УДК 65.012.122

© 2019 г. **О.В. Абрамов**[1], д-р техн. наук,
Г.Ш. Цициашвили[2], д-р физ.-мат. наук
([1]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток,
[2]Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗА*

Статья посвящена некоторым путям решения проблемы снижения техногенных рисков, источником которых являются постепенные отказы. Рассматривается задача индивидуального прогнозирования момента отказа технической системы по измерениям запаса работоспособности в отдельные моменты времени с ошибкой, заданной в виде интервала возможных значений. Показаны возможность и целесообразность использования при решении задачи прогноза дискретного преобразования Фурье.

Ключевые слова: техногенный риск, надежность, параметр, прогноз, случайный процесс, запас работоспособности, преобразование Фурье, техническая система.

DOI: 10.22250/isu.2019.62.85-91

Введение

В соответствии с методологией функционально-параметрического направления теории техногенных рисков процесс функционирования системы и ее техническое состояние в любой момент времени определяются конечным набором некоторых переменных – параметров системы, а все отказы (рисковые события) есть следствие эксплуатационных отклонений параметров от их некоторых исходных (номинальных, расчетных) значений [1, 2]. Формой проявления рискового события является выход параметров состояния технической системы за пределы области допустимых значений (области

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ДВО РАН программы «Приоритетные научные исследования в интересах комплексного развития Дальневосточного отделения РАН» (проект № 18-5-044).

работоспособности).

Важным элементом этой методологии является прогнозирование изменений параметров технического состояния системы, осуществляемое по результатам контроля. При этом контролируемыми могут быть внутренние параметры (параметры элементов системы) или выходные параметры (параметры состояния, показатели качества).

В работах [3, 4] решалась задача прогнозирования момента отказа технической системы по результатам оценки запаса ее работоспособности в заранее заданные моменты времени. Предполагалось, что эксплуатационные изменения запаса работоспособности достаточно точно описываются линией регрессии, построенной с учетом ошибок измерений, имеющих нормальное распределение с нулевым средним и небольшой дисперсией. Вместе с тем нередко стохастические закономерности ошибок измерения и других помех, которые необходимо учитывать в процессе прогноза, бывают неизвестны. Могут быть заданы лишь интервалы их возможных значений. Кроме того, часто особенностью прогнозирования работоспособности технических систем ответственного назначения является тот факт, что необходимо прогнозировать значения достаточно большого числа признаков, характеризующих запас работоспособности различных составляющих системы. Возникает задача ускорения вычислений, необходимых для прогноза большого числа признаков системы на фоне линейных трендов. В этих условиях при решении задачи прогноза оправданным может стать использование дискретного преобразования Фурье [5].

Прогнозирование технического состояния и преобразование Фурье

Пусть $Y(t)$ – случайный процесс изменения некоторого параметра состояния технического объекта, – например, запаса работоспособности, прочности или остаточного ресурса. В процессе эксплуатации исследуемого объекта имеется возможность контролировать его техническое состояние (измерять, оценивать запас работоспособности).

Предположим, что запас работоспособности $y(0), \ldots, y(N)$ в моменты времени kT, $k = 0, \ldots, N$ измеряется с заданной погрешностью (ошибкой измерения), не превышающей величины δ, и результаты измерений равны $Y(0), \ldots Y(N)$. Отсюда следует, что результаты контроля и истинные (точные) значения параметра технического состояния связаны следующим образом:

$$\left|\Delta Y(k)\right| \le \delta ,$$

где $\Delta Y(k) = y(k) - Y(k)$, $k = 0, \ldots, N$.

