



УДК 519.6

© 2020 г. **В.А. Рукавишников**, д-р физ.-мат. наук,

А.О. Мосолапов

(Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск)

ВЕСОВОЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕЩИНОЙ*

Для системы Ламе в плоской области с трещиной введено понятие R_ν -обобщенного решения в специальном весовом множестве и построен весовой метод конечных элементов (МКЭ). Численный анализ модельной задачи показал преимущества предложенного метода перед классическим МКЭ.

Ключевые слова: задача теории упругости с трещиной, весовой МКЭ, R_ν -обобщенное решение.

DOI: 10.22250/isu.2020.63.38-49

Введение

Трещины являются распространенной проблемой при проектировании и эксплуатации различных материалов, деталей и строительных конструкций. Появление и рост трещин приводят к поломкам оборудования, авариям на производстве, обрушению зданий и сооружений.

Математической основой для моделирования статичных трещин, как правило, выступает система уравнений Ламе, рассмотренная в двумерной области с входящим углом величины 2π . Наличие такого угла приводит к сингулярности решения, оно выражается в том, что при заданных на границе области краевых условиях Дирихле обобщенное решение принадлежит только пространству $W_2^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, где ε – произвольное положительное вещественное число, при этом классический метод конечных элементов сходится

* Работа выполнена по тематике проекта РНФ № 20-11-19993.

со скоростью $O(h^{1/2})$, что не обеспечивает необходимой точности приближенного решения.

К настоящему времени на основе проведенных теоретических исследований дифференциальных свойств решения рассматриваемой задачи (см. [1, 2]) созданы различные специализированные численные методы. Первую группу составляют сглаженные МКЭ (Smoothed FEM), основанные на ультраслабой вариационной постановке и использующие специальную методику модификации поля деформаций [3]. Разрывная схема Петрова-Галеркина (DPG FEM) предполагает одновременную аппроксимацию перемещений и напряжений [4]. Расширенный метод конечных элементов (XFEM) основан на добавлении в базис конечноэлементного пространства сингулярных функций, аппроксимирующих поведение решения вблизи вершины трещины [5]. Также можно отметить бессеточные методы (meshless/meshfree methods) и метод граничных элементов (BEM) [6, 7].

Используемые в этих методах приемы позволяют повысить точность и увеличить скорость сходимости по сравнению с классическим МКЭ. Характерными недостатками перечисленных методов является их высокая алгоритмическая и вычислительная сложность, а также необходимость применять конечноэлементные сетки со сгущением узлов к точке сингулярности.

Для краевых задач с сингулярностью, вызванной различными причинами, в работах [8 – 10] предлагается определять решение как R_ν -обобщенное в специальных весовых пространствах или множествах. На основе определения R_ν -обобщенного решения и результатов теоретических исследований его свойств [11 – 15] построены и проанализированы новые эффективные численные методы приближенного решения краевых задач для эллиптических уравнений [16-21], задач электродинамики [22, 23], гидродинамики [24, 25] и теории упругости [26, 27].

В настоящей работе рассматривается краевая задача Дирихле для системы уравнений Ламе в двумерной области с трещиной, то есть в невыпуклой области с входящим углом величиной 2π . Для рассматриваемой задачи мы определяем решение как R_ν -обобщенное в специальном весовом множестве. Для его приближенного нахождения построен весовой МКЭ. Численный анализ модельной задачи показал, что построенный метод обеспечивает сходимость приближенного R_ν -обобщенного решения к точному со скоростью $O(h)$ в весовой энергетической норме, что вдвое по порядку степени h превосходит скорость сходимости классического МКЭ. При этом абсолютная погрешность приближенного R_ν -обобщенного решения, найденная в уз-

лах конечноэлементной сетки, в подавляющем большинстве узлов на 1-2 порядка меньше по сравнению с приближенным обобщенным решением.

