



УДК 532.545

© 2019 г. **И.И. Потапов**, д-р физ.-мат. наук,  
**О.В. Решетникова**, канд. техн. наук  
(Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск)

## РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ\*

В работе для моделирования движения гранулированной среды предложен вариант усеченной гипопластической модели. Для решения задачи выбран метод сглаженных частиц с минимальным параметром сглаживания искомых функций. Выполнен расчет процесса обрушения песчаного столба и проведено сравнение полученных численных результатов моделирования с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** движение гранулированной среды, метод сглаженных частиц (SPH), гипопластическая модель напряженно-деформированного состояния, критерий текучести.

DOI: 10.22250/isu.2019.62.26-34

### Введение

Известные попытки применить хорошо разработанный аппарат механики грунтов и статики сыпучей среды к расчету процессов лавинного движения песчаных материалов не дают положительных результатов [1 – 3] из-за существенных различий процесса устойчивости песчаных материалов и процесса их движения, сопровождающегося потерей грунтом структурной прочности. Возникающие при этом большие сдвиговые деформации определяются напряжениями, существенно превышающими предельное статическое напряженное состояние. При этом существующие модели сплошных сред не учитывают деформационные изменения, связанные с изменением свойств гранулированной среды, – например, из-за структурных изменений песчаного каркаса [4].

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-05-00530 А.

Относительно недавно появился новый класс математических моделей, которые описывают динамическое поведение песков через дискретную модель сыпучего тела [5, 6]. Это позволяет рассматривать сыпучую среду как определенное структурное дискретное образование, меняющееся в процессе деформации с позиции сплошных сред. Было установлено влияние плотности на коэффициенты внешнего и внутреннего трения и сцепление как теоретически, так и экспериментально [4, 6].

В современных теориях предельных напряжений вводится дилатансионная модель сыпучего тела (дилатансия – расширение), которая позволяет учитывать изменение плотности среды при структурных деформациях [4].

Однако дилатансионные модели могут отразить только некоторые свойства структуры сыпучего тела [5], являясь некоторым приближением к дискретным моделям. Объемно-напряженное состояние сыпучего тела при силовом воздействии деформатора требует другого уровня рассмотрения явлений, происходящих внутри сыпучего тела, – это уровень контактного взаимодействия между отдельными частицами среды, который позволит описать качественные изменения, происходящие в структуре тела.

В данной работе исследуются возможности реализации модели движения сыпучей среды методом сглаженных частиц (SPH), особенностью реализации которого является применение аппроксимирующих ядер с малой длиной сглаживания. Выбор малой длины сглаживания преследует следующие цели:

минимизация численных затрат в связи с уменьшением числа частиц, взаимодействующих с расчетной частицей;

упрощение моделирования процесса обрушения частиц, являющегося основным в иницировании движения сыпучего потока.

Исследование SPH реализации проводится на примере решения задачи об обрушении песчаной колонны.

### **Математическая постановка задачи для плоского случая**

Рассмотрим плоское движение гранулированной сыпучей тяжелой среды в процессе обрушения песчаного столба. Расчетная область  $\Omega$  в начальный момент времени с границами  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  представлена на рис.1. Движение сыпучей среды рассматривается в рамках модели плоской деформации и описывается в рамках усеченной гипопластической модели [7] следующими уравнениями:

$$\nabla_{\alpha} (\rho u^{\alpha}) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{d u^\alpha}{d t} = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + q^\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (2)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = -P \delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta}, \quad -2P = \sigma^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность гранулированной среды;  $u^\alpha$  – компоненты вектора скорости среды;  $x^\alpha$  – компоненты радиуса вектора материальной точки;  $\nabla_\alpha = \partial / \partial x^\alpha$  – оператор Гамильтона;  $P$  – давление;  $\sigma^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора напряжений;  $s^{\alpha\beta}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $q^\alpha = (0, -\rho g)$  – компоненты вектора объемных сил;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\delta^{\alpha\beta}$  – единичный тензор.