Чтобы нивелировать влияние ошибки определения линейного тренда на коэффициенты Фурье, имеет смысл перейти от последовательных значений запаса работоспособности к последовательным разностям значений этого параметра технического состояния. Определим последовательные разности истинных значений и результатов измерений

$$a(0) = y(1) - y(0), \ldots, a(N-1) = y(N) - y(N-1),$$

$$A(0) = Y(1) - Y(0), \ldots, A(N-1) = Y(N) - Y(N-1),$$

удовлетворяющие неравенствам

$$|\Delta A(k)| \le 2\delta, \; \Delta A(k) = a(k) - A(k), \; k = 0, \ldots, N-1.$$

Задачей является оценка запаса работоспособности в упрежденный момент времени $(N+1)T$ с использованием прогноза $A(N)$:

$$Y(N+1) = Y(N) + A(N). \qquad (1)$$

<u>Прогнозирование *A*(*N*).</u>

Разложим последовательность чисел $A(0)$, $A(1)$, …, $A(N-1)$ в дискретный ряд Фурье:

$$A(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-jk}, \;\; j = 0, \ldots, N-1, \; W = \exp(2\pi i / N), \qquad (2)$$

где i – мнимая единица; $X(k)$ – коэффициенты Фурье, $k = 0, \ldots, N-1$, вида

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} A(j) W^{jk}, \; k = 0, \ldots, N-1. \qquad (3)$$

Функцию $A(j)$ можно продолжить в точку N следующим образом:

$$A(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-Nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \qquad (4)$$

и построить прогноз $Y(N+1)$, используя соотношение (1).

<u>Оценка погрешности прогноза *A*(*N*).</u>

Пусть $x(k)$ – коэффициенты Фурье функции $a(j)$, $j = 0, \ldots, N-1$, $a(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{-jk}$.

Обозначим $\Delta X(k) = x(k) - X(k)$, где $\Delta X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta A(j) W^{jk}$, $\Delta A(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Delta X(k) W^{-jk}$. Тогда вследствие соотношения (4), неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля

$$|\Delta A(N)| \le \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta X(k)| \le \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta A(k)|^2} \le 2\delta. \qquad (5)$$

Из формул (1), (5) следует, что

$$|\Delta Y(N+1)| \le 3\delta. \qquad (6)$$

Пусть y^* – критическое (предельно допустимое) значение запаса работоспособности y. Учитывая, что в процессе эксплуатации запас работоспособности монотонно убывает, определим вероятность P выполнения неравенства $y(N+1) \geq y^*$, означающего, что запас работоспособности к моменту следующего контроля состояния исследуемого технического объекта $(N+1)T$ будет не ниже критического значения y^*.

Если окажется, что

$$Y\ (N+1) - 3\delta \geq y^*,$$

то гарантированно (с вероятностью P = 1) в момент следующего контроля исследуемый технический объект будет находиться в работоспособном состоянии.

При $Y\ (N+1) + 3\delta \leq y^*$ вероятность выполнения условия работоспособности в момент времени $(N+1)T$ будет равна нулю (P = 0).

Если $Y\ (N+1) - 3\delta \leq y^* \leq Y\ (N+1) + 3\delta$, то при равномерном законе распределении ошибки контроля

$$P = \frac{Y(N+1) + 3\delta - y^*}{6\delta}.$$

Использование быстрого преобразования Фурье

Для вычисления коэффициентов Фурье по формуле (3) требуется N^2 операций. Здесь под операцией понимается умножение, за которым следует сложение. Чтобы ускорить вычисление коэффициентов Фурье, можно воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье [5, 6].

Пусть $N = r_1, r_2$, где $r_1 > 1$, $r_2 > 1$ – натуральные числа. Тогда индексы в сумме формулы (3) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &j = j_1 r_1 + j_0,\ j_0 = 0,1,\ldots,r_1 - 1,\ j_1 = 0,1,\ldots,r_2 - 1, \\ &k = k_1 r_2 + k_0,\ k_0 = 0,1,\ldots,r_2 - 1,\ k_1 = 0,1,\ldots,r_1 - 1. \end{aligned} \qquad (7)$$