Основные обозначения

Пусть $\bar{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1]$ – двумерная область с трещиной $[0,1] \times \{0\}$, с вершиной, находящейся в начале координат $(0,0)$ и берегами Γ^+ , Γ^- . Пусть $\partial\Omega$ – граница области. Наряду с декартовой, введем полярную систему координат с полюсом в точке $(0,0)$ и полярной осью, направленной вдоль положительного направления оси Ox (рис. 1.).

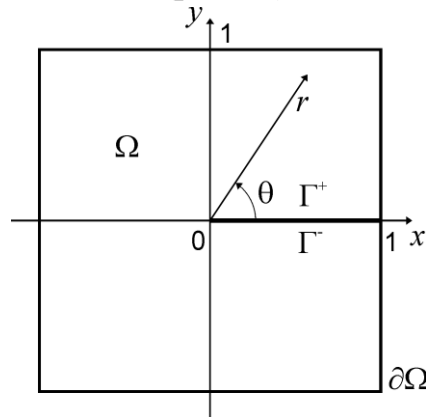


Рис. 1. Область Ω с трещиной.

Пусть $\Omega' = \{x \in \bar{\Omega} : (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq \delta < 1\}$ – δ -окрестность точки $(0,0)$. Обозначим через $\rho(x)$ весовую функцию, которая совпадает с расстоянием до точки сингулярности в Ω' и равна δ вне нее. Определим весовое множество $W_{2,\alpha}^l(\Omega, \delta)$ ($l=1,2$) функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|D^\lambda u(x)| \leq c_1 (\delta / \rho(x))^{\alpha + |\lambda|}$ для $x \in \Omega'$, c_1 – некоторая положительная константа, не зависящая от λ ;

б) $\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega \setminus \Omega')} \geq c_2 > 0$, с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\alpha}^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\lambda| \leq l} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha} |D^\lambda u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $D^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$; $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$; λ_1, λ_2 – неотрицательные целые числа; α – неотрицательное действительное число. Весовое множество $W_{2,\alpha}^l(\Omega, \delta) \subset W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ определим как замыкание по норме (1) множества $C_0(\Omega, \delta)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций, удовлетворяющих условиям а) и б).

Через $L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ обозначим весовое множество функций, удовлетворяющих условиям а) и б) при $l=0$, с нормой $\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \rho^{2\alpha} u^2 dx \right)^{1/2}$.

Будем говорить, что $\phi \in W_{2,\alpha}^{1/2}(\partial\Omega, \delta)$, если найдется такая функция $\Phi \in W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$, что $\Phi(x)|_{\partial\Omega} = \phi(x)$ и $\|\phi\|_{W_{2,\alpha}^{1/2}(\partial\Omega, \delta)} = \inf_{\Phi|_{\partial\Omega} = \phi} \|\Phi\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)}$.

Для соответствующих пространств и множеств вектор-функций будем использовать обозначения $\mathbf{W}_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$, $\mathbf{L}_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$, $\mathring{\mathbf{W}}_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$.

Постановка задачи. R_ν -обобщенное решение

Предположим, что деформации малы, а область Ω представляет собой однородное изотропное тело с трещиной. В области Ω рассмотрим следующую краевую задачу для системы уравнений Ламе:

$$-(2\mathbf{div}(\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u})) = \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u_i = q_i, \quad i = 1, 2, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор перемещений; $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ – тензор деформаций; \mathbf{f} – вектор объемных сил; q_i – компоненты вектора поверхностных сил; λ, μ – параметры Ламе.

