных приближений достаточно просто и в пределах шага дискретизации τ численно решается система уравнений $f_y = Af$, где f_y – вектор силы f , измеряемой ньютонометрами, т.е. задача точечного оценивания углов β и θ .

Подобным же образом вычисляется и вся тройка углов Эйлера-Крылова, т.е. $\{\alpha, \beta, \theta\}$, и дополнительно угол курсового дрейфа $\delta\alpha = \psi - \alpha$, если на борту ДО осуществляется двухпозиционный прием спутниковой навигационной информации и решается система уравнений $\{f_y = Af, l_y = A_1\}$, где l_y – технологический (известный) вектор места второго приемника НСС в Oy , а l – этот же вектор в Ox , вычисляемый по данным его позиционирования НСС. Здесь же оценивается необходимое число производных углов α, β, θ и, таким образом, реализуется возможность оценки в трехграннике Oy вектора угловой скорости собственного вращения

$$q_y = (q_{y,1}, q_{y,2}, q_{y,3})^T,$$

где $q_{y,1} = d\theta/dt + (d\alpha/dt)\cdot\sin\beta$, $q_{y,2} = (d\beta/dt)\cdot\cos\theta + (d\alpha/dt)\cdot\sin\theta\cos\beta$, $q_{y,3} = (d\alpha/dt)\cdot\cos\theta\sin\beta - (d\beta/dt)\cdot\sin\theta$. Очевидно, возможен и отказ от исходной декларируемой бортовой системы измерителей и пополнение ее, например, астровизирами известных звезд или пульсаров.

В общем случае, если вектор \mathbf{q}_y определен, то открывается возможность и для оценки абсолютной угловой скорости ДО $\mathbf{p}_y = (p_{y,1}, p_{y,2}, p_{y,3})^T$ в проекциях на оси Oy , а именно: $\mathbf{p}_y = A(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u})_x + \mathbf{q}_y$, где индекс «x» указывает на то, что вектор $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}$ представлен своими проекциями в трехграннике Ox . Таким образом, по сути, реализуется безгироскопный датчик угловых скоростей, что с учетом возможности качественного дифференцирования вектора \mathbf{p}_y открывает путь для оценки главного момента сил – вектора \mathbf{m}_y , обуславливающего совместно с вектором \mathbf{f} движение реального ДО. Действительно, $m_{y,i} = \delta_{ij}dp_{y,j}/dt + (e_{ikj}p_{y,k})J_{js}p_{y,s}$, где $\mathbf{J} = (J_{js})$ – известный тензор инерции ДО, $i, j, k, s = 1, 2, 3$. Эта процедура занимает важное место при численно-аналитическом планировании управляемого движения ДО по заданной траектории в условиях его взаимодействия с реальной средой как тела, имеющего конкретные масс-геометрические характеристики.

Вычислительные эксперименты

Численная верификация теоретических представлений, изложенных выше, выполнена для ДО с различными масс-геометрическими характеристиками и параметрами движения. В качестве примера здесь приведены результаты численного моделирования для ДО с массой $m = 2100\text{кг}$ и тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(J_{11}, J_{22}, J_{33})$, $J_{11} = J_{33} = 1,03 \cdot 10^3 \text{ кг м}^2$, $J_{22} = 74,57\text{кг м}^2$, движущегося со скоростью $v = 825 \text{ м/с}^2$ ($2,5M$, $M = 330 \text{ м/с}^2$) по траектории, представленной на рис. 1.