Вводя условные обозначения $j = (j_1, j_0)$, $k = (k_1, k_0)$, перепишем формулу (3) в виде

$$\begin{aligned} X(j_1, j_0) &= \sum_{k_0=0}^{r_2-1} \sum_{k_1=0}^{r_1-1} A(k_1, k_0) W^{jk_1 r_2} W^{jk_0} = \\ &= \sum_{k_0=0}^{r_2-1} W^{jk_0} \sum_{k_1=0}^{r_1-1} A(k_1, k_0)\ W^{jk_1 r_2} \end{aligned} \qquad (8)$$

Так как $W^{jk_1 r_2} = W^{j_0 k_1 r_2}$, то

$$\sum_{k_1=0}^{r_1-1} A(k_1,k_0)\ W^{jk_1r_2} = \sum_{k_1=0}^{r_1-1} A(k_1,k_0)\ W^{j_0k_1r_2} = A_1(j_0,k_0), \qquad (9)$$

и значит формула (8) может быть представлена в виде

$$X(j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^{r_2-1} W^{(j_1 r_1 + j_0)k_0}\ A_1(j_0,k_0). \qquad (10)$$

Следовательно, для вычисления $A_1(j_0,k_0)$ требуется $r_1 \cdot r_1 r_2 = N r_1$ операций, а для вычисления $X(j_1,j_0)$ по уже найденным $A_1(j_0,k_0)$ требуется $r_2 \cdot r_1 r_2 = N r_2$ операций. Поэтому для реализации алгоритма, определяемого формулами (9), (10), необходимо общее число операций $N(r_1 + r_2)$.

Если же $N = r_1 r_2 \ldots r_m$, то тогда, реализуя данный алгоритм за m шагов, получаем, что общее число операций $N(r_1+r_2+\ldots+r_m)$. Отсюда следует, что при $N = r^m$ общее число операций для реализации данного алгоритма равно $r N m = r N \log_r N$.

Более детальное описание алгоритма быстрого преобразования Фурье при $N = 2^m$ содержится, например, в работах [7, 8].

Замечание. Используя быстрое преобразование Фурье, можно построить алгоритм прогнозирования запасов работоспособности отдельных элементов системы. В свою очередь работоспособность всей системы может определяться условием, чтобы запас работоспособности каждого элемента был не меньше своего критического значения. Тогда задача прогнозирования работоспособности всей системы решается по результатам прогноза запасов работоспособности ее элементов.

Оценка вероятности нахождения в работоспособном состоянии системы с несколькими элементами

Предположим, что система состоит из m элементов, функционирование которых можно считать независимым. Обозначим P_i вероятности нахождения их в работоспособном состоянии на конец прогнозируемого периода, i = 1, ..., m. Тогда очевидно, что вероятность нахождения в работоспособном состоянии всей системы

$$P = \prod_{i=1}^{m} P_i .$$

Задавая критическое (требуемое) значение для этой вероятности $P_{кр}$, можно предложить определенную процедуру прогноза ее работоспособности на конец прогнозируемого периода. Если $P \geq P_{кр}$, то система будет находиться в работоспособном состоянии в течение всего прогнозируемого периода эксплуатации.

Такая постановка вопроса тесно связана с классическими результатами Барлоу и Прошана [9] по вероятности раздельного резервирования элементов системы. При одинаковых объемах резерва вероятность безотказной работы в условиях раздельного резервирования элементов больше этой вероятности в условиях резервирования всей системы.

Исследуемый в работе запас работоспособности отдельного элемента системы можно интерпретировать как его резерв. Пусть имеется система с m элементами, имеющими вероятности нахождения в работоспособном состоянии $p_1, \ldots, p_m$, и при некоторых $0 < q < 1$ выполняются неравенства $1 - q < p_i, \ldots, p_m$. Предположим, что каждый элемент системы k-кратно резервируется, тогда вероятность безотказной работы всей системы

$$P^{(k)} = \prod_{i=1}^{m} (1 - (1 - p_i)^k) \ge (1 - q^k)^m \ge 1 - mq^k .$$

Следовательно, минимальный резерв $k(m) = \inf\,(k : P^{(k)} \ge 1 - \varepsilon)$, при котором вероятность безотказной работы превосходит $1 - \varepsilon$, удовлетворяет неравенству

$$k(m) \le \frac{|\ln(\varepsilon/m)|}{|\ln q|} + 1$$

и растет по m достаточно медленно, как логарифм m.