Предположим, что правые части (2) и (3) удовлетворяют условиям:

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta), \quad q_i \in W_{2,\beta}^{1/2}(\partial\Omega, \delta), \quad i = 1, 2, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

Для задачи (2),(3) введем понятие R_ν -обобщенного решения. Для этого определим билинейную и линейную формы соответственно:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div}(\rho^{2\nu} \mathbf{v}) dx, \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Здесь $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (a_1(\mathbf{u}, v_1), a_2(\mathbf{u}, v_2))$, $l(\mathbf{v}) = (l_1(v_1), l_2(v_2))$,

$$a_1(\mathbf{u}, v_1) = \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_1)}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_1)}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_1)}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_1)}{\partial x_2} \right] dx,$$

$$a_2(\mathbf{u}, v_2) = \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_2)}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_2)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_2)}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial(\rho^{2\nu} v_2)}{\partial x_1} \right] dx,$$

$$l_1(v_1) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} f_1 v_1 dx, \quad l_2(v_2) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} f_2 v_2 dx.$$

Определение 1. Вектор-функцию $\mathbf{u}_\nu \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ назовем R_ν -обобщенным решением задачи (2),(3), если она удовлетворяет краевому условию (3) почти всюду на $\partial\Omega$ и для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ справедливо интегральное тождество

$$a(\mathbf{u}_\nu, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad (5)$$

при любом, но фиксированном ν , удовлетворяющем неравенству $\nu \geq \beta$.

Задача (2), (3) является задачей с особенностью (сингулярностью). Наличие входящего угла величины 2π в расчетной области приводит к тому, что обобщенное решение задачи (2),(3) принадлежит только пространству $\mathbf{W}_{2,\alpha}^{3/2-\varepsilon}(\Omega)$, где ε – любое положительное число, а приближенное обобщенное решение, найденное с помощью классического метода конечных элементов, сходится к точному решению в энергетической норме со скоростью $O(h^{1/2})$. В отличие от определения обобщенного решения билинейная и линейная формы в интегральном тождестве (5) содержат весовую функцию $\rho(x)$, в некоторой степени зависящую от пространств, которым принадлежат правые части уравнения и граничного условия (4). Весовая функция подавляет сингулярность решения задачи (2), (3). Это позволяет построить схему весового МКЭ, обеспечивающую скорость сходимости приближенного R_ν -обобщенного решения к точному $O(h)$ в весовой энергетической норме. Высокая скорость сходимости дает возможность находить приближенное решение задачи (2), (3) существенно быстрее и с большей точностью.

Схема метода конечных элементов

Для задачи (2), (3), опираясь на определение 1, построим схему весового метода конечных элементов. Для этого произведем квазиравномерную триангуляцию области Ω и введем специальную систему весовых базисных функций.

Построим квазиравномерную триангуляцию T^h области $\bar{\Omega}$. Для этого вертикальными и горизонтальными прямыми $x = -1 + \frac{2i}{N}$, $y = -1 + \frac{2j}{N}$, $i, j = 0..N$ разобьем $\bar{\Omega}$ на квадраты, каждый из которых разобьем диагональю на треугольники K , которые будем называть конечными элементами,

$h = \frac{2\sqrt{2}}{N}$ – наибольшая из длин их сторон. Вершины конечных элементов обозначим через P_k , ($k=1, \dots, n'$) и будем называть узлами (рис. 2.). Во множестве всех узлов $P = \{P_k\}_{k=1}^{k=n'}$ выделим подмножество $\{P_k\}_{k=1}^{k=n}$ внутренних узлов и подмножество $\{P_k\}_{k=n+1}^{k=n'}$ граничных узлов.

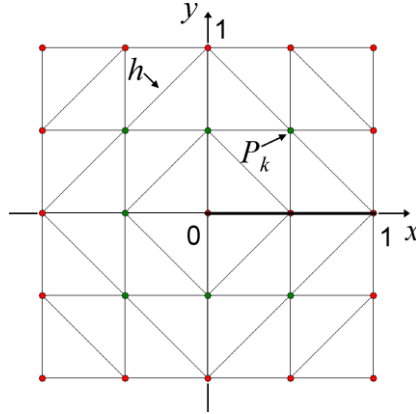


Рис. 2. Пример триангуляции.

Для каждого узла $P_k \in \{P_k\}_{k=1}^{k=n'}$ введем весовую базисную функцию $\psi_k(x) = \rho^{v^*}(x)\phi_k(x)$, $k=1, \dots, n'$, где $\phi_k(x)$ – линейная на каждом конечном элементе функция, такая, что $\phi_k(P_j) = \delta_{kj}$, $k, j=1, \dots, n'$, δ_{kj} – символ Кронекера, v^* – действительное число.