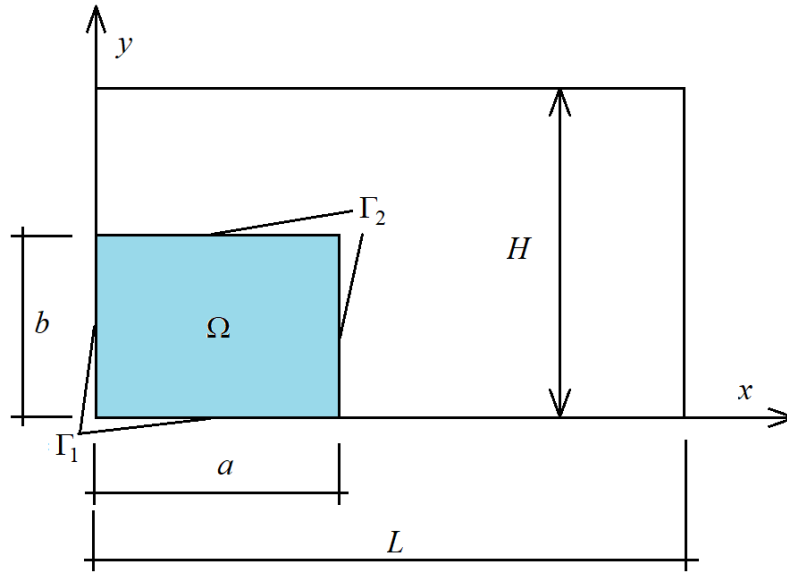


Рис. 1. Схема расчетной области задачи.

Скорость изменения девиатора тензора напряжений  $d s^{\alpha\beta} / d t$  выразим по усеченной гипопластической модели [8]:

$$\frac{d s^{\alpha\beta}}{d t} = s^{\alpha\gamma} \omega^{\beta\gamma} + s^{\gamma\beta} \omega^{\alpha\gamma} - 2c_1 P \varepsilon^{\alpha\beta} - c_2 \frac{\text{tr}(s^{ab} e^{bc}) - P I_1}{2P} s^{\alpha\beta}, \quad (4)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u^\beta + \nabla_\beta u^\alpha), \quad \omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\beta u^\alpha),$$

$$c_1 = \frac{G}{P_{\max} (1 + \nu)}, \quad c_2 = 10c_1,$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta}$ ,  $\omega^{\alpha\beta}$  – тензор скоростей деформаций и вихревой тензор соответственно;  $e^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} - 0.5 I_1 \delta^{\alpha\beta}$  – девиатор тензора скоростей деформаций;  $I_1 = \varepsilon^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}$  – первый инвариант тензора скоростей деформаций;  $c_1$ ,  $c_2$  – константы усеченной гипопластической модели;  $G$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона гранулированной среды.

В работе используется гипотеза [7] о линейной связи между функцией давления  $P$  и плотностью сыпучей среды  $\rho$ :

$$P = \begin{cases} B[\rho/\rho_0 - 1], & \rho > \rho_0, \\ 0 & \rho \leq \rho_0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $B = \rho_0 C_s^2$ ;  $C_s$  – характерная скорость распространения упругой волны в моделируемой среде,  $\rho_0$  – нейтральная плотность сыпучей среды.

В качестве критерия пластического течения сыпучей среды, не испытывающей структурных изменений гранулированного каркаса, принято условие Друкера – Прагера [9]:

$$\sqrt{J_{s2}} + \alpha_\varphi I_{\sigma1} - k_c = 0. \quad (6)$$

Когда эластичный идеально пластичный материал испытывает пластическую деформацию, напряженное состояние всегда должно лежать на поверхности текучести во время пластической нагрузки. Однако ошибки в вычислениях могут привести к напряженному состоянию, которое находится далеко от поверхности текучести. В таких случаях используется процедура релаксации напряжений [10], согласно которой, когда рассчитанное по уравнению (4) напряженное состояние превышает поверхность текучести Друкера – Прагера, компоненты девиатора тензора напряжения  $s^{\alpha\beta}$  нормируются, при этом шаровая часть тензора напряжений (давление) остается неизменной

$$s^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} \begin{cases} \frac{2\alpha_\varphi P + k_c}{\sqrt{J_{s2}^n + \eta}}, & 2\alpha_\varphi P + k_c < \sqrt{J_{s2} + \eta}, \\ 1, & 2\alpha_\varphi P + k_c \geq \sqrt{J_{s2} + \eta}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $I_{\sigma1} = \sigma^{xx} + \sigma^{yy} = -2P$  – первый инвариант тензора напряжений;  $J_{s2} = 0.5 s^{\alpha\beta} s^{\alpha\beta}$  – второй инвариант от девиатора тензора напряжений;  $\alpha_\varphi$  и  $k_c$  – константы Друкера – Прагера, связанные с параметрами сыпучего материала, величиной когезии  $c$  и углом внутреннего трения  $\varphi$ ;

$$\alpha_\varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad k_c = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}. \quad (8)$$