Сказанное выше относится к ситуации, когда удается задать независимые условия работоспособности для отдельных элементов системы.

Однако возможна ситуация, когда условия работоспособности заданы лишь на уровне выходных параметров системы. В этом случае необходимо определить множество тех значений запасов работоспособности элементов, при которых система работоспособна (область работоспособности) [10, 11]. Задача построения многомерной области работоспособности относится к классу задач высокой вычислительной сложности и может быть решена на основе технологии параллельных (распределенных) вычислений [12, 13].

Заключение

В статье рассмотрена одна из возможных постановок задачи прогнозирования отказов (рисковых событий) контролируемых технических систем ответственного назначения, возникающей в рамках функционально-параметрического направления теории рисков. В качестве параметра технического состояния рассматривается запас работоспособности, который контролируется (оценивается) в назначенные моменты времени эксплуатации с ошибкой, заданной в виде интервала ее возможных значений. Показаны возможность и целесообразность использования при решении задачи прогноза дискретного преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В.* Об оценке вероятности наступления рискового события: функционально-параметрический подход // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 1. – С. 24-31.
2. *Абрамов О.В.* О функционально-параметрическом направлении теории рисков // Труды международного симпозиума «Надежность и качество 2015». – Пенза: ПГУ, 2015. – Т.I. – С. 5-6.
3. *Абрамов О.В*., Цициашвили Г.Ш. Оценка риска потери работоспособности технического объекта с учетом мониторинга параметров состояния // Труды международного симпозиума «Надежность и качество 2018». – Пенза: ПГУ, 2018. – Т.I. – С. 148-149.
4. *Абрамов О.В., Цициашвили Г.Ш.* Прогнозирование момента отказа контролируемой технической системы // Информатика и системы управления. – 2018. – №3. – С. 42-49.
5. *Cooley J.W., Tukey J.W.* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series // Mathematics of Computation. – 1965. – Vol. 19, No. 90. – P. 297-301.
6. *Heideman M., Johnson D.,* Burrus C. Gauss and the history of the fast fourier transform // IEEE ASSP Magazine. – 1984. – Vol. 1, Issue 4. – P. 14-21.
7. *Офман Ю.П., Карацуба А.А.* Умножение многозначных чисел на автоматах // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 145. – С. 293-294.
8. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006.
9. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. – М.: Советское радио, 1969.
10. *Abramov O.V., Nazarov D.A.* Application of Regions of Acceptability for Sensitivity Analysis // Proceedings of the Ninth International Conference on Mathematical Methods in Reliability: Theory, Methods and Applications (MMR 2015). June 1-4. Tokyo. Japan. – 2015. – P. 662-668.
11. *Abramov O.V., Nazarov D.A.* Condition-based maintenance by minimax criteria // Applied Mathematics in Engineering and Reliability: Proceedings of the 1st International Conference on Applied Mathematics in Engineering and Reliability. – 2016. – P. 91-94.
12. *Абрамов О.В., Назаров Д.А.* Программно-алгоритмический комплекс построения, анализа и использования областей работоспособности // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2015. – № 2. – С. 3-13.
13. *Abramov O.V., Nazarov D.A.* A Software System for Acceptability Region Construction and Analysis // 3rd Russian-Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC), Vladivistok, Russia, IEEE. – 2018. – P. 1-6.

E-mail:

Абрамов Олег Васильевич – abramov@iacp.dvo.ru;
Цициашвили Гурам Шалвович – guram@iam.dvo.ru.