Определим множество V^h как линейную оболочку базисных функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{k=n'}$. Во множестве V^h выделим подмножество $\overset{\circ}{V}^h = \{v \in V^h, v(P_k)|_{P_k \in \partial\Omega} = 0\}$. Соответствующие множества вектор-функций обозначим \mathbf{V}^h и $\overset{\circ}{\mathbf{V}}^h$.

Определение 2. Вектор-функцию $\mathbf{u}_v^h \in \mathbf{V}^h$ будем называть приближенным R_v -обобщенным решением задачи (2), (3) по весовому методу конечных элементов, если она удовлетворяет краевым условиям (3) в граничных узлах $P_k \in \{P_k\}_{k=n+1}^{k=n'}$, и для всех $\mathbf{v}^h(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}^h$ и $v > \beta$ справедливо интегральное тождество

$$a(\mathbf{u}_v^h, \mathbf{v}^h) = l(\mathbf{v}^h).$$

Компоненты приближенного решения \mathbf{u}_v^h будем искать в виде:

$$u_{v,1}^h = \sum_{k=1}^{n'} d_{2k-1} \psi_k, \quad u_{v,2}^h = \sum_{k=1}^{n'} d_{2k} \psi_k,$$

$$d_j = \rho^{-\nu^*} (P_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}) c_j, j = 1, \dots, 2n'.$$

Неизвестные $d_j, j = 1, \dots, 2n$ определим из системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_i(\mathbf{u}_\nu^h, \psi_k) = l_i(\psi_k), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots$$

В отличие от схемы классического МКЭ базисные функции построенного весового МКЭ содержат весовую функцию в степени ν^* , зависящую от асимптотики поведения решения задачи (2),(3). Варьируя этот параметр, а также параметры δ, ν в определении R_ν -обобщенного решения, удается добиться наилучшей точности нахождения приближенного R_ν -обобщенного решения.

Численный эксперимент

В данном разделе мы приводим результаты численного эксперимента для модельной задачи, демонстрирующие преимущества построенного весового МКЭ на основе введения R_ν -обобщенного решения.

В качестве решения выступала вектор-функция

$$\mathbf{u} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \gamma) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\xi - \cos(\theta)), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\xi - \cos(\theta)) \right),$$

где r – полярный радиус; θ – полярный угол; $\gamma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$; $E = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$;

$\xi = 3 - 4\gamma$. Параметры Ламе $\lambda = 3.0$ и $\mu = 5.0$.

Вычисления проводились на сетках при различных значениях N . Оптимальное значение параметров δ, ν, ν^* , обеспечивающее наилучшую точность нахождения приближенного R_ν -обобщенного решения, определялось с помощью программного комплекса для поиска оптимального набора параметров весового МКЭ на вычислительном кластере [28]. Точность найденных приближенного R_ν -обобщенного и обобщенного ($\nu = 0, \rho(x) \equiv 1$) решений оценивалась двумя способами:

- 1) вычислялись относительная весовая энергетическая и энергетическая нормы соответственно;
- 2) определялись величины абсолютной погрешности в узлах сетки.

Относительная весовая энергетическая норма η_ν и энергетическая норма η вычислялись по формулам:

$$\eta_v = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_v^h\|_{E_v(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{E_v(\Omega)}}, \quad \eta = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}},$$

$$\text{где } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_v^h\|_{E_v(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{2\nu} \left(\lambda(\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^2 (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))^2 \right) dx \right)^{1/2};$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda(\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^2 (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Энергетическая норма является естественной нормой для оценки точности нахождения приближенного решения задач теории упругости (см., например, [29]).