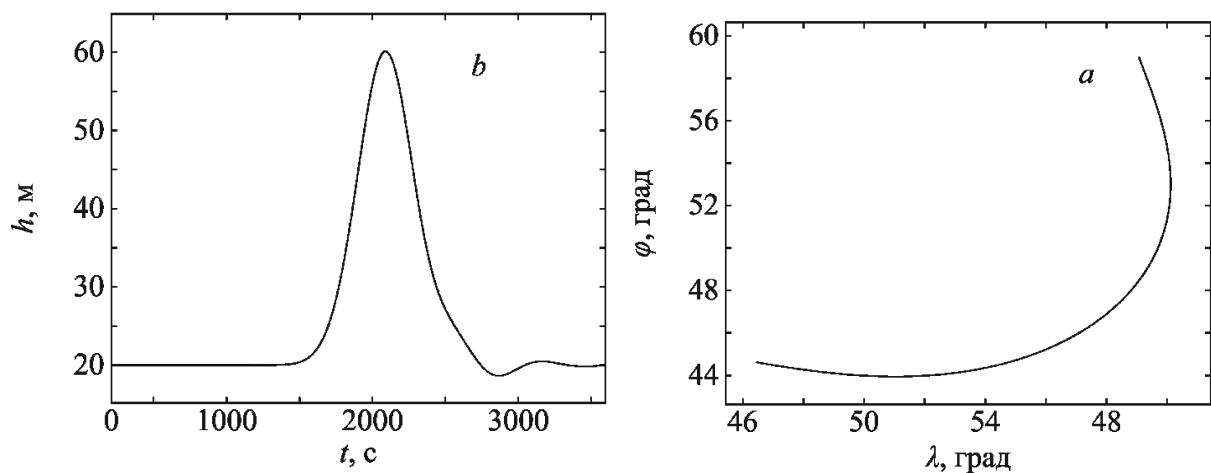


Рис. 1. Элементы траектории движения: высота (а); широта и долгота (б).

Предполагается, что данные позиционирования ГЛОНАСС поступают с шагом $\tau = 1\text{с}$, содержат погрешности со среднеквадратическими значениями (СКЗ) $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = \sigma_h = 1,5\text{м}$ и временами корреляции $\tau_c = 4\text{с}$; СКЗ погрешностей оценивания

$$\sigma_\varphi = 4,9\text{м}, \sigma_\lambda = 4,8\text{м}, \sigma_h = 0,01\text{м}.$$

На рис. 2а представлены оценки удельных сил, выполненные по формулам (3); СКЗ погрешностей оценивания: $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = 0,0038\text{ м/с}^2$, $\sigma_{f_3} = 9,8556 \cdot 10^{-6}\text{ м/с}^2$. На рис. 2б представлены оценки углов α, β, θ ; СКЗ погрешностей оценок

$$\sigma_\alpha = 0,0015^\circ, \sigma_\beta = 0,0212^\circ, \sigma_\theta = 0,0231^\circ.$$

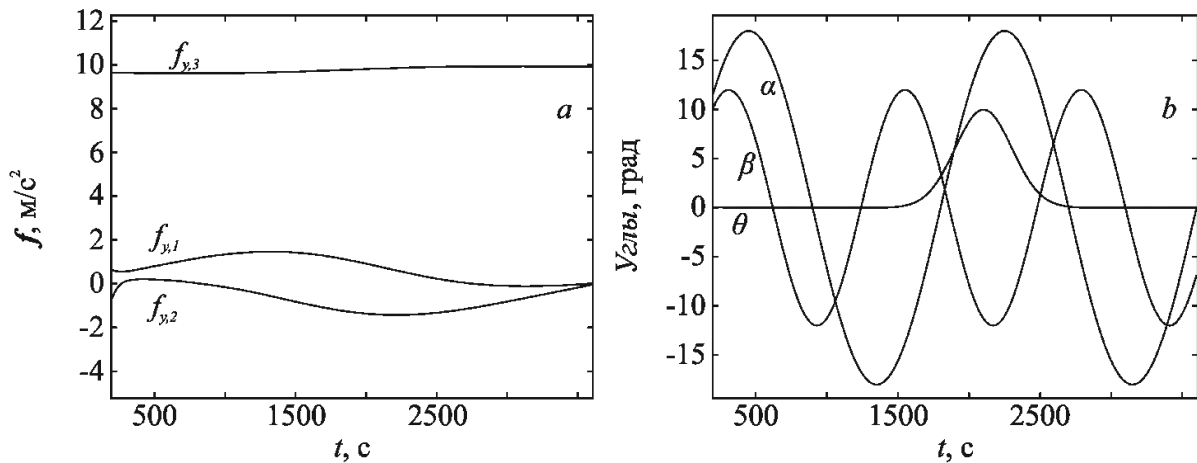


Рис. 2. Оценки удельных сил (а) и углов Эйлера-Крылова (б).