Уравнения (1) – (8) замыкаются начальными условиями и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u^\alpha(\vec{x}, 0) &= 0, \quad \sigma^{\alpha\beta}(\vec{x}, 0) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega; \\ u^\alpha(\vec{x}, t) &= 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_1; \\ \sigma^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) n^\beta &= 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$\vec{n} = n^\beta$  – нормаль к свободной поверхности сыпучего материала,  $\vec{x} = x^\beta$ .

## Дискретизация задачи методом SPH

Выполним дискретизацию задачи (1) – (9) методом SPH [7]. Будем считать, что сыпучий материал определяется совокупностью  $N$  частиц. Для аппроксимации плотности  $\rho_i$ , скорости  $u_i^\alpha$ , напряжений  $\sigma_i^{\alpha\beta}$  в каждой  $i$ -й частице были использованы следующие SPH зависимости [7]:

$$A_i = \sum_j A_j W_{ij} S_j, \quad \nabla_\alpha A_i = \sum_j (A_j - A_i) S_j \nabla_\alpha W_{ij}, \quad (10)$$

где  $A_i$  – аппроксимируемая функция;  $W_{ij} = W(r_{ij})$  – функция ядра;  $S_j = \frac{m_j}{R_0 \rho_j}$  –

площадь частицы;  $\nabla_\alpha W_{ij} = \frac{dW(r_{ij})}{dr} \frac{x_i^\alpha - x_j^\alpha}{|x_i^\alpha - x_j^\alpha|}$ ;  $m_j$  – постоянная масса частицы;

$R_0$  – ширина слоя гранулированной среды.

В качестве ядер в расчетах использовались:

ядро Q-Spline для аппроксимации плотности [11]

$$W_{poly6} = \frac{4}{\pi h^2} \begin{cases} \left(1 - (r/h)^2\right)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & r > h; \end{cases} \quad (11)$$

ядро для аппроксимации напряжений и давления [12]

$$W_{Spiky} = \frac{10}{\pi h^2} \begin{cases} (1 - r/h)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & r > h, \end{cases} \quad (12)$$

где  $h$  – длина сглаживания ядра;  $r = r_{ij} = |x_i^\alpha - x_j^\alpha|$  – расстояние между частицами. С учетом (10) – (12) дискретный вид задачи (1) – (9) примет вид:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{R_0} W_{ij}, \quad S_j = \frac{m_j}{R_0 \rho_j}, \quad (13)$$

$$P_i = \begin{cases} B[\rho_i / \rho_0 - 1], & \rho_i > \rho_0, \\ 0 & \rho_i \leq \rho_0, \end{cases}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial s_i^{\alpha\beta}}{\partial t} = s_i^{\alpha\gamma} \omega_i^{\beta\gamma} + s_i^{\gamma\beta} \omega_i^{\alpha\gamma} - 2c_1 P_i e^{\alpha\beta} - c_2 \frac{\text{tr}(s_i^{ab} e_i^{bc}) - P_i I_{i1}}{2P_i} s_i^{\alpha\beta} \quad (15)$$

$$\frac{d u_i^\alpha}{d t} = \sum_{j=1}^N S_j \left( \frac{s_i^{\alpha\beta} + s_j^{\alpha\beta}}{\rho_i} + C_{ij} \delta^{\alpha\beta} \right) \nabla_\beta W_{ij} - \sum_{j=1}^N S_j \frac{P_i + P_j}{\rho_i} \nabla_\alpha W_{ij} + g_i^\alpha \quad (16)$$