Во внутренних узлах $\{P_k\}_{k=1}^{k=n}$ вычислялись абсолютные погрешности $\delta_{ij}^v = |u_{v,j}(P_i) - u_{v,j}^h(P_i)|$, $\delta_{ij} = |u_j(P_i) - u_j^h(P_i)|$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots$ и фиксировалось количество узлов, в которых δ_{ij}^v , δ_{ij} не превосходят заданную предельную погрешность $\bar{\Delta} = 10^{-5}$. Результаты численного анализа представлены в таблицах, на графиках и рисунках.

В табл. 1 представлены значения η_v и η для различных значений N , а также приведены их отношения k для двух соседних сеток. Полученные значения k соответствуют скорости сходимости $O(h^{1/2})$ приближенного обобщенного решения и $O(h)$ приближенного R_v -обобщенного решения.

Таблица 1

N	32	k	64	k	128	k	256	k	512	k	1024
η	$2,50 \cdot 10^{-1}$	1,41	$1,77 \cdot 10^{-1}$	1,42	$1,25 \cdot 10^{-1}$	1,41	$8,85 \cdot 10^{-2}$	1,41	$6,26 \cdot 10^{-2}$	1,42	$4,42 \cdot 10^{-2}$
η_v	$2,42 \cdot 10^{-1}$	1,29	$1,88 \cdot 10^{-2}$	2,00	$9,38 \cdot 10^{-2}$	2,13	$4,40 \cdot 10^{-2}$	2,01	$2,19 \cdot 10^{-2}$	1,99	$1,10 \cdot 10^{-2}$

На рис. 3. приведены графики сходимости R_v -обобщенного и обобщенного решений.

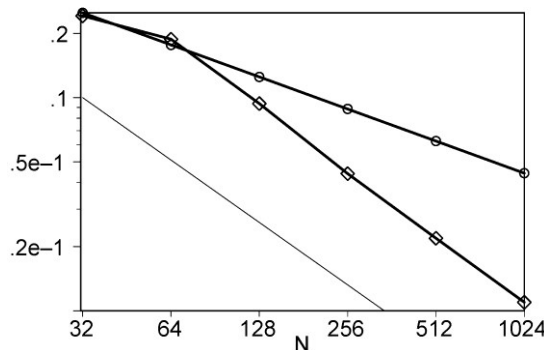


Рис. 3. Зависимость η (обобщенное решение, линия с кругами) и η_v (R_v -обобщенное решение, линия с ромбами) от N .

Для удобства восприятия на обеих осях координат применена логарифмическая шкала по основанию 2, т.е. каждое последующее основное деление шкалы соответствует увеличению соответствующей переменной в 2 раза. Тонкая линия соответствует скорости сходимости $O(h)$.

В табл. 2 и 3 приведено количество узлов P_i в процентах от их общего числа, в которых абсолютные погрешности $\delta_{i1}, \delta_{i1}^V$ и $\delta_{i2}, \delta_{i2}^V$ не превосходят заданную предельную погрешность $\bar{\Delta} = 1,5 \cdot 10^{-5}$.

Таблица 2

N	32	64	128	256	512	1024
n_1^V	11,534	10,541	34,018	80,807	97,868	99,530
n_1	12,169	23,089	39,284	62,430	89,380	98,597

Таблица 3

N	32	64	128	256	512	1024
n_2^V	15,661	11,532	27,445	49,528	90,987	99,105
n_2	15,450	20,599	30,339	42,148	56,600	72,578

Распределение абсолютных погрешностей $\delta_{ij}, \delta_{ij}^V$ по области Ω приведено на рис. 4 и 5.