При этом погрешности шумов ньютометров характеризуются СКЗ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0,01\text{м/с}^2$ и временем корреляции $\tau_c = 1,5\text{с}$; место второго приемника НСС в $Oy - y = (0, 4,5\text{м}, 0)^\text{T}$. На рис. 3 представлены моменты сил, обуславливающих вращение ДО; СКЗ погрешностей оценивания

$$\sigma_{m_1} = 0,0123\text{Нм}, \sigma_{m_2} = 1,7012 \cdot 10^{-4}\text{Нм}, \sigma_{m_3} = 0,2007 \cdot 10^{-4}\text{Нм}.$$

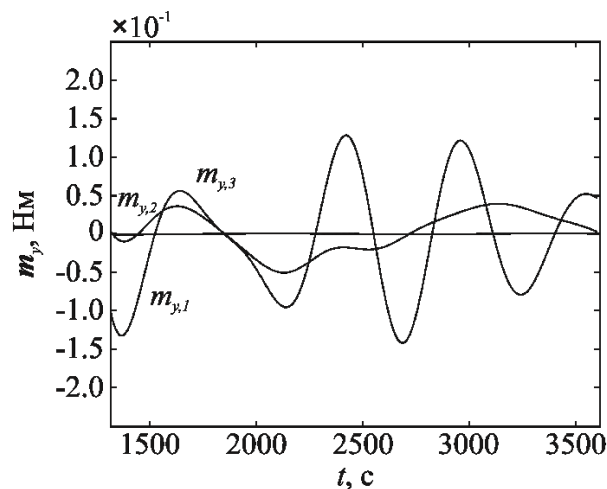


Рис. 3. Оценки моментов сил.

Заключение

В данной работе, опираясь на результаты предыдущей работы авторов [9] показано, что при комплексировании бортовой навигационной системы (двумя датчиками позиционирования ГЛОНАСС и трехкомпонентным блоком ньютонометров) вполне достижима высококачественная оценка всех кинематических параметров движения, а также сил и моментов, его обеспечивающих.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. – М.: Едиториал УРСС. 2018.
2. *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. – М.: Наука. 1967.
3. *Перов А.И., Харисов В.Н.* ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. – М.: Радиотехника. 2010.
4. *Groves P.* Challenges of Integrated Navigation // Proceedings of the 31st International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. Miami. – 2018. – P. 3237-3264.
5. *Mahboub, D. Mohammadi.* A Constrained Total Extended Kalman Filter for Integrated Navigation // The Journal of Navigation. – 2018. – V. 71 (4). – P. 971-988.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.
7. *Осипов Ю.С. Кряжемский А.В.* Задачи динамического обращения // Вестник РАН. – 2006. – Т. 76. – С. 615-624.
8. *Девятисильный А.С.* Нейроморфное расширение бортовых функций ГЛОНАСС для подвижной технологической платформы // Журнал технической физики. – 2015. – Т. 85, вып. 10. – С. 5-8.
9. *Девятисильный А.С., Шурыгин А.В.* Математические модели реконструкции параметров траекторий подвижных объектов для встраиваемых систем ГЛОНАСС // Информатика и системы управления. – 2018. – № 1(55). – С. 42-50.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Абакумовым.

E-mail:

Девятисильный Александр Сергеевич – devyatis@iacp.dvo.ru;

Шурыгин Артем Владимирович – artem.shurygin@bunjlabs.com.