$$\frac{d x_i^\alpha}{d t} = u_i^\alpha, \quad (17)$$

$$g_i^\alpha = (0, -g); \quad \varepsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N (u_j^\alpha - u_i^\alpha) S_j \nabla_\beta W_{ij} + \sum_{j=1}^N (u_j^\beta - u_i^\beta) S_j \nabla_\alpha W_{ij} \right); \quad (18)$$

$$\omega_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N (u_j^\alpha - u_i^\alpha) S_j \nabla_\beta W_{ij} - \sum_{j=1}^N (u_j^\beta - u_i^\beta) S_j \nabla_\alpha W_{ij} \right); \quad (19)$$

$$C_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha_\mu h c_s}{0.5(\rho_i + \rho_j) |x_i^\alpha - x_j^\alpha|^2 + \varepsilon_{err} h^2} (u_i^\alpha - u_j^\alpha) \cdot (x_i^\alpha - x_j^\alpha), & (u_i^\alpha - u_j^\alpha) \cdot (x_i^\alpha - x_j^\alpha) < 0, \\ 0 & (u_i^\alpha - u_j^\alpha) \cdot (x_i^\alpha - x_j^\alpha) > 0, \end{cases} \quad (20)$$

$\alpha_\mu = 0.01, \quad \varepsilon_{err} = 0.01.$

Здесь  $C_{ij}$  – искусственная диссипация [13].

### Интегрирование уравнений движения

Для решения задачи (16) – (20), была выбрана схема Верле с учетом скоростей [13]. В данной схеме переменные поля (искомые поля) обновляются с использованием следующих уравнений:

предиктор

$$(x_i^\alpha)^{n+\frac{1}{2}} = (x_i^\alpha)^n + \frac{\Delta t}{2} (u_i^\alpha)^n, \quad (\rho_i)^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^N m_j (W_{ij})^{n+\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$(P_i)^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} B \left[ (\rho_i)^{n+\frac{1}{2}} / \rho_0 - 1 \right], & (\rho_i)^{n+\frac{1}{2}} > \rho_0, \\ 0 & (\rho_i)^{n+\frac{1}{2}} \leq \rho_0, \end{cases} \quad (22)$$

$$(s_i^{\alpha\beta})^{n+\frac{1}{2}} = (s_i^{\alpha\beta})^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \left( \frac{ds_i^{\alpha\beta}}{dt} \right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

$$\left( \frac{du_i^\alpha}{dt} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \left( \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N S_j \left( \frac{s_i^{\alpha\beta} + s_j^{\alpha\beta}}{\rho_i} + C_{ij} \delta^{\alpha\beta} \right) \nabla_\beta W_{ij} - \\ - \sum_{j=1}^N S_j \frac{P_i + P_j}{\rho_i} \nabla_\alpha W_{ij} + g_i^\alpha \end{array} \right)^{n+\frac{1}{2}}; \quad (24)$$

корректор

$$(u_i^\alpha)^{n+1} = (u_i^\alpha)^n + \Delta t \left( \frac{du_i^\alpha}{dt} \right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad (x_i^\alpha)^{n+1} = (x_i^\alpha)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} (u_i^\alpha)^n. \quad (25)$$

Для поддержки согласованности вычислений на каждом временном шаге, после расчета тензора напряжения  $s_i^{\alpha\beta}$ , выполняется контроль нарушения критерия текучести, при необходимости проводится коррекция (12) – (16). Устойчивость схемы интегрирования НЧ определяется так называемым условием Куранта – Фридрихса – Леви, которое допускает шаг по времени, пропорциональный длине сглаживания.

В этой работе для определения размера временного шага используется следующее условие Куранта – Фридрихса – Леви:

$$\Delta t = C_u h / c_s,$$

где  $c_s$  – скорость звука;  $h$  – длина сглаживания;  $C_u = 0.2$  – коэффициент Куранта.

### Численные исследования

Верификации модели движения гранулированной сыпучей среды, описываемой уравнениями (1) – (9), в SPH реализации проводилась на модельной задаче об обрушении гранулированной колонны (рис 1.). Процесс обрушения гранулированной колонны в настоящее время достаточно хорошо описан экспериментально, что позволяет исследовать особенности реализации задачи.