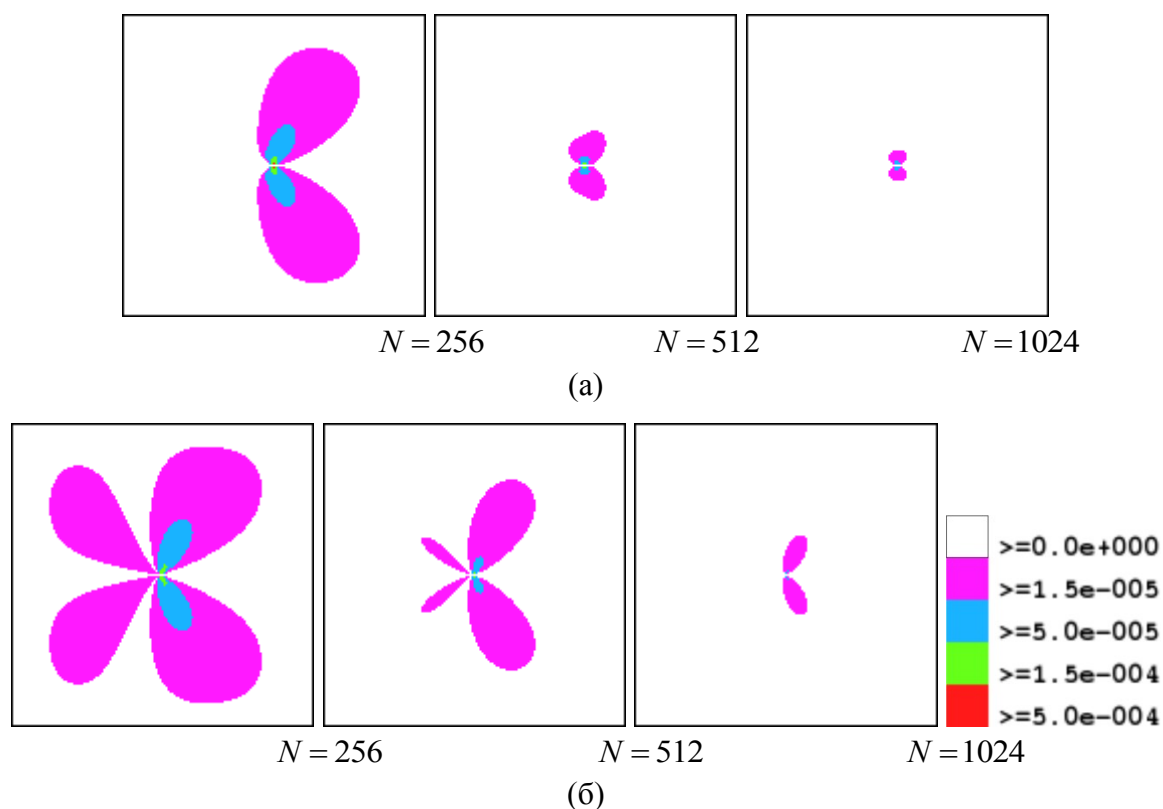


Рис. 4. Распределение по области абсолютной погрешности δ_{i1}^V приближенного R_v -обобщенного (а) и погрешности δ_{i1} приближенного обобщенного (б) решений.

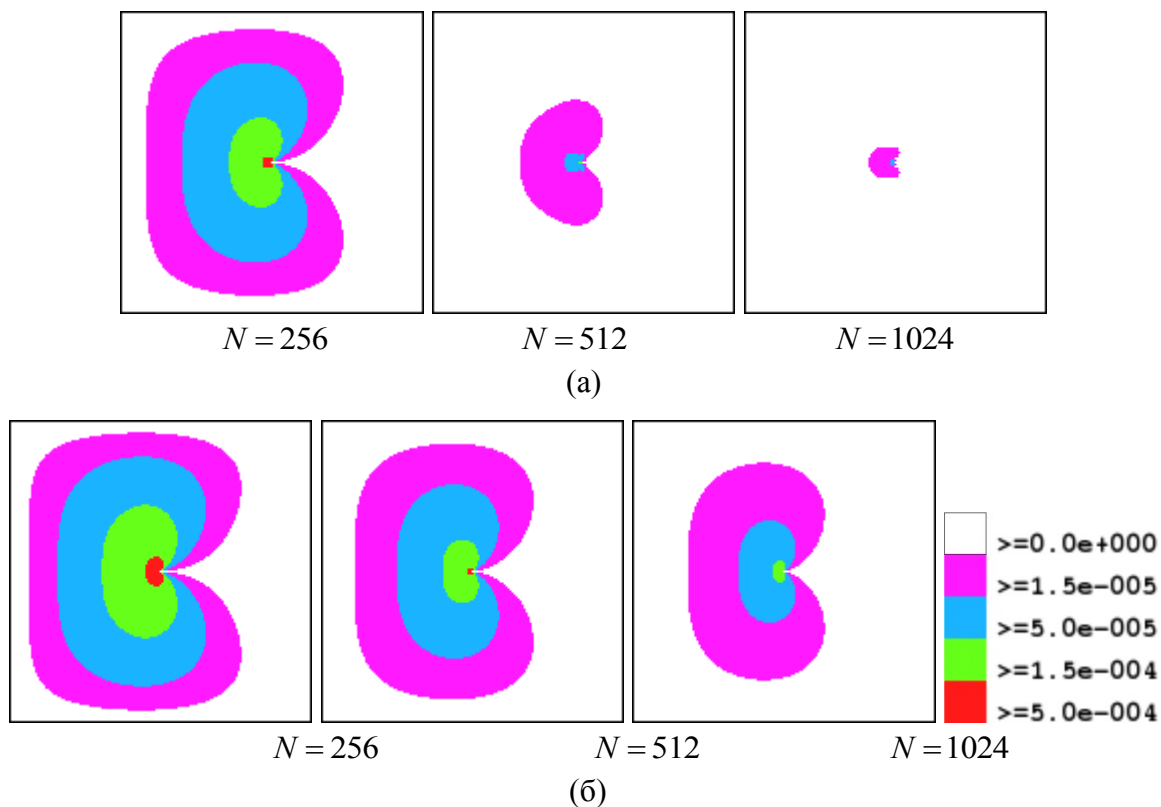


Рис. 5. Распределение по области абсолютной погрешности $\delta_{i_2}^v$ приближенного R_v -обобщенного (а) и погрешности δ_{i_2} приближенного обобщенного (б) решений.

Выводы и рекомендации

Результаты проведенного численного эксперимента позволяют сделать следующие выводы:

приближенное R_v -обобщенное решение задачи (1), (2) по весовому МКЭ сходится к точному решению со скоростью $O(h)$ в весовой энергетической норме, тогда как приближенное обобщенное решение, найденное классическим МКЭ, сходится в энергетической норме со скоростью $O(h^{1/2})$;

абсолютная погрешность δ_{ij}^v приближенного R_v -обобщенного решения в подавляющем большинстве узлов конечноэлементной сетки на 1-2 десятичных порядка меньше, чем абсолютная погрешность δ_{ij} приближенного обобщенного решения.

Полученные результаты убеждают, что для решения прикладных задач теории упругости в области с трещиной рациональнее использовать весовой МКЭ на основе определение решения как R_v -обобщенного в весовом пространстве Соболева. Этот метод позволяет находить приближенное решение значительно быстрее и с большей точностью, при этом затрачивая значительно меньше компьютерных ресурсов и времени.