В расчетах принимались следующие физико-механические и геометрические параметры:  $\rho_s = 2600 \text{ кг/м}^3$  – сухая плотность кварца;  $\rho_0 = (1 - \varepsilon)\rho_s$  – нейтральная плотность песка;  $\varepsilon = 0.39$  – пористость песка;  $\varphi = 30^\circ$  – угол внутреннего трения;  $C_s = 60 \text{ м/с}$  – «характерная» скорость распространения упругой волны в моделируемой среде;  $d = 0.78 \text{ мм}$  – диаметр частиц;  $a = 0.1 \text{ м}$ ,  $b = 0.05 \text{ м}$  – размеры песчаного столба;  $c_1 = 25$ ,  $c_2 = 250$  – константы модели.

Результаты расчетов по обрушению песчаной колонны приведены на рис. 2(а – в). Для удобства сравнительного анализа с экспериментальными данными [14] использовано безразмерное время обрушения  $t_b = t / \sqrt{b/g}$ .

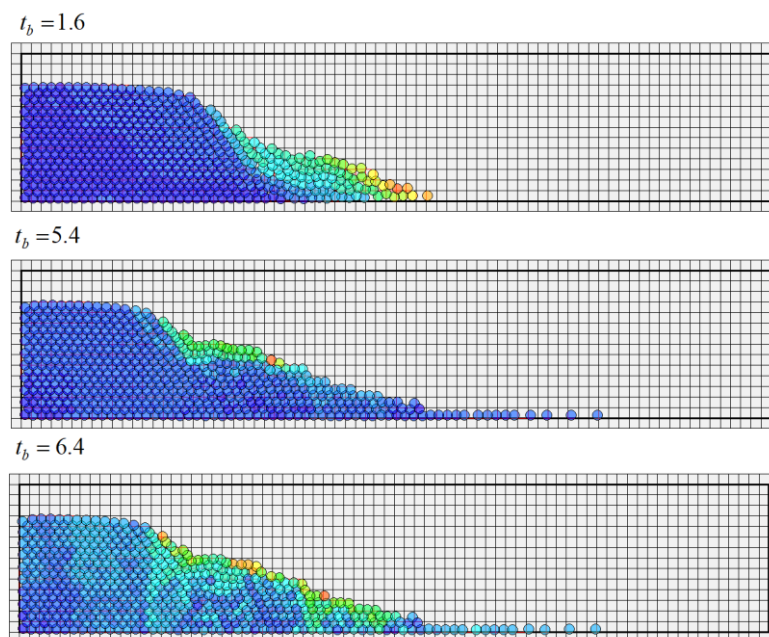


Рис. 2. Обрушение песчаной колонны в различные моменты времени.

Из результатов, представленных на рис. 2, видно, что полученная расчетная форма разрушающейся песчаной колонны качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными [14].

Контроль осыпания колонны, показанный на рис. 3 (где 1 – уменьшение потенциальной энергии системы  $E_p$ ; 2 – изменение кинетической энергии системы  $10 E_k$ , а точечными множествами отмечены экспериментальные данные для  $E_p$  и  $10 E_k$ , приведенные в работе [14]), проводился по эволюции кинетической и потенциальной энергии системы:

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i u_i^2(t_b)}{\sum_{i=1}^n m_i g y_i(0)}, \quad E_p = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g y_i(t_b)}{\sum_{i=1}^n m_i g y_i(0)}.$$