Для выполнения численных экспериментов были использованы ресурсы ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Costabel M., Dauge M., Nicaise S. (eds).* Computation of corner singularities // *Boundary Value Problems in Nonsmooth Domains.* – 1995. – P. 59-68.
2. *Nicaise S.* About the Lamé system in a polygonal or a polyhedral domain and a coupled problem between the Lamé system and the plate equation. I: regularity of the solution // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa Classe di Scienze.* – 1992. – V. 19. – P. 327-361.
3. *Zeng W., Liu G. R.* Smoothed finite element methods (S-FEM): an overview and recent developments // *Arch Computat Methods Eng.* – 2018. – V. 25. – P. 397-435.
4. *Bramwell J., Demkowicz L., Gopalakrishnan J., Qiu W.* A locking-free hp DPG method for linear elasticity with symmetric stresses // *Numer. Math.* – 2012. – V. 122. – P. 671-707.
5. *Sukumar N., Dolbow J. E., Moës N.* Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination // *Int J Fract.* – 2015. – V. 196. – P. 189-206.
6. *Aghahosseini A., Khosravifard A., Tinh Quoc Bui.* Efficient analysis of dynamic fracture mechanics in various media by a novel meshfree approach // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2019. – V. 99. – P. 161-176.
7. *Sun F.L., Dong C.Y., Yang H.S.* Isogeometric boundary element method for crack propagation based on Bézier extraction of NURBS // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2019. – V. 99. – P. 76-88.
8. *Рукавишников В.А.* О весовых оценках скорости сходимости разностных схем // *Докл. АН СССР.* – 1986. – Т. 288, № 5. – С. 1058-1062.
9. *Рукавишников В.А.* О дифференциальных свойствах R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле // *Докл. АН СССР.* – 1989. – Т. 309, № 6. – С. 1318-1320.
10. *Рукавишников В.А.* Задача Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных // *Докл. РАН.* – 1994. – Т. 337, № 4. – С. 447-449.
11. *Рукавишников В.А.* О единственности R_ν -обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // *ДАН.* – 2001. – Т. 376, № 4. – С. 451-453.
12. *Рукавишников В.А., Ереклинецев А.Г.* О коэрцитивности R_ν -обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // *Дифференциальные уравнения.* – 2005. – Т. 41, №12. – С. 1680-1689.
13. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* Коэрцитивная оценка для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // *Дифференциальные уравнения.* – 2007. – Т. 43, № 4. – С. 533-543.
14. *Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В.* О принадлежности R_ν -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$ // *Дифференциальные уравнения.* – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 894-898.
15. *Рукавишников В.А.* О существовании и единственности R_ν -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // *ДАН.* – 2014. – Т. 458, № 3. – С. 261-263.

16. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Докл. РАН. – 1994. – Т. 338, № 6. – С. 731-733.
17. Рукавишников В.А., Беспалов А.Ю. Экспоненциальная скорость сходимости метода конечных элементов для задачи Дирихле с сингулярностью решения // Докл. РАН. – 2000. – Т. 374, № 6. – С. 727-731.
18. Rukavishnikov V.A. Methods of numerical analysis for boundary value problems with strong singularity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2009. – Vol. 24, № 6. – P. 565-590.
19. Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 313-324.
20. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 234, № 9. – P. 2870-2882.
21. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. The finite element method for boundary value problems with strong singularity and double singularity // Lecture Notes in Computer Science. – 2013. – Vol. 8236. – P. 110-121.
22. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. – 2012. – Vol. 231, № 6. – P. 2438-2448.
23. Рукавишников В.А., Мосолапов А.О. Весовой векторный метод конечных элементов для одной задачи электромагнетизма с сильной сингулярностью // Докл. РАН. – 2013. – Т. 469, № 2. – С. 144.
24. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – V. 341. – P. 144-156.
25. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. The method of numerical analysis for the hydrodynamics problem with corner singularity // AIP Conference Proceedings. – 2019. – V. 2116, 450043.
26. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // Докл. РАН. – 2013. – Т. 453, № 4. – С. 378.
27. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Об R_V -обобщенном решении системы Ламе с угловой сингулярностью // Докл. РАН. – 2015. – Т. 463, № 2. – С. 137.
28. Рукавишников В.А., Маслов О.В., Мосолапов А.О., Николаев С.Г. Автоматизированный программный комплекс для поиска оптимального набора параметров весового метода конечных элементов на вычислительном кластере // Computational nanotechnology. – 2015. – № 1. – С. 9-19.
29. Szabó B., Babuška I. Finite element analysis. – N.Y.:Wiley, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.А. Ереминым.

E-mail:

Рукавишников Виктор Анатольевич – vark0102@mail.ru;

Мосолапов Андрей Олегович – msandrew84@gmail.com.