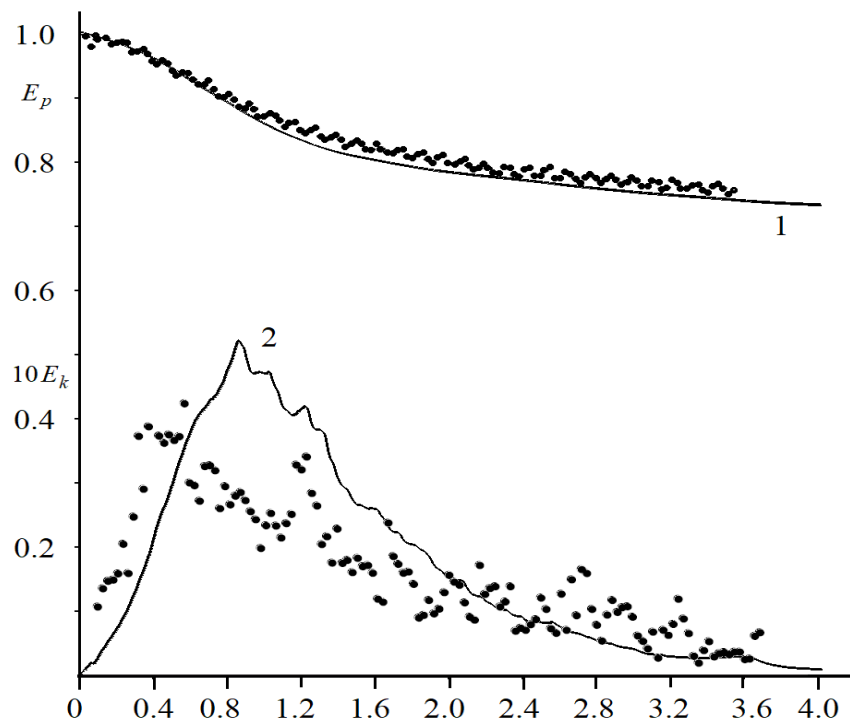


Рис. 3. Изменение энергии системы в процессе осыпания песчаного столба.

Из сравнительного анализа по эволюции и по критериям  $x_b$ ,  $E_k$ ,  $E_p$  видно, что полученное решение согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, можно отметить, что упрощенная гипопластическая модель сыпучего материала позволяет выполнить адекватное моделирование обрушения песчаной колонны.

Важно отметить, что все расчеты проводились с малым параметром сглаживания  $h = 1.215d$ , мотивацией для такого выбора послужила необходимость в обеспечении минимальной связности между гранулярными частицами, с одной стороны, и увеличении производительности метода, с другой стороны. Необходимо отметить, что, несмотря на достаточно хорошие макрохарактеристики, полученные в работе, такой подход требует дальнейшего



изучения, – в частности в проведении сравнения напряженно-деформируемого состояния системы с экспериментальными значениями напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеленин А.Н.* Физические основы теории резания грунтов. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. *Зенков Р.Л.* Механика насыпных грузов. – М.: Машиностроение, 1964.
3. *Ветров Ю.А.* Резание грунтов землеройно-транспортными машинами. – М.: Машиностроение, 1971.
4. *Николаевский В.Н., Сырников И.Н.* О плоском предельном течении сыпучей дилатирующей среды // Механика твердого тела. – М.: АН СССР, 1970. – С. 159-166.
5. *Слюсарев А.С.* Разработка основ расчета и конструирования рабочих органов подъемно-транспортных машин, подвергающих сыпучий материал объемному сжатию: Дис. ... д-ра техн. наук. – Нижний Новгород, 1991.
6. *Клейн Г.К.* Строительная механика сыпучих тел. – М.: Стройиздат, 1977.
7. *Monaghan J.J.* Simulating Free Surface Flows with SPH // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 110. – P. 399-406.
8. *Wu W., Bauer E.* A simple hypoplastic constitutive model for sand // International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics. – 1994. – Vol. 18. – P. 833-862.
9. *Drucker D.C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Quarterly of Applied Mathematics – 1952. – Vol. 10, № 2, – P. 157-165.
10. *Ha H. Bui, Ryoichi Fukagawa, Kazunari Sako, Shintaro Ohno.* Lagrangian meshfree particles method (SPH) for large deformation and failure flows of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2008. – V. 32. – P. 1537-1570.
11. *Hongbin J., Xin D.* On criteria for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field // Journal of Computational Physics. – 2005. – Vol. 202. – P. 699-709.
12. *Müller M., Charypar D., Gross M.* Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications // Proceedings of 2003 ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation. – 2003. – P. 154-159.
13. *Monaghan J.J.* Smoothed particles hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68. – P. 1703-1759.
14. *De Vet S.J., Bereket Y., Hill K.M., De Bruyn J.R.* Collapse of a rectangular well in a quasi-two-dimensional granular bed // Physical Review. – 2010. E. 82. – P. 041304-1–041304-13.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.И. Смагиным.*

*E-mail:*

*Потапов Игорь Иванович – potapov2i@gmail.com;*

*Решетникова Ольга Владимировна – ov13r@yandex.ru.*